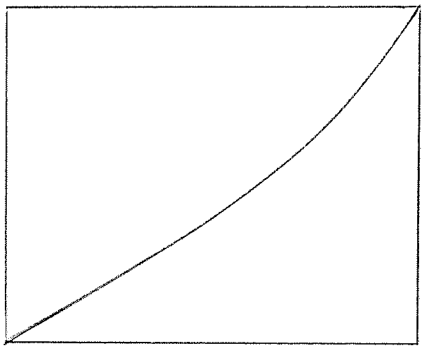
# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET NOMBRES ENTIERS

**ou**

# LA MÉTHODE TRRU

Raymond SEROUL



## 0.— Introduction

Un écran bit-map est un moniteur où l'on peut allumer et éteindre le point de coordonnées $(x, y)$, avec $x$ et $y$ entiers compris entre 0 et $N$. Actuellement,(1) une valeur courante de $N$ est 1024. Dans la suite, et pour simplifier, nous poserons

$$N = 1000.$$

Supposons que je veuille tracer sur cet écran et "en diagonale" la courbe $x = e^t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Pour cela, je serai amené à écrire la boucle

$$\begin{array}{l} \textbf{for } k := 0 \textbf{ to } N \textbf{ do} \\ \qquad x := \text{trunc}\big(M * \exp(k/N)\big) \end{array}$$

et à commander l'allumage des points $(k, x - M)$. (La constante entière $M$ est choisie pour que l'on ait $0 \leq x - M \leq N$.)

Le calcul des mille exponentielles est long : 22 secondes.(2) Pourquoi une telle lenteur ?

- la machine code les réels sur 80 bits, même si vous ne l'avez pas demandé (soit des nombres de 19 à 20 chiffres). C'est du gâchis, vu que l'on n'a besoin que de 3 chiffres après la virgule.

- les calculs sur les réels sont beaucoup plus lents que les calculs sur les entiers. Or c'est précisémment de nombres entiers que nous avons besoin...

---



(1) Le meilleur écran disponible sur le marché affiche 4096 × 3278 points avec une résolution de 300 points par pouce, c'est à dire celle d'une imprimante laser !

(2) matériel utilisé : Macintosh Plus et LightSpeed Pascal toutes options inhibées.

Ce sont ces idées, combinées avec la philosophie non-standard, qui ont amené REEB, REVEILLÈS, TROESCH et URLACHER à publier un article que je voudrais raconter ici à ma manière.

## 1.— L'idée : calculer en virgule fixe.

Considérons le nombre $x = 25.179,618\,775\,832\ldots$ que nous décomposons dans la base $N = 1000$

$$x = X_0 + \frac{X_1}{N} + \frac{X_2}{N^2} + \cdots$$

($X_0 = [x]$ est donc la partie entière de $x$). Puisque ce sont les entiers qui nous fascinent, il est tentant d'utiliser l'approximation $x = X_0$. Mais cette approximation est trop grossière : nous devrons effectuer quelques calculs; lors d'une opération, les reports de retenue peuvent bousculer les derniers chiffres de $X_0$. Pour obtenir une meilleure précision, nous utiliserons les trois premiers chiffres après la virgule, ce qui signifie que nous utiliserons l'approximation

$$x = X_0 + \frac{X_1}{N}. \tag{1}$$

Mais il ne faut manipuler que des nombres entiers : nous représenterons donc dans la machine le nombre $x$ par le couple d'entiers $(X_0, X_1)$.

Examinons le comportement de l'approximation (1) vis à vis des opérations arithmétiques. Commençons par une addition. Avec des notations évidentes, nous avons

$$x + y = \Big(X_0 + Y_0\Big) + \Big(\frac{X_1 + Y_1}{N}\Big).$$

Pour obtenir la partie entière $(x+y)_0$ de $x+y$, il faut tenir compte de la retenue éventuelle, soit

$$\begin{cases} (x+y)_0 = X_0 + Y_0 + (X_1 + Y_1)\,\mathbf{div}\,N \\ (x+y)_1 = (X_1 + Y_1)\,\mathbf{mod}\,N. \end{cases} \tag{2}$$

