RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS POLYNOMIALES : UNE ANCIENNE MÉTHODE (1)

Jean Lefort

Premier exemple :

Soit à résoudre l'équation

$$x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

Modifions un signe sur deux (on tient compte de l'existence de $0x$) :

$$x^3 + x^2 + 1 = 0$$

et multiplions membre à membre :

$$x^6 - x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

c'est manifestement une équation en x^2. Divisons tous les exposants par 2 :

$$x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Recommençons, en modifiant un signe sur deux ($x^3+x^2-2x+1 = 0$) en multipliant membre à membre ($x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 1 = 0$) puis en divisant tous les exposants par deux ($x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = 0$).

On obtient ainsi la construction suivante :

Étape 0	x^3	$-$	x^2		x	-1
	x^3	$+$	x^2		x	$+1$
1	x^3	$-$	x^2	$-$	$2x$	-1
	x^3	$+$	x^2	$-$	$2x$	$+1$
2	x^3	$-$	$5x^2$	$+$	$2x$	-1
	x^3	$+$	$5x^2$	$+$	$2x$	$+1$
3	x^3	$-$	$21x^2$	$-$	$6x$	-1
	x^3	$+$	$21x^2$	$-$	$6x$	$+1$
4	x^3	$-$	$453x^2$	$-$	$6x$	-1
	x^3	$+$	$453x^2$	$-$	$6x$	$+1$
5	x^3	$-$	$205221x^2$	$-$	$870x$	$-1\ldots$

Dans le tableau ci-dessus, au fur et à mesure des multiplications on a divisé tout de suite les exposants par deux. Alors $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{205\ 221}}}}}$ est une valeur approchée d'une solution de l'équation proposée (avec cinq radicaux, car il y a 5 étapes).

Sur une calculatrice on trouve $(205\ 221)^{1/32} \simeq 1,465571231$ qui, reporté dans le polynôme $x^3 - x^2 - 1$ donne $-3,1\ .\ 10^{-9}$, alors que pour obtenir zéro il faudrait prendre $1,465571232\ldots$ C'est une bonne précision.

Comme il est facile d'étudier la fonction

$$x \longmapsto x^3 - x^2 - 1$$

et de se rendre compte qu'elle n'a qu'un seul zéro, on obtient ainsi une valeur approchée de la solution. Plus exactement, en prenant à chaque fois l'opposé du coefficient de x^2 et en en extrayant la racine carrée autant de fois qu'il y a eu d'étapes on obtient une suite de nombres qui converge vers la solution. Ici :

$$\sqrt{1} \quad ; \sqrt{5} \simeq 1,4953 \quad ; \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{21}}} \simeq 1,4631 \quad ; \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{453}}}} \simeq 1,465568$$

et enfin le nombre obtenu ci-dessus.

Deuxième exemple

Appliquons la même méthode à :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

On me dira que cela ne présente aucun intérêt puisqu'il est facile de calculer les deux solutions avec **un seul** radical et que de toute façon on obtient le nombre d'or ... etc ...

Essayons quand même :

$$\begin{array}{llcrl}
0 & x^2 & - & x & -1 \\
 & x^2 & + & x & -1 \\
\hline
1 & x^2 & - & 3x & +1 \\
 & x^2 & + & 3x & +1 \\
\hline
2 & x^2 & - & 7x & +1 \\
 & x^2 & + & 7x & +1 \\
\hline
3 & x^2 & - & 47x & +1 \\
 & x^2 & + & 47x & +1 \\
\hline
4 & x^2 & - & 2207x & +1\ldots
\end{array}$$

On trouve la suite :

$$\sqrt{3} \simeq 1,732; \sqrt{7} \simeq 1,6266; \sqrt{\sqrt{\sqrt{47}}} \simeq 1,618126; \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2207}}}} \simeq 1,618034\ldots$$

Il est, de plus, très facile de connaître la loi de formation du coefficient de x, c'est tout simplement à l'étape n :

$$u_n = +(u_{n-1})^2 - 2 \text{ et } u_1 = +3.$$

Les résultats précédents conduisent à

$$\lim_{n\to\infty} (+u_n)^{1/2^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On reconnaîtra qu'il eut été difficile de trouver de but en blanc cette limite **(2)**.

