

ASPECTS MATHÉMATIQUES DU PLIAGE DE PAPIER (*)

Jacques JUSTIN

Le fait que le pliage de papier ait des rapports avec les mathématiques est évident puisque le papier prend naturellement une forme plane et le pli une forme de ligne droite. En France, le pliage a eu sa part dans l'initiation des écoliers aux notions simples de calcul et de géométrie (loi de 1882). Nous voudrions passer en revue ici, de façon un peu informelle, les différents aspects mathématiques du pliage et montrer qu'ils soulèvent parfois des problèmes non triviaux, voire non résolus.

I.— PLIAGES ET SYMÉTRIES.

1. En matière de géométrie plane d'abord, tout se ramène à ce que CHOQUET appelle l'axiome du pliage : “*étant donnée une droite D d'un plan P , il existe une isométrie de P qui échange les deux demi-plans définis par D et qui conserve les points de D* ”.

Plier une feuille en deux selon une droite D revient ainsi à effectuer la symétrie axiale d'axe D , ceci sert parfois à introduire cette notion dans les petites classes de collège. Les choses deviennent plus intéressantes si l'on trace sur une feuille de papier deux droites D et D' ne se coupant pas sur la feuille. Il est facile de voir que si l'on plie selon D et D' , en laissant fixe une des parties extrêmes, le déplacement subi par l'autre partie extrême *correspond* à la composition des symétries par rapport à D et D' , c'est-à-dire tout simplement à une rotation. Nous y reviendrons plus loin, mais la conclusion est qu'on peut en géométrie substituer le pliage à la manipulation des symétries axiales dans certaines démonstrations.

2. Un cas familier des plieurs est ce qu'on appelle l'oreille de lapin : plier un triangle ABC selon les bissectrices intérieures AI , BI et le segment CI . Un quatrième pli se forme naturellement (**) et une étude attentive du pliage montre :

- a) que ce 4^e pli est perpendiculaire à l'un des côtés du triangle;
- b) que CI est la 3^e bissectrice intérieure et donne les propriétés du cercle inscrit (voir figure 1).

3. Des théorèmes moins triviaux, ceux de PONCELET sur les tangentes aux coniques, donnent lieu à des démonstrations assez curieuses par le pliage.

Théorème : Soient T et T' les points de contact des tangentes issues d'un point P à une conique à centre de foyer F et F' . Alors :

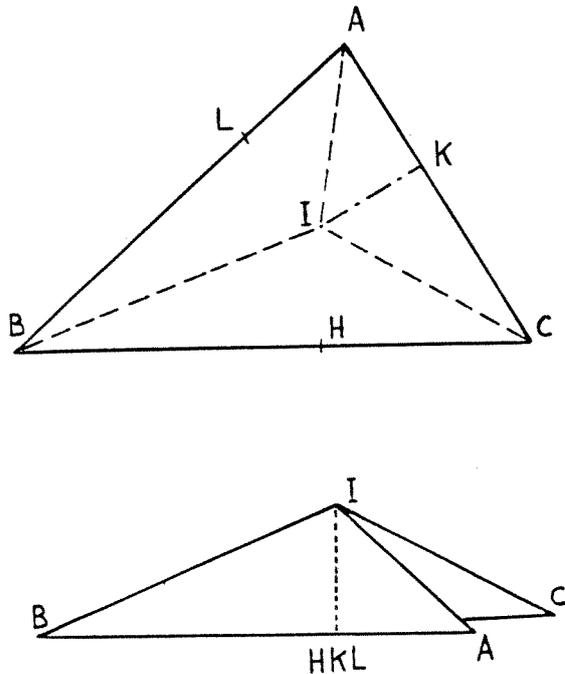
© L'OUVERT 47 (1987)

(*) Conférence donnée le 15 octobre 1986 à Strasbourg.

(**) D'une façon générale, si on plie une feuille selon 3 demi-droites de même origine, il se forme un quatrième pli dont la position dépend de façon très simple des angles des trois demi-droites (voir plus loin).

- 1) FP est une bissectrice de $\widehat{TFT'}$ et $F'P$ est une bissectrice de $\widehat{TF'T'}$.
- 2) Les angles $\widehat{TPT'}$ et $\widehat{FPF'}$ ont même bissectrice (figure 2).

4. Donnons la démonstration pour l'ellipse. Pour l'hyperbole c'est un peu plus délicat (deux cas à considérer) et on pourra se reporter au 'PLOT' n° 27 (2^e trimestre 1984).

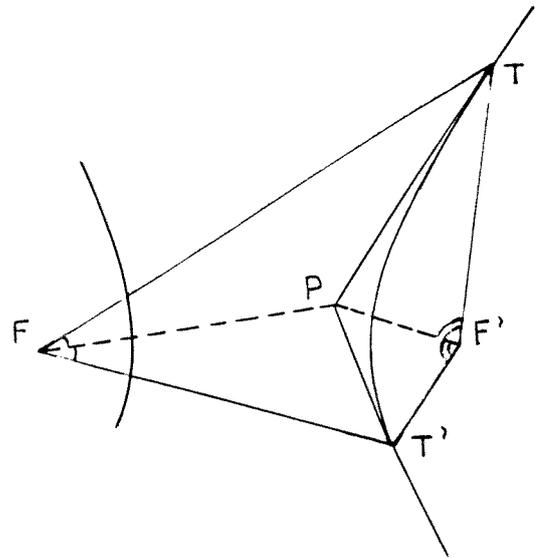


$$IH = IK = IL$$

$$\begin{cases} KA - KC = BA - BC \\ KA + KC = AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow KA = AB + AC - BC$$

Figure 1



THÉORÈME de PONCELET
 $\widehat{FPF'}$ et $\widehat{TPT'}$
 mêmes bissectrices

Figure 2

Soit AB un segment de droite tracé sur une feuille de papier de forme quelconque. Pour simplifier un peu les dessins et faciliter le pliage nous supposons que AB est un bord du papier (figure 3). Soit XX' une droite qui coupe AB en un point M entre A et B . Plions par un pli vallée selon XX' , ce qui amène A en A' (figure 4).

