# RACINES DE PLUS GRAND MODULE D'UN POLYNÔME

Jean LEFORT et Frédéric DOUÉ

*'L'Ouvert' se veut toujours un moyen d'échange entre collègues. C'est pourquoi nous sommes heureux qu'une discussion entre J. LEFORT et F. DOUÉ à propos de l'article du premier sur la résolution des équations polynomiales, aboutisse aujourd'hui à une publication commune qui répond en partie à la question que se posait J. LEFORT sur la recherche des arguments des racines de plus grand module.*

## 1. Pour trouver les racines il faut de la suite dans les idées.

On sait que si on veut chercher l'ensemble $E$ des suites satisfaisant à :

$$u_{n+p} = \alpha_1.u_{n+p} + \cdots + \alpha_p.u_n$$

on est amené à chercher les suites géométriques qui en sont solutions, c'est-à-dire à résoudre l'équation :

$$x^p = \alpha_1.x^{p-1} + \cdots + \alpha_p.$$

Si ce polynôme a $p$ racines distinctes $|r_1| > |r_2| \geq \cdots \geq |r_p]$, alors toute suite de $E$ s'écrit comme combinaison linéaire des suites $(r_i^n)$. Plus exactement les $(r_i^n)$ forment une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$ et les coordonnées d'une suite particulière sont parfaitement définies par la donnée des $p$ premières valeurs de la suite.

Par exemple, la suite $s$ de $E$ définie par :

$$s_0 = s_1 = s_2 = \ldots = s_{p-2} = 0 \quad \text{et} \quad s_{p-1} = 1$$

s'écrit :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, (r_i^n) \quad \text{avec} \quad x_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(r_i - r_j).}$$

Il est clair que, puisque $r_1$ est la racine de plus grand module, pour $n$ grand, $s_n$ est équivalent à :

$$\frac{r_1^n}{\prod_{j \neq 1}(r_1 - r_j)}$$

et par conséquent $s_{n+1}/s_n$ converge vers $r_1$. On démontre même que la convergence est géométrique en ce sens que $s_{n+1}/s_n - r_1 \sim A.k^n$ où $|k| = |r_2|/|r_1|$ donc les calculs sont d'autant plus rapides que $|k|$ est plus petit, c'est-à-dire qu'il y a un grand écart entre $|r_1|$ et $|r_2|$.

## 2. Un exemple pour mieux comprendre.

Considérons le polynôme $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3$. En dérivant deux fois et en remontant on voit que $P(x)$ admet deux racines réelles $r_1$ et $r_2$ avec $4 < r_1 < 5$ et $-3 < r_2 < -2$ et deux racines complexes conjuguées dont le module $\rho$ est tel que $r_1.r_2.\rho^2 = -3$ donc $\sqrt{5}/5 < \rho < \sqrt{6}/4$. La racine de plus grand module est bien $r_1$.

L'étude de la suite $s$ définie par :

$$s_{n+4} = 3.s_{n+3} + 6.s_{n+2} - 8.s_{n+1} + 3.s_n$$

avec

$$s_0 = s_1 = s_2 = 0 \quad \text{et} \quad s_3 = 1$$

conduit au tableau suivant :