Continuons avec la multiplication. En procédant comme ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} xy &= \Big(X_0 + \frac{X_1}{N}\Big)\Big(Y_0 + \frac{Y_1}{N}\Big) \\ &= X_0Y_0 + \frac{X_0Y_1 + X_1Y_0}{N} + \frac{X_1Y_1}{N^2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, nous avons $0 \leq X_1Y_1 \leq (N-1)^2 < N^2$. Comme la suite le montrera, nous manipulerons de très grands entiers. Si l'on ne prend pas de précaution particulière — mais cela pénalise la rapidité — des overflows seront monnaie courante lors du calcul du produit $X_1Y_1$. Puisque la rapidité prime sur la précision, nous négligerons le terme $X_1Y_1/N^2$ pour ne retenir que l'approximation

$$xy = X_0Y_0 + \frac{X_0Y_1 + X_1Y_0}{N}.$$

La représentation en machine du produit $xy$ est donc

$$(3) \qquad \begin{cases} (xy)_0 = X_0Y_0 + \big(X_0Y_1 + X_1Y_0\big)\,\mathbf{div}\,N \\ (xy)_1 = \big(X_0Y_1 + X_1Y_0\big)\,\mathbf{mod}\,N. \end{cases}$$

Ces formules se compliquent un tout petit peu plus s'il faut à tout prix tenir compte de la retenue fournie par le terme négligé $X_1Y_1$

$$(3') \qquad \begin{cases} \quad Z = \big(X_0Y_1 + X_1Y_0\big) + \big(X_1Y_1\big)\,\mathbf{div}\,N \\ (xy)_0 = X_0Y_0 + Z\,\mathbf{div}\,N \\ (xy)_1 = Z\,\mathbf{mod}\,N. \end{cases}$$

Il y a un cas très important où les formules (3) et (3′) se simplifient et donnent le même résultat : multiplions en effet $x$ par $y = 1/N$. Puisque $Y_0 = 0$ et $Y_1 = 1$, on a tout de suite

$$(4) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{x}{N}\right)_0 = X_0\,\mathbf{div}\,N \\ \left(\dfrac{x}{N}\right)_1 = X_0\,\mathbf{mod}\,N. \end{cases}$$

**Remarque** : pourquoi tant de chichis et pourquoi ne pas plus simplement manipuler les nombres entiers $E(Ux)$, avec $U = 10^{10}$ ou $U = 10^{20}$ ? Ce serait tellement plus simple! Ces complications prennent leur source dans l'usage de l'ordinateur, qui n'accepte pas de rendre un entier quand on multiplie $x$ par $1/N$, même si le résultat est un nombre entier.

## 2.— La méthode TRRU.[3]

*Il s'agit de calculer $N$ valeurs de la fonction $x(t) = e^t$ pour $t$ variant de 0 à 1. La précision des calculs doit être de trois chiffres après la virgule.*

Pour obtenir la précision requise, nous calculerons les valeurs de la fonction $y = Ux$, où $U$ est un entier qui sera convenablement choisi.

Et maintenant, la méthode : *on intègre l'équation différentielle*

$$y' = y, \qquad y(0) = U$$

*en se servant de la représentation* (1) *des nombres mis en jeu.*

Pour intégrer cette équation, nous utiliserons la méthode la plus naïve qui soit : la méthode d'Euler. Rappelons en quoi elle consiste. Soit $h = 1/N$ le pas de la méthode. La valeur de $y$ en $t+h$ est, en première approximation,

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) = y(t) + hy(t). \tag{5}$$

Cela nous conduit à construire la suite $y_n$ telle que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{N} y_n, \qquad y_0 = U.$$

Au lieu de mémoriser les formules (2) et (4), ce qui n'est pas de tout repos, recommençons les calculs qui nous ont amenés à ces formules. Posant $y_n = Y_0(n) + Y_1(n)/N$, nous avons facilement

$$\begin{aligned} Y_0(n+1) + \frac{Y_1(n+1)}{N} &= Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} + \frac{1}{N}\Big(Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N}\Big) \\ &= Y_0(n) + \frac{Y_0(n) + Y_1(n)}{N} + \frac{Y_1(n)}{N^2}. \end{aligned}$$

En négligeant comme convenu le terme en $1/N^2$, nous sommes conduits à l'algorithme 1.

```
Y0 := U ; Y1 := 0 ;
for n := 1 to N do begin
      Y1 := Y0 + Y1 ;
      Y0 := Y0 + Y1 div N ;
      Y1 := Y1 mod N ;
      end.
```

*Algorithme 1*

*Commentaires*

- temps de calcul : 1 seconde.
- comme on part de $y_0$, la valeur calculée dans la boucle est bien $y_n$,

---

(3) ce sont les initiales des auteurs de l'article. J'aurais aimé garder l'ordre alphabétique, mais n'étant pas FANTASIO, je n'arrive pas à prononcer facilement RRTU.