On a $MA' + MB = AB$. Donc M appartient à l'ellipse (E) de foyers A' et B dont le grand axe a pour longueur AB . En raison du pliage, MX est bissectrice extérieure de BMA' , donc MX est tangente en M à (E) .

Remarque. On peut se passer de cette propriété de la tangente. En effet si P est un point quelconque de XX' , autre que M , en dépliant le papier on constate que $PA' + PB > AB$, donc XX' est totalement à l'extérieur de l'ellipse à l'exclusion du point M qui est sur l'ellipse. C'est dire que XX' est la tangente en M (figure 4).

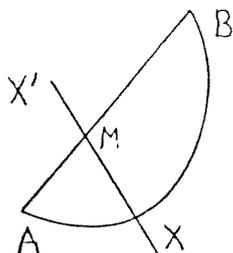


Figure 3

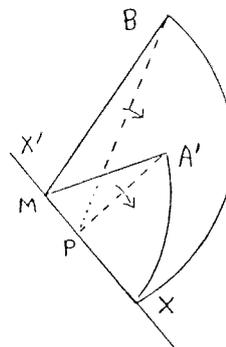


Figure 4

Prenons maintenant un point quelconque P sur MX , et plions la couche supérieure du papier par un pli le long de PA' et la couche inférieure par un pli le long de PB . Quand on aplatit, le pli PM s'ouvre et il apparaît un nouveau pli, PN' . La figure 5 représente l'ancienne et la nouvelle disposition (en supposant le papier transparent). La figure 6 montre les plis sur le papier déplié. Dans ces figures, N et N' représentent l'intersection du nouveau pli avec le côté AB .

Comme le côté AB est maintenant plié dans la position $A'N'B'$ et pour la même raison que plus haut, N' appartient à l'ellipse (E) et PN' est la tangente en N' . En raison du pliage selon BP , BP est bissectrice de $\widehat{MBN'}$ et, de même, $A'P$ est bissectrice de $\widehat{MA'N'}$: c'est la première partie des théorèmes de PONCELET!

Pour établir la seconde partie, observons que le papier est plié en définitive selon les demi-droites PB , PN , PA , PX . L'application de la relation (2) donne alors $\widehat{MPB} = \widehat{APN}$ dans la figure 6, c'est-à-dire $\widehat{MPB} = \widehat{A'PN'}$ dans la figure 5. Par conséquent les angles $\widehat{BPA'}$ et $\widehat{MPN'}$ ont bien les mêmes bissectrices, c'est la seconde partie des théorèmes.

On pourrait épiloguer sur la nature de ces démonstrations, disons simplement qu'elles auraient été parfaitement acceptées au siècle dernier!

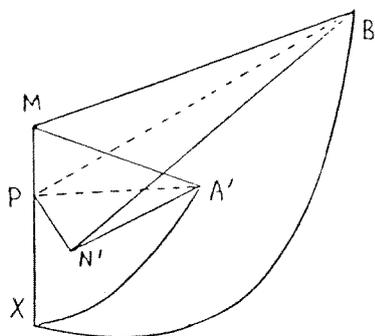


Figure 5

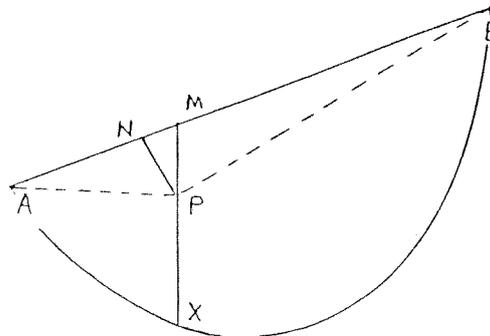


Figure 6

II.— CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

1. Le pliage permet de faire des constructions. Ceci a été utilisé (et pourrait l'être plus) dans l'enseignement. On peut voir facilement que le pliage permet de construire les mêmes points que la règle et le compas. On trouve toutefois, chez certains auteurs, l'affirmation que certaines constructions possibles avec la règle et le compas ne le sont pas par le pliage. La raison est qu'ils limitent le pliage aux deux opérations suivantes :

- a) faire le pli passant par deux points connus (= règle),
- b) déterminer la bissectrice de deux droites en les amenant l'une sur l'autre par pliage (= bissecteur).

Avec règle et bissecteur le corps des nombres constructibles est le plus petit sous-corps *pythagoricéen* de \mathbb{R} (pythagoricéen veut dire que s'il contient x et y il contient $\sqrt{x^2 + y^2}$). Ce corps est strictement inclus dans celui des nombres constructibles avec règle et compas.

Ceci est intéressant mais il est abusif de limiter le pliage aux opérations a) et b). L'opération c) ci-dessous qui réalise l'intersection d'une droite avec un cercle est en effet courante et indispensable en pliage :

- c) amener un point A donné sur une droite donnée au moyen d'un pli passant par un point B donné.

Mais on peut envisager l'opération suivante, peu courante mais facile :

- d) amener deux points donnés respectivement sur deux droites données au moyen d'un pli unique.