| $n$ | $S_n$ | $S_n/S_{n-1}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 1 | 0 | |
| 2 | 0 | |
| 3 | 1 | |
| 4 | 3 | 3 |
| 5 | 15 | 5 |
| 6 | 55 | 3,666666667 |
| 7 | 234 | 4,254545455 |
| 8 | 921 | 3,935897436 |
| 9 | 3772 | 4,095548317 |
| 10 | 15135 | 4,012460233 |
| 11 | 61371 | 4,054905847 |
| 12 | 247510 | 4,033012335 |
| 13 | 1000992 | 4,044248717 |
| 14 | 4042473 | 4,038466841 |
| 15 | 16337404 | 4,041438001 |
| 16 | 66001644 | 4,039910135 |
| 17 | 266692548 | 4,040695532 |
| 18 | 1077515695 | 4,040291726 |
| 19 | 4353701433 | 4,040499320 |
| 20 | $1,759066\ 10^{10}$ | 4,040392593 |
| 21 | $7,107415\ 10^{10}$ | 4,040447461 |
| 22 | $2,871694\ 10^{11}$ | 4,040419259 |
| 23 | $1,160289\ 10^{12}$ | 4,040433754 |
| 24 | $4,688061\ 10^{12}$ | 4,040426299 |
| 25 | $1,894178\ 10^{13}$ | 4,040430133 |
| 26 | $7,653292\ 10^{13}$ | 4,040428161 |
| 27 | $3,092258\ 10^{14}$ | 4,040429176 |
| 28 | $1,249405\ 10^{15}$ | 4,040428653 |
| 29 | $5,048131\ 10^{15}$ | 4,040428922 |
| 30 | $2,039661\ 10^{16}$ | 4,040428783 |

On en déduit que $r_1 \simeq 4,040\ 428\ 8$. Pour cette valeur $P$ est voisin de $-2,3.10^{-6}$.

## 3. Suivons une nouvelle suite.

Imaginons que l'on ait $|r_1| = |r_2| > |r_3| \geq \cdots$ et $r_1 \neq r_2$; c'est le cas générique quand on a un polynôme à coefficients réels admettant deux racines conjuguées comme racines de plus grand module.

L'étude précédente peut encore être utilisée, mais cette fois si $s_n$ est équivalent à $s'_n$ définie par :

$$s'_n = \frac{(r_1)^n}{\prod_{j\neq 1}(r_1 - r_j)} + \frac{(r_2)^n}{\prod_{j\neq 2}(r_2 - r_j)}$$

Mais $s'$ s'exprime comme une suite récurrente à deux termes puisqu'elle dépend de deux suites géométriques; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} s'_{n+1} &= (r_1 + r_2)s'_n - r_1 r_2 s'_{n-1} \quad \text{ou encore} \\ s'_n &= (r_1 + r_2)s'_{n-1} - r_1 r_2 s'_{n-2}. \end{aligned}$$

Et en considérant $(r_1 + r_2)$ et $(r_1 r_2)$ comme des inconnues, on voit que :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{s'_{n+1}.s'_{n-2} - s'_n.s'_{n-1}}{s'_n.s'_{n-2} - (s'_{n-1})^2} \\ r_1.r_2 &= \frac{s'_{n+1}.s'_{n-1} - (s'_n)^2}{s'_n.s'_{n-2} - (s'_{n-1})^2}. \end{aligned}$$

On peut donc espérer qu'asympotiquement on retrouve $(r_1 + r_2)$ et $(r_1 r_2)$ en remplaçant $s'$ par $s$. Dans la pratique, on pose :

$$\begin{aligned} y_n &= s_n.s_{n-2} - (s_{n-1})^2 \\ z_n &= s_{n+1}.s_{n-2} - s_n.s_{n-1} \end{aligned}$$

et en étudiant des équivalents géométriques simples de $y_n$ et $z_n$ on démontre que $(y_{n+1})/y_n$ converge vers $r_1 r_2$ et $z_n/y_n$ converge vers $r_1 + r_2$.

## 4. Un exemple guère nouveau.

Considérons le polynôme $Q(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1$ qui n'est autre que le polynôme aux inverses de $P$. D'après l'étude déjà faite, les racines de plus grand module de $Q$ sont donc complexes et conjuguées. Posons $r_1 = \rho \exp(i\theta)$ et $r_2 = \rho \exp(-i\theta)$. Alors $r_1 r_2 = \rho^2$ et $r_1 + r_2 = 2.\rho.\cos(\theta)$.

