GÉNÉRATION SIMPLE DE POLYÈDRES REMARQUABLES

Eugène EHRHART

1. POLYÈDRES RÉGULIERS.

Donnons-nous au départ le tétraèdre régulier, le cube et le dodécaèdre régulier avec ses faces pentagonales. Les nombres S, A, F de leurs sommets, arêtes et faces sont :

	F	A	S
tétraèdre :	4,	6,	4
cube :	6,	12,	8
dodécaèdre :	12,	30,	20.

Par polaires réciproques, à partir du centre de gravité d'un polyèdre, un sommet donne un plan facial et inversement. On obtient ainsi les duaux des trois polyèdres précédents : le tétraèdre (autodual), l'octaèdre et l'icosaèdre réguliers. En échangeant F et S dans le tableau précédent avec conservation de A, on trouve :

	F	A	S
octaèdre :	8,	12,	6
icosaèdre :	20,	30,	12.

Comme un sommet du dodécaèdre a trois branches, une face de l'icosaèdre dual a trois côtés : elle est donc un triangle équilatéral.

C'est le moment de rappeler l'un des plus beaux résultats géométriques de l'antiquité grecque :

Théorème 1 de PLATON. *Il existe juste cinq polyèdres réguliers.*

2. POLYÈDRES RHOMBIQUES.

On appelle ainsi tout polyèdre convexe dont les faces sont des losanges égaux.

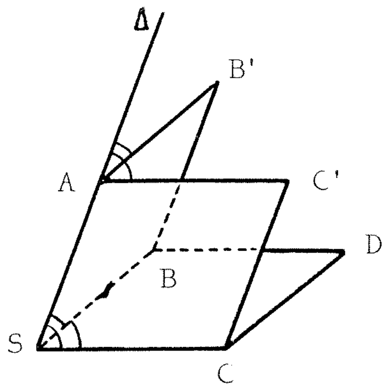
Accolons à chaque face f d'un polyèdre régulier R, de dièdre α, une pyramide dont les faces sont inclinées sur sa base f de $\beta = (\pi - \alpha)/2$. Chaque arête de R est alors une diagonale d'une face d'un polyèdre rhombique. Ainsi le tétraèdre régulier, le cube et le dodécaèdre régulier ($A = 6, 12, 30$) donnent respectivement le cube, **le dodécaèdre et le triacontaèdre rhombiques** ($F = 6, 12, 30$).

Le cube, considéré comme assemblage d'arêtes articulées, n'est pas rigide. Il n'est qu'un cas particulier **d'une famille d'hexaèdres rhombiques : les rhomboèdres.**

© L'OUVERT 48(1987)

Théorème 2. *Tout polyèdre rhombique, dont chaque sommet réunit des angles faciaux tous aigus ou tous obtus, a 12 ou 30 faces.*

Lemme. Si un sommet S d'un polyèdre rhombique P réunit juste trois angles faciaux aigus α, le solide est un rhomboèdre.



Considérons la figure formée par les trois faces de P réunies en S. La translation de vecteur $\overrightarrow{SA}$ du trièdre $SABC$ donne un trièdre $A\Delta B'C'$, tel que les angles $\widehat{\Delta AB'}$ et $\widehat{\Delta AC'}$ égaux à α sont situés respectivement dans les plans SAB et SAC et ne peuvent donc donner des faces de P. Il en résulte que si on appliquait contre $\widehat{B'AC}$ plus de deux angles α, P ne serait pas convexe. Il en serait de même si on y appliquait un angle α et un angle $\pi - \alpha$ ou deux angles $\pi - \alpha$. Le triangle $B'AC'$ est donc nécessairement la moitié d'une face $B'AC'A'$ de P et impose $A'D$ comme arête complétant un rhomboèdre.

Soient alors $\mathcal{P}$ le polyèdre rhombique de l'énoncé, α l'angle aigu d'une face et β son angle obtus. L'angle β est inférieur à $2\pi/3$, car la somme des angles β réunis en un sommet de $\mathcal{P}$ est inférieure à 2π, et donc $\alpha > \pi/3$. Par suite il y a moins de 6 angles aigus faciaux réunis en un sommet. Il y en a donc 4 ou 5, car 3 donnerait un rhomboèdre. Si en un sommet de $\mathcal{P}$ sont réunis 4 angles aigus, on ne peut appliquer au bord de la corolle faciale ainsi formée une chaîne de 4 faces, que si les faces sont celles d'un triacontaèdre rhombique ($\alpha = \arccos 1/3 \simeq 70°32'$). De même si en un sommet de $\mathcal{P}$ sont réunis 5 angles aigus, on ne peut appliquer au bord de la corolle faciale correspondante les angles obtus d'une chaîne de 5 faces, que si les faces sont celles d'un triacontaèdre rhombique ($\alpha = \arctan 2 \simeq 63°30'$). On en déduit que seuls le dodécaèdre et le triacontaèdre rhombiques vérifient le théorème.

Conjecture. *Tout polyèdre rhombique a 6, 12 ou 30 faces.*

Pour tout polyèdre convexe (ou même seulement homéomorphe à une sphère) à faces quadrangulaires

$$A = 2F \qquad S = F + 2.$$

La première égalité est immédiate, car les F faces ont ensemble $4F$ côtés, chacun commun à deux faces. Elle entraîne la seconde par la relation d'EULER $S - A + F = 2$.

D'où le tableau :

	F	A	S
dodécaèdre rhombique:	12,	24,	14
triacontaèdre rhombique :	30,	60,	32.