Avec ces quatre opérations le pliage permet de résoudre l'équation générale du 3^e degré et aussi du 4^e. (On consultera "L'Ouvert" n° 42).

2. Les plieurs se sont intéressés au problème de la division d'un segment en parties égales. La division en 2^n est triviale. Pour les autres rapports on s'y ramène en utilisant la similitude des triangles ou le théorème de THALÈS (figure 7).

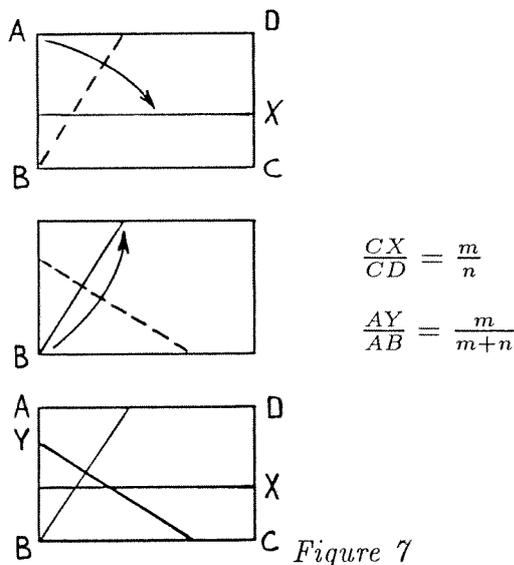


Figure 7

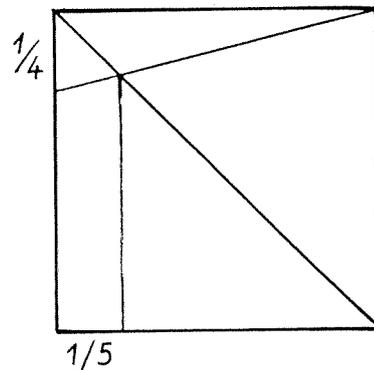


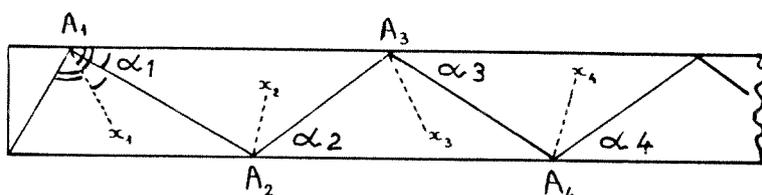
Figure 8

Certaines méthodes sont élégantes (figure 8). Il est possible aussi d'utiliser une méthode itérative pour diviser les segments ou les angles. Ceci est à peu près évident, a été retrouvé plusieurs fois, mais n'a guère d'intérêt pratique. Une variante mérite toutefois d'être signalée. Elle permet de faire d'une façon efficace la division d'un angle plat en utilisant une longue bande de papier (figure 9).

3. Concrètement, les plieurs ont réalisé de nombreuses constructions géométriques, notamment les polygones réguliers de 3 (figure 10), 4, 5, 6, 8 côtés. A ce propos, il faut noter le pliage d'une bande de papier selon un nœud simple, qui donne un pentagone régulier (figure 11). Ceci est connu et démontré depuis 1682. Il est remarquable qu'on puisse faire par le même procédé tout polygone régulier d'ordre impair, par exemple l'heptagone qui n'est pas réalisable avec la règle et le compas. Ce paradoxe s'explique par le fait qu'en pliant un nœud avec une bande de papier, on ne fait pas seulement de la géométrie plane, mais on utilise la propriété topologique que le papier ne peut pas se croiser lui-même quand on le déforme.

Une autre jolie construction est celle de la parabole qui s'étend aux coniques bifocales (figure 12). On amène par pliage F sur la droite D . Le pli T est tangent à la parabole (P). En répétant l'opération pour plusieurs plis on obtient la génération tangentielle de la parabole.

Au lieu d'avoir une droite D , on peut prendre un cercle C ; la même construction donne, selon que F est intérieur ou extérieur à C , une ellipse ou une hyperbole.



$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_n); \alpha_n \rightarrow \frac{\pi}{5}$$

Figure 9

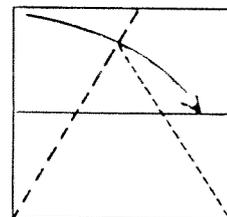


Figure 10

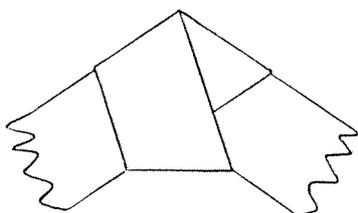


Figure 11

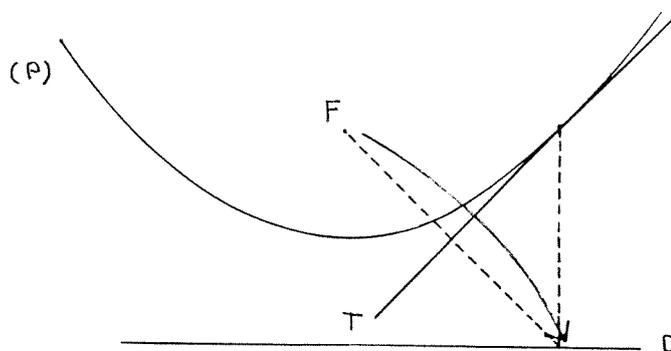


Figure 12

III.— SURFACES DÉVELOPPABLES.

