A VOS STYLOS !

Sécher un peu, mais pas trop, sur une question à la fois élémentaire et astucieuse est un plaisir d'esthète; c'est pourquoi chaque numéro de '*L'Ouvert*' vous propose désormais un problème. Vos contributions à cette rubrique (énoncés nouveaux, solutions ingénieuses ou élégantes, commentaires, etc ...) sont bien sûr vivement sollicitées. Compte-tenu des délais d'impression et de routage, qui ne laissent finalement que peu de temps entre le moment où vous lisez '*L'Ouvert*' et celui où le numéro suivant est bouclé, et pour nous permettre de prendre en compte vos éventuelles réactions, la solution de chaque problème ne paraîtra que deux numéros plus tard; le numéro intermédiaire fournira une indication, coup de pouce à d'éventuels égarés. A vos stylos!

PROBLÈME 1 :

Pour toute famille de réels positifs $c_1, \ldots, c_p$ tels que $c_1^3 + \cdots + c_p^3 \geq 7$, motrer que le cube unité (fermé, d'équation $0 \leq x, y, z \leq 1$ est inclus dans une réunion de p cubes fermés, parallèles aux axes, de côtés respectifs $c_1, \ldots, c_p$. Etablir aussi que 7 ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

INDICATION (Problème 1) :

Même problème à deux dimensions, avec des carrés et la condition $c_1^2 + \cdots + c_p^2 \geq 3$.

PROBLÈME 2 : (proposé par D. Dumont)

Pour $n \geq 1$, on appelle u_n le nombre égal à n si n est impair, et à $-3p(n)$ si n est pair, où $p(n)$ désigne le plus grand diviseur impair de n. Posant

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n,$$

montrer que $|s_n| \leq n$, et trouver tous les n pour lesquels $|s_n| = n$.