L'étude de la suite $s$ définie par :

$$s_{n+4} = 8/3 s_{n+3} - 2.s_{n+2} - s_{n+1} + 1/3 s_n$$

avec $s_0 = s_1 = s_2 = 0$ et $s_3 = 1$ conduit au tableau de la page suivante :

| $n$ | $S_n$ | $y_n = S_n S_{n-2} - S_{n-1}^2$ | $y_n/y_{n-1}$ | $z_n = S_{n+1} S_{n-2} - S_n S_{u-1}$ | $Z_n/y_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | | | | |
| 2 | 0 | 0 | | 0 | |
| 3 | 1 | 0 | | 0 | |
| 4 | 2,666667 | −1 | | −2,666667 | 2,666666667 |
| 5 | 5,111111 | −2 | 2 | −6,333333 | 3,166666667 |
| 6 | 7,296296 | −6,6667 | 3,333333333 | −18,888889 | 2,833333333 |
| 7 | 6,901235 | −17,9630 | 2,694444444 | −52,490756 | 2,922222222 |
| 8 | −0,411523 | −50,6296 | 2,818556697 | −146,679013 | 2,897099977 |
| 9 | −20,492456 | −141,5926 | 2,796634968 | −410,724280 | 2,900746790 |
| 10 | −58,292638 | −395,9520 | 2,796417397 | −1148,571561 | 2,900784845 |
| 11 | −111,750191 | −1107,9959 | 2,798309675 | −3213,699593 | 2,900461629 |
| 12 | −161,059950 | −3099,4957 | 2,797389136 | −8990,460445 | 2,900620396 |
| 13 | −154,530999 | −8671,4389 | 2,797693516 | −25152,09956 | 2,900568158 |
| 14 | 2,356548 | −24259,3750 | 2,797618166 | −70366,28544 | 2,900581134 |
| 15 | 439,156011 | −67868,7703 | 2,797630616 | −196858,7292 | 2,900578990 |
| 16 | 1267,213949 | −189871,7518 | 2,797630648 | −550738,0133 | 2,900578986 |
| 17 | 2447,058295 | −531190,834 | 2,797629605 | −1540761,064 | 2,900579162 |
| 18 | 3552,690394 | −1486075,475 | 2,797630117 | −4310479,431 | 2,900579078 |
| 19 | 3458,895848 | −4157489,264 | 2,797629955 | −12059126,48 | 2,900579103 |
| 20 | 93,687827 | −11631116,65 | 2,797629990 | −33736973,84 | 2,900579098 |
| 21 | −9404,961792 | −32539560,70 | 2,797629985 | −94383569,68 | 2,900579100 |
| 22 | −27541,93948 | −91033650,76 | 2,797629986 | | |

On en déduit que $\rho^2 \simeq 2,797\ 629\ 986$ et $2.\rho.\cos(\theta) \simeq 2,900\ 579\ 100$. D'où $\rho$ et $\theta$, avec par exemple :

$$r_1 = 1,450\ 289\ 550 + 0,833\ 240\ 802i \quad \text{et} \quad r_2 = 1,450\ 289\ 550 - 0,833\ 240\ 802i.$$

## 5. Conclusion.

Cette méthode nous a permis d'obtenir toutes les solutions de l'équation :

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

puisqu'on peut facilement obtenir la dernière en utilisant, entre autre le produit des racines. On trouve :

$$4,040\ 428\ 8\ ;\ -2,077\ 227\ 5\ ;\ 0,518\ 399\ 331 \pm i0,297\ 838\ 101$$

ce qui donne la factorisation réelle :

$$(x - 4,040\ 428\ 8)(x + 2,007\ 227\ 5)(x^2 - 1,036\ 798\ 7x + 0,357\ 445\ 4).$$

Mais elle a nécessité une étude préalable sérieuse et soigneuse de ce polynôme. L'application de la même technique à un polynôme de degré élevé se révèle laborieuse, mais on sait qu'aucune méthode n'est simple quand le degré est élevé.

Il resterait à étudier le cas d'une racine multiple de plus grand module. On sait qu'alors la suite associée au polynôme n'est plus combinaison linéaire de suites géométriques mais qu'il y intervient un terme en $n$. Des méthodes analogues permettent d'aboutir.