1. Il est difficile de parler de pliage sans envisager sous leur aspect général les déformations d'une feuille de papier, en effet le papier s'incurve souvent au cours du processus de pliage. Si on déforme une feuille de façon à obtenir une surface lisse, celle-ci est une surface réglée développable. Il apparaît en général un pli courbe — la ligne de striction —. Plus généralement, on peut considérer que la déformation d'une feuille de papier donne des portions de surfaces développables lisses qui se raccordent selon des lignes correspondant à des plis courbes. Le problème de savoir quelles conditions doivent remplir ces plis et ces surfaces est un exercice de géométrie différentielle et présente un intérêt technologique en matière de pliage de tôles (figure 13).

Par exemple, les machines à emballer les poudres nécessitent des feeders qui peuvent s'obtenir en roulant et en pliant des tôles selon la figure 13.

L'étude des pliages courbes comme le feeder peut se faire en remplaçant la courbe par une ligne brisée voisine et en se ramenant ainsi au pliage selon des droites, avec des faces planes, mais le résultat n'est pas plan.

En origami, il arrive parfois qu'on arrondisse à la fin. Un bel exemple en est la boîte chinoise [Lazy Susan] représentée figure 14.

2. Un autre problème de déformation mérite d'être signalé. Etant donné une surface cylindrique inextensible de diamètre D et de hauteur H , peut-on la retourner sans faire de pli ni de déchirure? Plus précisément existe-t-il une isotropie isométrique lisse entre le plongement naturel et le plongement antipodal du cylindre dans \mathbb{R}^3 ? Si l'on accepte que la surface puisse se traverser au cours de la déformation on parlera d'homotopie au lieu d'isotopie. La réponse est la suivante pour les isotopies :

si $H < \pi D / (\pi + 2)$: oui
 si $H \geq D$: non.

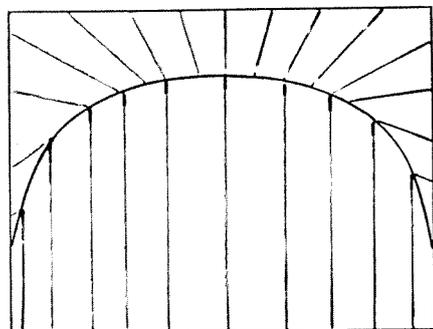
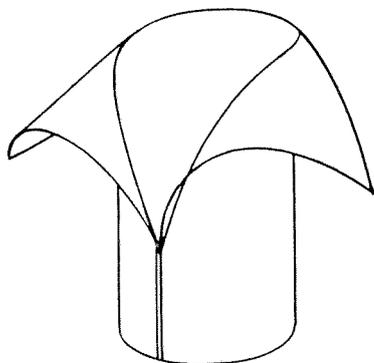


Figure 13

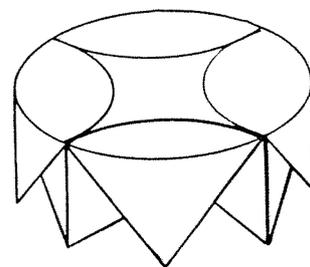


Figure 14

Il reste donc une zone d'incertitude (dans cette zone, la réponse est oui pour les homotopies). La partie négative se prouve par la topologie algébrique. La partie affirmative se prouve en utilisant des techniques de pliage mais en remplaçant les plis par des arrondis (ou pseudo-plis).

Par exemple, la figure 15 donne un cylindre lorsqu'on colle A' sur A . On peut le retourner par des pseudo-plis selon les lignes indiquées. L'étape centrale est indiquée au-dessous.

Un cylindre très allongé ne peut donc pas être retourné dans les conditions indiquées. Par contre, en pliage, on admettrait parfaitement de retourner n'importe quel cylindre *comme une chaussette*. Des retournements du même genre sont souvent effectués par les plieurs. Ils ont l'inconvénient d'abîmer le papier mais paraissent difficilement évitables. En ce qui concerne le cas précis du cylindre, on peut d'ailleurs toujours le retourner en le mettant à plat et en ne faisant que des plis rectilignes en nombre fini. La figure 16 donne une étape du travail (patience et papier mince!). Ces remarques montrent que la représentation mathématique du pli et des opérations de pliage est moins simple qu'on ne pourrait le croire.

Un problème voisin : avec quels rectangles peut-on faire une bande de MOEBIUS?

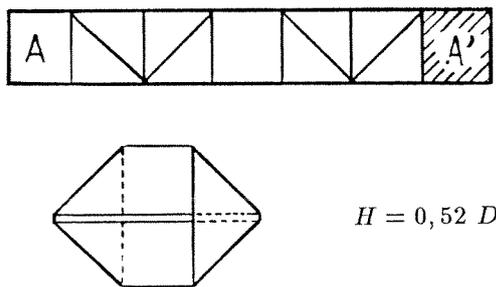


Figure 15

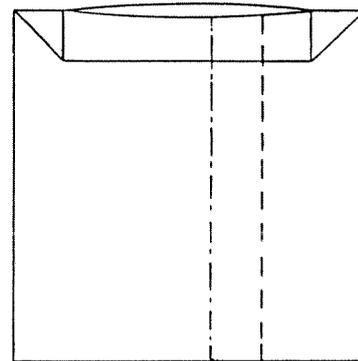


Figure 16

IV.— UN PEU DE THÉORIE.

1. En origami, on part d'un certain nombre de pliages classiques appelés bases. Voici par exemple la base de l'oiseau dans ses deux positions et l'aspect du carré déplié (figure 17).

