A VOS STYLOS

PROBLÈME 1

Enoncé

Pour toute famille de réels positifs $c_1, \ldots, c_p$ tels que $c_1^3 + \cdots + c_p^3 \geq 7$, montrer que le cube unité (fermé, d'équation $0 \leq x, y, z \leq 1$) est inclus dans une réunion de p cubes fermés, parallèles aux axes, de côtés respectifs $c_1, \ldots, c_p$. Etablir aussi que 7 ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

Solution

Monsieur Cyril MÉHÈME nous a proposé l'excellente solution que voici.

On supposera tous les nombres donnés c_i plus petits que 1 (sans quoi le problème est trivial). Posez sur une table le plus gros des cubes donnés, puis, sur celui-ci, le plus gros des cubes restants, etc ...; construisez ainsi une pile de cubes de plus en plus petits. Arrêtez-vous dès que la hauteur atteint ou dépasse 1, et recommencez une deuxième pile, etc ...; vous rangez ainsi les p cubes donnés en q piles dont chacune, sauf peut-être la dernière, a une hauteur au moins égale à 1. Soient $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_q$ les côtés des plus petits cubes de chacune des piles, ou plutôt les épaisseurs des piles mesurées à l'altitude 1 : a_q doit être pris nul si la dernière pile est moins haute que 1. Grâce à cette convention il est clair que la $k^{ième}$ pile contient un parallélépipède de dimensions $a_k \times a_k \times 1$. **Le problème sera donc résolu si l'on montre que des carrés de côtés $a_1, \ldots, a_q$ peuvent toujours être arrangés de façon à recouvrir le carré unité.** Or le volume total de la $k^{ième}$ pile est majoré par $a_{k-1}^2 + a_k^2$ (avec la convention $a_0 = 1$, le premier terme a_{k-1}^2 majore le volume de la partie de la pile située au dessous de l'altitude 1; le volume restant est majoré par a_k^3 et *a fortiori* par a_k^2). Donc le volume total des cubes est majoré par $1 + 2(a_1^2 + \cdots + a_q^2)$. Comme il est aussi minoré par 7 (c'est l'hypothèse), on obtient $a_1^2 + \cdots + a_q^2 \geq 3$. Il reste donc à vérifier que cette inégalité entraîne la possibilité de recouvrir le carré unité par des carrés de côtés $a_1, \ldots a_q$; procédant à l'aide de piles comme ci-dessus on descend encore d'une dimension et on est ramené à la trivialité suivante : le segment unité peut être recouvert par des segments donnés pourvu que la somme de leurs longueurs soit au moins 1!

Plus généralement, une récurrence étend ce résultat à la dimension n, la constante 7 étant remplacée par $2^n - 1$.

Enfin, la valeur 7 ne peut être améliorée : sept cubes égaux, de côté $1 - \epsilon$, ont un volume total $7(1 - \epsilon)^3$ arbitrairement voisin de 7; cependant, chacun d'eux recouvre au maximum un des huit sommets du cube unité et l'un au moins des sommets n'est donc pas couvert.

PROBLÈME 2
(Proposé par D. DUMONT)

Enoncé

Pour $n \geq 1$, on appelle u_n le nombre égal à n si n est impair, et à $-3p(n)$ si n est pair, où $p(n)$ désigne le plus grand diviseur impair de n. Posant

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n,$$

montrer que $|s_n| \leq n$, et trouver tous les n pour lesquels $|s_n| = n$.

Indication

$s_{2n-1} = s_{4n-1}\,; \quad s_{2n} = s_{4n}$.

PROBLÈME 3

Enoncé

Vrai ou faux ?

> Tout ensemble de parties de $\mathbb{N}$ qui est totalement ordonné par inclusion (ceci signifie que, deux éléments quelconques de cet ensemble étant donnés, l'un des deux est toujours inclus dans l'autre) est fini ou dénombrable.

Donner une démonstration ou un contre exemple.