Passons aux expérimentations : le temps de calcul est d'un peu moins d'une seconde et ne dépend pas de la valeur de $U$ choisie! L'accélédration espérée est bien au rendez-vous (sinon, vous n'auriez entendu parler de rien). Mais quelle est la précision obtenue? Pour $U = 10^3$, l'erreur maximum est de $2\,10^{-3}$ et pour $U = 10^4$, elle est de $1.4\,10^{-3}$. Il ne sert à rien de donner à $U$ des valeurs plus grandes. En effet, nous avons manifestement les inégalités

$$Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} \leq y_n \leq e^{n/N}.$$

Pour $n = N$, cela donne

$$e^1 - y_N = e^1 - \big(1 + \frac{1}{N}\big)^N = 1.4\,10^{-3}.$$

Conclusion : si nous voulons réellement trois décimales exactes, il faut employer une méthode d'intégration un peu plus sophistiquée, capable d'une meilleure précision.

En voici une, qui est une méthode d'Euler améliorée. Le problème est de trouver une meilleure valeur que (5) pour $y(t+h)$. Pour cela, on, utilise les égalités

$$z = y(t) + \frac{h}{2}y'(t) = y(t) + \frac{h}{2}y(t) \qquad y(t+h) = y(t) + hz,$$

ce qui est une manière déguisée d'utiliser le développement limité du second ordre $y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2y''(t)$ sous la forme d'un schéma de Hörner. En passant aux représentations, on obtient

$$Z_0 + \frac{Z_1}{N} = Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} + \frac{1}{2\,N}\Big(Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N}\Big)$$

$$Y_0(n+1) + \frac{Y_1(n+1)}{N} = Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} + \frac{1}{N}\Big(Z_0 + \frac{Z_1}{N}\Big).$$

Nous avons convenu de négliger les termes en $1/N^2$. Il en résulte que $Z_1$ est inutile et l'on obtient l'algorithme 2.

```
Y0 := U ; Y1 := 0 ;
N2 := 2 * N ;
for n := 1 to N do begin
      Z0 := Y0 + (2 * Y1 + Y0) div N2 ;
      Y1 := Y1 + Z0 ;
      Y0 := Y0 + Y1 div N ;
      Y1 := Y1 mod N ;
      end.
```

*Algorithme 2*

- le temps de calcul est de 1.5 secondes,
- les trois décimales exactes sont au rendez-vous pour $U = 10^3$.

*Commentaires*

## 3.— Quelques réflexions pour terminer.

Au début, je n'arrivais pas à retrouver tout seul les algorithmes de TTRU. Ne comprenant rien du tout à leur démarche, j'ai donc essayé de me débarasser du non-standard.([4]) C'est alors que je me suis aperçu qu'il s'agissait de calculer en virgule fixe.

Les informaticiens savent bien que l'on gagne en vitesse de calcul en représentant les nombres réels en format fixe. Dans le LightSpeed Pascal du Macintosh, pour ne citer que lui, il existe non pas un, mais *deux types* (Fixed et Frac) qui sont consacrés à cela. Autre exemple : les routines graphiques d'affichage sur un écran manipulent exclusivement des nombres entiers.

Et la nouveauté dans tout cela? Pris séparément, les calculs en virgule fixe et les équations différentielles paraissent bien classiques. Par contre, intégrer une équation différentielle — avec gestion "à la main" des retenues — amène de nouveaux résultats. Il est remarquable que TTRU aient redécouvert, en intégrant les équations $y' = C$ et $y''+y = 0$, les algorithmes classiques de BRESENHAM (tracé rapide de droite et de cercle).

Ce que je trouve de très satisfaisant dans leur démarche, c'est la simplicité et l'élégance des moyens mis en œuvre. Et puis c'est amusant et inattendu, cette rencontre d' objets *a priori* aussi antagonistes que sont les équations différentielles et les nombres entiers.

J'attend maintenant avec impatience les prochains résultats.

### BIBLIOGRAPHIE

REEB, REVEILLÈS, TROESCH, URLACHER : *Équations différentielles et nombres entiers.* Publications de l'IRMA. 1987.

([4]) une bonne manière d'évaluer l'intérêt d'une théorie est de voir si on peut s'en passer, comment et à quel prix.