Cette base possède de nombreuses propriétés qui donnent lieu à une foule de problèmes quand on veut les généraliser à un autre polygone que le carré. Voici un exemple : la base du carré possède les trois propriétés suivantes :

- on peut plier les pointes vers le bas,
- on peut plier autour d'un axe vertical,
- les bords du carré se rejoignent exactement.

La figure 18 donne une base pentagonale ayant les mêmes propriétés. On dit qu'elle est **parfaite**. Les triangles, les quadrilatères circonscrits à un cercle admettent une unique base parfaite.

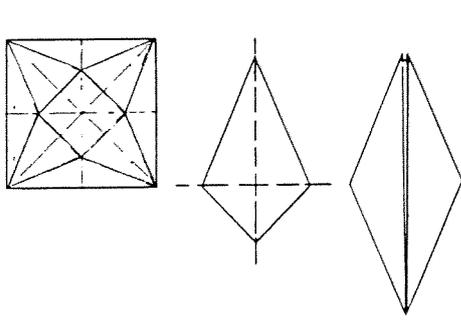


Figure 17

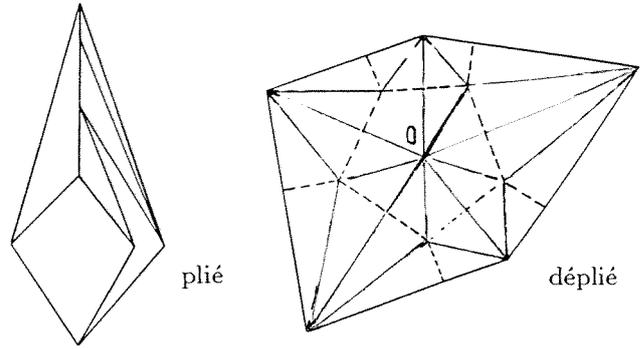


Figure 18

Les conditions géométriques, tant sur le polygone que sur le point de LOISEAU O sont assez restrictive. La figure 19 montre la détermination du point de Loiseau pour un quadrilatère en forme de cerf-volant.

Voici un exemple de propriété combinatoire rencontré en origami. (On ne s'étonnera pas de rencontrer des graphes qui ne sont autres que les plis du papier.)

Théorème : Soient un graphe complet non orienté fini dont les sommets seront appelés $1, 2, \dots, n$ et une partition de l'ensemble des arêtes en deux classes X et Y , telle que :

- a) $\forall i, j, k, q, 1 \leq i < j < k < q \leq n :$
 $ik \in X \text{ et } j \in X \Rightarrow ij \in X \text{ ou } jk \in X \text{ ou } kq \in X$
- b) $\forall i, 1 \leq i \leq n - 1 : i(i + 1) \in Y.$

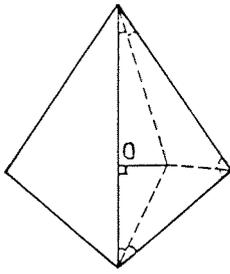
Alors il existe un sommet dont toutes les arêtes incidentes appartiennent à Y .

Tout ce qui précède conduit à envisager la possibilité d'une théorie mathématique du pliage, qui pourrait comporter trois chapitres, l'un sur les déformations générales d'une feuille de papier, le second concernant le pliage où le papier reste plan par morceaux mais donne une forme à trois dimensions. Le troisième serait la particularisation au pliage à plat, en voici une ébauche :

Plier un papier à plat se traduit par des déplacements dans le plan des diverses parties de la feuille et par certaines superpositions de couches de papier. Cela amène la définition suivante :

Un c -réseau (c pour crease : pli marqué) est la figure consistant en un domaine D (la feuille) du plan P limité par une ou plusieurs courbes de JORDAN, un ensemble N de points (les nœuds) intérieurs à D , un ensemble C de segments (les plis) ouverts, disjoints, inclus dans D , dont les extrémités sont des nœuds ou des points du contour. Tout nœud est l'extrémité d'un nombre pair non nul de plis.

La question est : à quelles conditions la feuille D peut-elle être pliée selon les plis de C ? On peut même demander : pour quels choix du sens (vallée ou montagne) donné aux plis le pliage est-il possible? Il est entendu que C correspond aux seuls plis qui existent dans le pliage réalisé et pas à ceux qui peuvent apparaître et disparaître au cours des opérations de pliage.



Appelons c -faces les parties connexes de D délimitées par les plis. Si l'on plie en laissant fixe une c -face, disons f_1 , les déplacements subis par les autres faces se traduisent par une application continue $\mu : \overline{D} \rightarrow P$ définie ainsi : soit f une face, soient c_1, \dots, c_t les plis traversés par un chemin allant de f_1 à f et soient σ_i les symétries axiales associées à ces plis. Alors
$$\mu|f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_t|f.$$

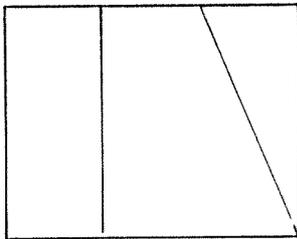
Figure 19

Une condition nécessaire et suffisante de cohérence est que pour tout circuit tracé sur D les symétries associées aux plis rencontrés satisfassent $\prod \sigma_i = 1$. Si le papier n'a pas de trous (D simplement connexe) cette condition se réduit à :

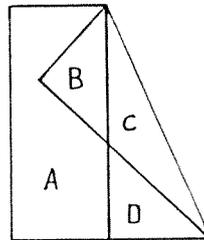
$$\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} = \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n = \pi,$$

γ_i désignant les angles formés par les plis issus d'un nœud quelconque.