Notons que les deux polyèdres admettent une sphère inscrite et une autre sphère tangente à toutes les arêtes.

3. DEUX POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS D'ARCHIMÈDE.

Un polyèdre convexe est dit semi-régulier, si ses faces, semblablement disposées, sont toutes égales à l'un ou l'autre de deux polygones réguliers.

Par polaires réciproques on obtient les duaux du dodécaèdre et du triacontaèdre rhombiques. Ce sont respectivement **le cuboctaèdre** et **l'icosidodécaèdre**. Les faces du premier sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux, celles du second 20 triangles équilatéraux et 12 pentagones réguliers. En renversant les lignes du tableau précédent on trouve :

	F	A	S
cuboctaèdre :	14,	24,	12
icosidodécaèdre :	32,	60,	30.

4. POLYÈDRES CERFIQUES.

Nous appelons ainsi des polyèdres convexes dont les faces, toutes égales, sont des "*cerfs-volants* " (un cerf-volant est un quadrilatère convexe dont juste une diagonale est axe de symétrie).

Théorème 3. *Il existe deux polyèdres cerfiques de 24 ou 60 faces.* Ils sont circonscrits respectivement au dodécaèdre ou au triacontaèdre rhombiques.

Comme $A = 2F$ et $S = F + 2$, ils vérifient le tableau :

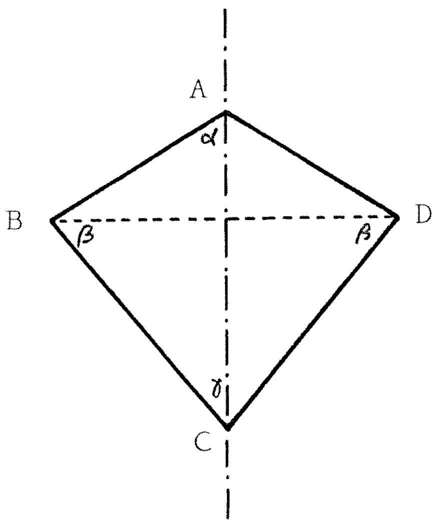
	F	A	S
icositétraèdre :	24,	48,	26
hexacontaèdre :	60,	120,	62.

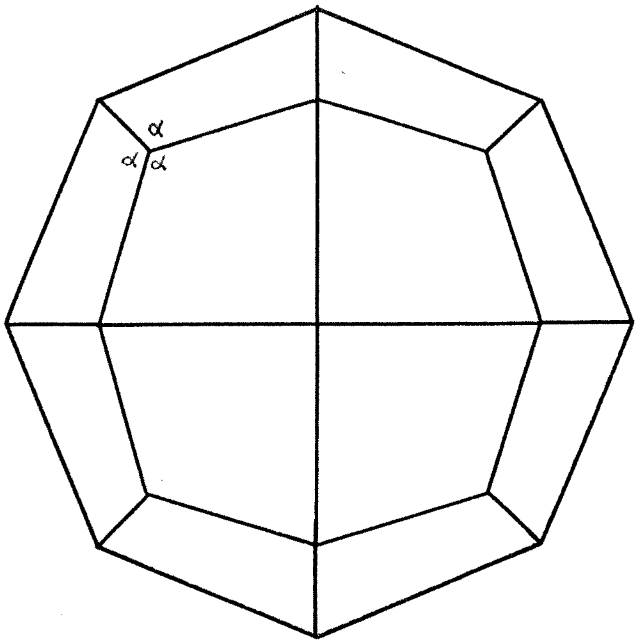
Pour démontrer le théorème 3, remarquons que par raison de symétrie les angles dièdres du dodécaèdre ou du triacontaèdre rhombiques sont égaux. Soit P un tel polyèdre, de dièdre Φ. Accolons à chacune de ses faces f une pyramide, dont les faces sont inclinées sur sa base f de $\Psi = (\pi - \Phi)/2$. Chaque arête de P est alors l'axe d'une face d'un polyèdre cerfique. Le dodécaèdre et le triacontaèdre rhombiques ($A = 24, 60$) donnent ainsi respectivement des polyèdres cerfiques de 24 et 60 faces.

L'icositétraèdre cerfique. Précisons la forme de son cerf-volant facial d'axe $AC = a$. Du fait que l'angle dièdre du dodécaèdre rhombique est $2\pi/3$ et que l'angle aigu de ses faces est arc $\cos 1/3$, on déduit par un calcul facile que

$$HA = \frac{a}{3} \qquad BD = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 1,09a.$$

Parmi les neuf plans de symétrie du polyèdre il en est trois, perpendiculaires deux à deux, qui le coupent suivant des octogones réguliers. Le voici vu face à un de ces plans :





Polyèdres cerfiques bipyramidaux. *Un antiprisme* est un polyèdre formé à partir de deux polygones réguliers égaux de même axe, les côtés de chacun étant reliés aux sommets de l'autre par des triangles équilatéraux. Par polaires réciproques on obtient son dual. C'est un polyèdre constitué d'une corolle de cerfs-volants égaux de même sommet, accolée bord à bord sur une corolle égale.

Il y a évidemment une infinité de ces polyèdres cerfiques bipyramidaux. Ils admettent une sphère inscrite et un axe de rotation.

Conjecture. *A part les polyèdres bipyramidaux, il n'y a que deux polyèdres cerfiques. Ils ont 24 ou 60 faces.*