Un peu de théorie

Considérons un polynôme $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ dont les racines sont $a_1, a_2, \dots a_n$. Si nous développons ce polynôme, nous trouvons :

$$x^n - \sum_{i=1}^{n} a_i\ x^{n-1} + \sum_{i\neq j} a_i a_j\ x^{n-2} - \dots + (-1)^n (a_1 a_2 \dots a_n).$$

Il est clair que le polynôme $Q(x) = (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$ dont les racines sont les opposés du précédent se développe en :

$$x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i\ x^{n-1} + \sum_{i\neq j} a_i a_j\ x^{n-2} + \dots + (a_i a_2 \dots a_n)$$

et nous remarquons qu'il a suffit de changer un signe sur deux dans le développement.

Le produit $P(x).Q(x)$ donne alors, sous forme factorisée, $(x-a_1)(x+a_1)$ $(x-a_2)(x+a_2)\dots(x-a_n)(x+a_n)$ ou bien $\prod_{i=1}^{n}(x^2-a_i^2)$ et la réduction de x^2 en x conduit à $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i^2)$ qui est un polynôme dont les racines sont les carrés des racines du polynôme P initial.

En itérant le processus p fois nous obtenons un polynôme dont les racines sont les puissances $N = 2^p$ du polynôme de départ.

Lemme : *Supposons maintenant que les a_i, réels ou complexes satisfassent à $|a_1| > |a_2| \geq |a_3| \geq \dots \geq |a_n|$, alors :*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k|} = |a_1|.$$

En effet, pour $2 \leq i \leq n$ $|a_i|/|a_1| < 1$, donc $\lim_{k\to\infty} |a_i|^k/|a_1|^k = 0$ et par suite $|a_1^k + a_2^k + \dots + a_2^k|$ est équivalent à $|a_1^k|$, d'où le résultat.

Dans les deux exemples précédents, nous avions a_1 réel et positif, il était donc naturel de retrouver cette racine par le procédé utilisé.

Troisième exemple

Considérons le polynôme $x^3 + 3x^2 + x + 3$ et résolvons-le de même.

$$
\begin{array}{l|llllll}
0 & x^3 & + & 3x^2 & + & x\, + & 3 \\
 & x^3 & - & 3x^2 & + & x\, - & 3 \\
\hline
1 & x^3 & - & 7x^2 & - & 17x\, - & 9 \\
 & x^3 & + & 7x^2 & - & 17x\, + & 9 \\
\hline
2 & x^3 & - & 83x^2 & + & 163x\, - & 81 \\
 & x^3 & + & 83x^2 & + & 163x\, + & 81 \\
\hline
3 & x^3 & - & 6563x^2 & + & 13123x\, - & 6561 \\
 & x^3 & + & 6563x^2 & + & 13123x\, + & 6561 \\
\hline
4 & x^3 & - & 43046723x^2 & - & \dots &
\end{array}
$$

On trouve alors, comme valeur approchée :

$$(43\ 046\ 723)^{1/16} \simeq 3,000\ 000\ 009.$$

Or, 3 n'est manifestement pas un zéro du polynôme proposé, (ni même une valeur approchée à très peu près). Bien sûr, la méthode ne permet d'obtenir que le module de la racine de plus grand module. Ici, on remarque que c'est -3 qui est zéro de $x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x+3)(x^2+1)$. D'ailleurs, à extraire des racines carrées à la queue-leu-leu comme nous le faisons depuis le début de l'article, nous ne pouvons trouver que des nombres positifs.

Il est donc indispensable d'effectuer une étude préalable pour savoir où se trouve à peu près la racine de plus grand module.

Cas de racines multiples

Imaginons que la racine de plus grand module ait une multiplicité α. Comme dans le lemme, on trouve :

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k|} = |a_1|.$$

Mais cette fois-ci la convergence est beaucoup plus lente. Elle peut être accélérée si on connaît α à l'avance (d'où toujours le même intérêt à effectuer une petite étude préalable). Vérifions-le sur un exemple simple :

$$(x-2)^2(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$$

qui conduit successivement à :

$$
\begin{array}{llllll}
x^3 - & 9x^2 & + 24x & - & 16 \\
x^3 - & 33x^2 & +288x & - & 256 \\
x^3 - & 513x^2 & + & \cdots &
\end{array}
$$

or $\sqrt[2^3]{513} \simeq 2,18154\ldots$ mais $\sqrt[2^3]{\frac{513}{2}} \simeq 2,00048\ldots$

On voit donc qu'en divisant par l'ordre de multiplicité la convergence devient aussi bonne que dans le cas d'une racine simple.