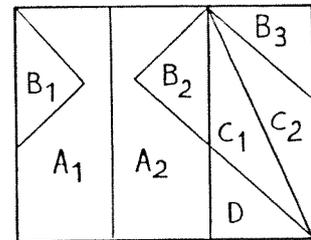
L'image par μ du c -réseau est appelée f -réseau (*f pour folded : plié*). Elle représente le pliage en supposant le papier translucide. L'image inverse du f -réseau est le s -réseau (*s pour superposition*). C'est un raffinement du c -réseau. Les figures 20, 21 et 22 représentent ces trois réseaux dans un cas très simple.



c -réseau



f -réseau



s -réseau

Figure 20

Figure 21

Figure 22

On peut imaginer qu'on réalise le pliage en découpant les s -faces, en les empilant de façon à former le f -réseau, puis en les raccordant avec du ruban adhésif pour reconstituer la continuité de la feuille de papier. Cela ne sera possible que si ces rubans ne se traversent pas. Cela revient à dire qu'on a muni l'ensemble des s -faces d'un ordre partiel qui doit satisfaire certaines conditions combinatoires de non-croisement. Il est conjecturé que, si le papier n'a pas de trou, le pliage est possible si ces conditions sont satisfaites.

Si le papier a des trous, les conditions de non-croisement ne sont pas suffisantes. Par exemple, une rondelle perforée au centre ne pourra jamais faire un nœud non trivial, ni devenir un ruban torsadé. Une conjecture générale, énoncée de façon imagée, pourrait être :

Conjecture : Un pliage est possible s'il est possible en supposant que le papier devient provisoirement élastique au cours de la déformation.

Cette conjecture, qui correspond à l'intuition des plieurs, est rendue plausible par le fait que l'élasticité du papier peut être en partie simulée par du pliage en accordéon. Elle a été prouvée dans des cas simples : pliage d'une planche de $m \times n$ timbres-poste, pliage d'un nœud unique. Dans ce dernier cas une formule simple permet de déterminer tous les sens, vallées et montagnes, possibles pour les plis.

3. Revenons au cas du pliage d'un seul nœud. La théorie en a été complètement élucidée. Nous avons vu que la condition géométrique est simple : la somme des angles de 2 en 2 vaut π . Cette condition exige bien entendu que les plis soient en nombre pair. Soient, comme dans l'exemple, $c_1 c_2 \dots c_6$ ceux-ci. La condition topologique s'exprime ainsi : écrivons les plis à la suite : $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$. Alors il existe un système de parenthèse qu'on peut déterminer connaissant les angles entre les plis et qui conduit à une équation symbolique. Celle-ci indique les diverses façons de choisir vallée ou montagne pour les plis. Dans cet exemple, on voit qu'il y a $8 = 2 \times 2 \times 2$ choix possibles.

L'équation ci-dessus paraît mystérieuse mais elle ne fait que traduire une technique de pliage du nœud. Dans la figure 23, le plus petit angle est α_2 entre c_2 et c_3 . Ces deux plis seront donc, l'un vallée, l'autre montagne. On peut donc imaginer de les plier puis de coller les 3 épaisseurs de papier, d'où une nouvelle face fictive qui va de c_1 à c_4 , et on recommence.

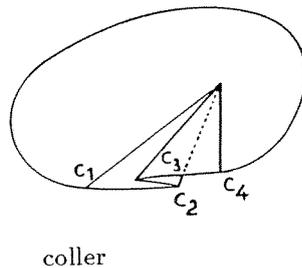
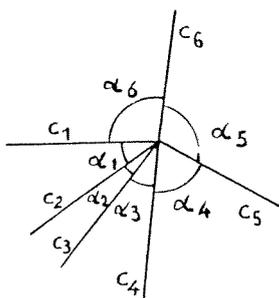
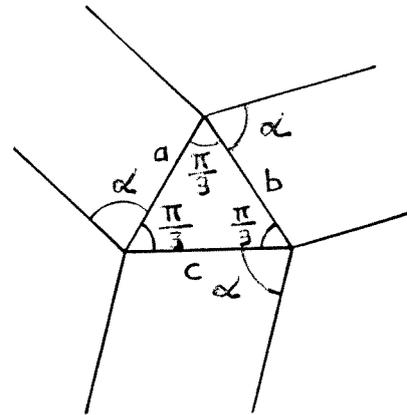


Figure 23



$$\begin{aligned} \alpha \leq \frac{\pi}{6} & : \text{ possible } a, b, c \text{ libres.} \\ \frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{3} & : \text{ possible } a, b, c \text{ non tous de même sens.} \\ \frac{\pi}{3} < \alpha \leq \frac{\pi}{2} & : \text{ impossible.} \end{aligned}$$

Figure 24

Dans le cas de cet exemple on arrive à la condition topologique

$$(c_1(c_2c_3)c_4)c_5c_6 = \pm 2$$

qui signifie :

c_1 et c_4 sont de sens différents; c_2 et c_3 sont de sens différents;
 c_5 et c_6 sont de même sens.

La figure 24 est un exemple de pliage vissé comportant trois nœuds formant un triangle équilatéral. Pour son étude mathématique, voir la page précédente.

V.— DANS L'ESPACE

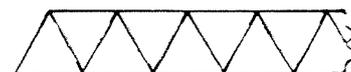
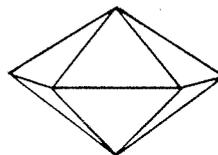
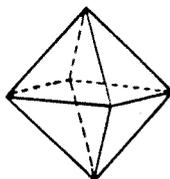
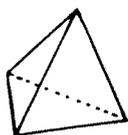
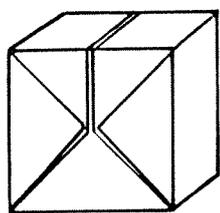
Le pliage ne se limite pas à la réalisation d'objets plats. Restant dans le cadre où les plis sont rectilignes et où le papier reste plan par morceaux, nous allons évoquer la construction des polyèdres. La plupart des plieurs créatifs ne sont essayés à plier des polyèdres, réguliers, partiellement réguliers, ou intéressants d'un autre point de vue. Certains sont devenus des spécialistes.

1. On peut d'abord procéder par pliage pur à partir d'une feuille unique. Tous les polyèdres de PLATON, et bien d'autres, ont été réalisés, à commencer par la classique bombe à eau ou marmite qui n'est autre que le cube. Citons seulement le Jackstone ou étoile du matin spectaculaire tant par la technique que par le résultat (figure 25).

2. Il est très courant aussi de procéder par assemblage de modules qui sont des éléments simples pliés que l'on emboîte.

3. J. PEDERSEN a utilisé le tressage de longues bandes rectilignes. Des problèmes concernant les symétries de ces assemblages de bandes peuvent se poser. Ils ont surtout été étudiés pour le tressage des bandes dans le plan (figures 26 et 27).

On peut aussi utiliser des bandes de forme plus compliquée (figure 28).



30+1

Figure 25

Figure 26

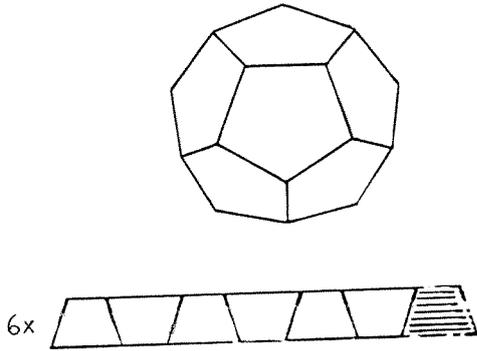


Figure 27

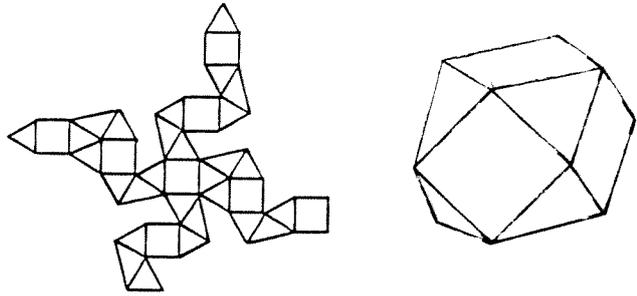


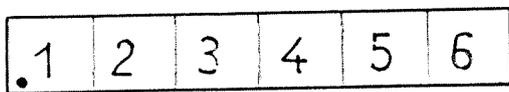
Figure 28

4. Enfin, la méthode la plus simple consiste à dessiner sur un papier ou carton la surface développée du polyèdre et à former celui-ci par découpage et collage. C'est en fait la plus utile pour le mathématicien puisqu'elle permet de construire à peu de frais des modèles géométriques ou topologiques intéressants. Voir par exemple la surface de BOY ou le polyèdre flexible de STEPHEN.

VI. PLIAGES DE BANDES

1. Le pliage des timbres qui é été évoqué plus haut est un problème assez ancien. Le nombre $P(n)$ de façons de superposer les n timbres d'une bande, par pliage selon les perforations, peut s'obtenir par des formules de récurrence compliquées. Les conditions de non-croisement auxquelles satisfont les permutations des timbres correspondant aux pliages possibles sont analogues à celles qui régissent l'usage des parenthèses ou les lois de simplification dans le groupe libre. Par diverses méthodes, notamment en concaténant des pliages convenablement choisis, il a été montré que $P(n)$ est de l'ordre de a^n avec a compris entre 3,3868 et 3,6102. Il semble que le sujet soit loin d'être épuisé.

Un exemple d'opération possible : faire passer dessous le timbre du dessus (figure 29). A partir du pliage 356412 on peut comprendre le principe d'association de parenthèse (figure 30).



356412



564123

Figure 29

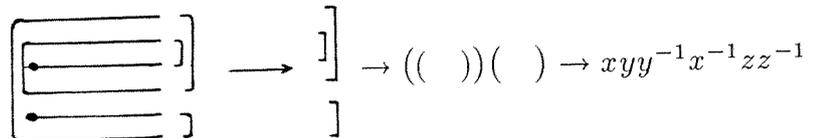


Figure 30

Si on fixe le sens relatif des plis, alors l'évaluation est plus facile et est déterminée de façon exacte dans plusieurs cas comme ceux de la figure 31.

2. Si l'on plie une longue bande en deux, puis encore en deux un certain nombre de fois, et qu'on déplie, on obtient une configuration intéressante (figure 32). On peut imaginer faire systématiquement des plis vallés mais une fois dépliée il apparaîtra des plis vallées et des plis montagnes. Si on note 0 un pli vallée et 1 un pli montagne, à un pliage indéfiniment continué on peut associer le développement en base deux d'un nombre qu'on démontre être transcendant. On peut passer d'une étape à la suivante en intercallant alternativement un pli V et un pli M dans les plis déjà obtenus.

Quand on plie la bande plusieurs fois de suite, on n'est pas obligé de travailler toujours dans le même sens. Dans tous les cas, si on déplie en partie de manière à ce que tous les plis soient à angle droit on obtient une *courbe du dragon* qui ne se croise jamais et qui remplit tout un quadrillage (figures 33 et 34).