Retour à la théorie

Nous venons de voir que la méthode proposée permet de calculer le module de la racine de plus grand module quel que soit son ordre de multiplicité. Mais on peut démontrer que si il y a deux ou plus racines distinctes de plus grand module, la méthode ne marche pas **(3)**.

Reste à trouver l'argument. Or, ceci est un problème d'une toute autre difficulté et, sauf dans les cas où le polynôme de départ est de degré faible, l'argument est le plus souvent inaccessible. Il est donc important, un polynôme étant donné, de pouvoir montrer que la racine de plus grand module est réelle.

ANNEXES

(1) La méthode proposée a été publiée en 1834 dans '*L'Algèbre*' par LOBAČEVSKIĬ. Mais elle a été trouvée de façon indépendante par DANDELIN en 1826 et GRAEFFE en 1837. L'idée essentielle est dûe à BERNOULLI.

(2) Pour la suite $u_n = u_{n-1}^2 - 2$ il peut être assez naturel de poser $u_n = 2\text{ch }v_n$ ce qui conduit à $\text{ch }v_n = \text{ch }2v_{n-1}$ d'où $v_n = 2^{n-1}\text{argch}\frac{3}{2}$. Cela permet de revenir à u_n et de calculer sa racine $2^{n^{ième}}$. On trouve bien que $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{2^{-n}} = e^{\frac{1}{2}\text{argch}\frac{3}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Une autre façon, strictement équivalente, consiste à poser $u_n = \frac{1}{t_n} + t_n$ alors $\lim u_n^{2^{-n}} = \frac{u_o+\sqrt{u_o^2-4}}{2}$.

(3) L'exemple élémentaire de $x^3 - 1 = 0$ qui fournit 0 montre effectivement la faillite de la méthode dans le cas de trois racines de même module.

M. EMERY à qui j'avais parlé de cette méthode s'est penché sur le cas de deux racines de même module (ce qui est le cas général pour les polynômes à coefficient réel et les racines de plus grand module complexe).

On part du polynôme $x^2 - 2x\cos\theta + 1$, de sorte que l'algorithme fournit $\lim \sqrt[2^n]{|\cos 2^n\theta|}$. Bien que le module des racines soit 1, il est possible de choisir θ tel que la limite ci-dessus ne soit pas 1. Prenons par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0} 2^{-f(n)}$, où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante d'entiers qui tend suffisamment vite vers l'infini pour que l'on ait $\frac{f(k+1)-f(k)}{2^{f(k)}} \to +\infty$ (par exemple $f(0) = 2, f(k+1) = f(k) + k\ 2^{f(k)}$.
On peut écrire

$$
\begin{aligned}
2^{f(k)}\theta &= \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0} 2^{f(k)-f(n)} \\
&= \frac{\pi}{2}(\text{entier impair} + \sum_{n\geq 0} 2^{f(k)-f(k+1+n)}),
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned}
|\cos 2^{f(k)}\theta| &= \left|\sin \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 0} 2^{f(k)-f(k+1+n)}\right| \\
&< \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 0} 2^{f(k)-f(k+1+n)} \\
&\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 0} 2^{f(k)-[f(k+1)+n]} = \pi 2^{f(k)-f(k+1)}
\end{aligned}$$

et

$$\sqrt[2^{f(k)}]{|\cos 2^{f(k)}\theta|} < \pi^{(2^{-f(k)})} 2^{\frac{f(k)-f(k+1)}{2^{f(k)}}};$$

comme cette dernière expression tend vers $1 \times 0 = 0$, on a $\liminf_n \sqrt[2^n]{|\cos 2^n\theta|} = 0$. J'ignore s'il existe des θ tels que

$$\lim_n \sqrt[2^n]{|\cos 2^n\theta|} < 1,$$

mais il est très facile de vérifier que pour LEBESGUE — presque — partout $\theta \in [0, 2\pi], \lim \sqrt[n]{\cos n\theta} = 1$.