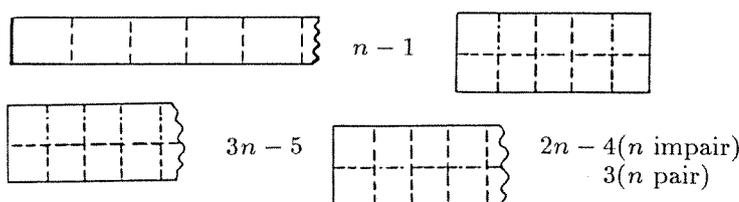


Figure 31

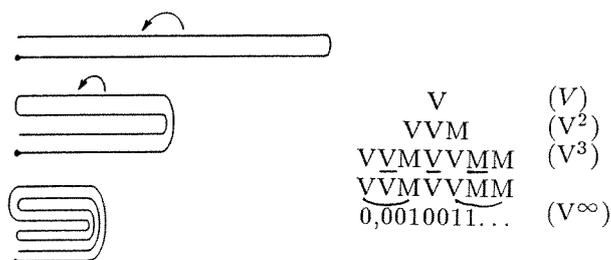


Figure 32

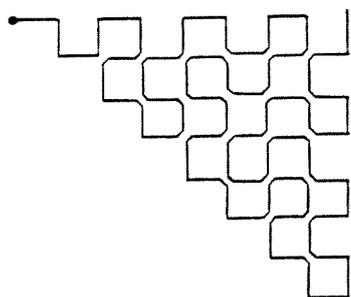


Figure 33

Aspect semi-déplié d'un pliage alternativement vallée et montagne (trois fois) (c'est un quadrillage triangulaire).

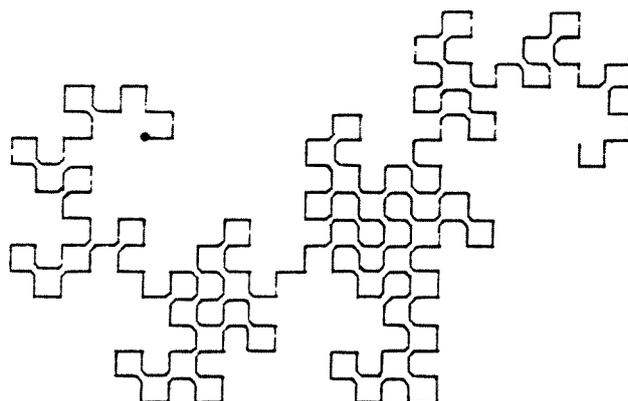


Figure 34

Aspect semi-déplié d'un pliage systématiquement vallée (sept fois).

L'étude des courbes du dragon présente des liens avec : les systèmes de numération, les suites arithmétiques, les nombres transcendants, la théorie des automates, la théorie des courbes planes.

VII.— LES FLEXAGONES

Voici pour terminer un sujet populaire parmi les plieurs et qui relève des mathématiques par ses inventeurs et par la théorie qui en a été faite : les flexagones. Ce sont des gadgets en papier plié qui, lorsqu'on les manipule, révèlent de nouvelles faces tandis que celles qui étaient visibles disparaissent. Le plus simple se fait avec une bande de dix triangles équilatéraux (figure 35) qu'on plie pour avoir l'hexagone de la figure 36. Celui-ci est constitué de six *tas* qui sont des empilements de un ou deux triangles comme indiqué par les chiffres (les deux triangles numérotés 1 doivent être collés ensemble). Dans les flexagones compliqués, les tas contiennent beaucoup plus de triangles. La manipulation consiste à pincer selon trois rayons et à faire basculer comme indiqué par les flèches, ce qui échange des triangles entre les tas et fait apparaître une nouvelle face. La théorie représente un flexagone par un couple de *tas abstraits* qui sont certaines permutations d'entiers, ou même, en poussant un peu plus l'abstraction, des arborescences binaires. Cette théorie permet de construire les flexagones, de les dénombrer et de décrire leur fonctionnement.

Il existe un autre façon de représenter les flexagones. Soit (figure 37) un polygone convexe partitionné en triangles par des diagonales. Tout flexagone peut être représenté de cette façon. Les sommets A, B, \dots représentent les faces. Les côtés des triangles représentent les diverses configurations (paire de faces visibles en dessus et en dessous) du flexagone et la ligne en pointillé indique les diverses façons de parcourir l'ensemble des configurations. Réciproquement tout polygone ainsi triangulé décrit le fonctionnement d'un flexagone.

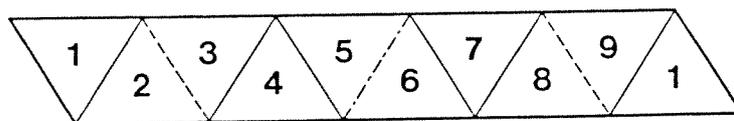


Figure 35

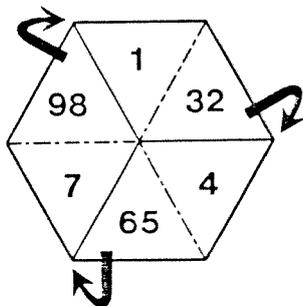


Figure 36

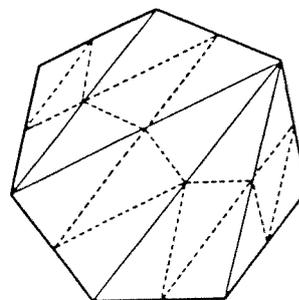


Figure 37