RÉPONSE A UNE QUESTION DE R. SEROUL

FORMULES A LA MACHIN

(suite)

Eric KERN

N.D.L.R. : A la fin de son article "*Formules à la* MACHIN " ("*L'Ouvert*" n°45), R. SEROUL posait la question : "*La formule des entiers indécomposables est-elle libre sur* **Q**?" Nous avons reçu la réponse suivante de E. KERN :

PROPOSITION. — *Soit $n \geq 2$ un entier indécomposable. Il n'existe pas de relation de la forme*

$$(M_1) \qquad s \operatorname{Arctg}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \operatorname{Arctg}(i)$$

avec $s \geq 1$ entier et $c_i \in \mathbf{Z}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. En particulier, la famille composée de $\operatorname{Arctg}(1)$ *et des* $\operatorname{Arctg}(r)$*, où r parcourt l'ensemble des entiers indécomposables ≥ 2 est* **Q***-libre.*

DÉMONSTRATION.— Posons

$$(1+in)^s = \alpha_s + i\beta_s.$$

Si $\alpha_s = 0$, multiplions la relation (M_1) par 2, ce qui ne change rien au problème. Cela donne

$$(1+in)^{25} = [(1+in)^s]^2 = (i\beta_s)^2 = -\beta_s^2.$$

Par conséquent $\alpha_{2s} = -\beta_s^2 \neq 0$. Il résulte de cela que l'on peut supposer $\alpha_s \neq 0$.

En procédant comme dans "*L'Ouvert*" n°45, page 15, nous pouvons écrire

$$\big(1+i\big)^{c_1}\big(1+2i\big)^{c_2}\cdots\big(1+(n-1)i\big)^{c_{n-1}} = \frac{a+ib}{u+iv}$$

$$\big(1+i\big)^{|c_1|}\big(1+2i\big)^{|c_2|}\cdots\big(1+(n-1)i\big)^{|c_{n-1}|} = (a+bi)(u+iv).$$

La formule (M_1) montre que $(1+in)^s$ et $\big(1+i\big)^{c_1}\ldots\big(1+(n-1)\big)^{c_{n-1}}$ ont même argument. Il en résulte que $(a+ib)/(u+iv)(1+in)^s$ est un nombre réel. Après un bref calcul, on obtient

$$(*) \qquad \alpha_s^2\big(1+1^2\big)^{|c_1|}\cdots\big(1+(n-1)^2\big)^{|c_{n-1}|} = (au+bv)^2(1+n^2)^s.$$

Comme $n \geq 2$ est supposé indécomposable, il existe un nombre premier p qui divise $1 + n^2$ mais qui ne divise aucun des $1 + k^2$ pour $1 \leq k < n$. Il résulte de (*) que p divise α_s. Mais on a

$$\alpha_s = 1 - \binom{s}{2} n^2 + \binom{s}{4} n^4 - \binom{s}{6} n^6 + \cdots$$

Sachant que $n^2 \equiv -1$ *mod p*, on a *mod p*

$$\begin{aligned} \alpha_s &\equiv 0 \\ &\equiv 1 + \binom{s}{2} + \binom{s}{4} + \binom{s}{6} + \cdots \\ &\equiv 2^{s-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, p divise $2^{s-1} \geq 2$, ce qui exige $p = 2$. Cette dernière conclusion est absurde, car p divise $1 + k^2$ pour $k = 1$.

Soit $\left(\mathrm{Arctg}(n_\alpha)\right)_{\alpha \geq 1}$ la famille formée de 1 et des indécomposables, rangés dans l'ordre croissant. Cette famille est **Q**-libre. Pour montrer cela, supposons que l'on ait

$$c_1 \,\mathrm{Arctg}(n_1) + \cdots + c_k \,\mathrm{Arctg}(n_k) = 0,$$

avec $c_k \neq 0$ et $c_i \in \mathbf{Z}$. Puisque n_k est indécomposable, on ne peut pas avoir $|c_k| = 1$ (cela fournirait une formule *à la* MACHIN). Mais on ne peut pas avoir non plus $|c_k| > 1$, car cela fournirait une formule du type (M_1).

REMARQUE.— Cette démonstration montre aussi que TODD a raison lorsqu'il affirme que l'on n'obtient rien de 'nouveau' en prenant des c_i rationnels pour définir une formule *à la* MACHIN. En effet, soit n un entier décomposable. Il fournit donc une formule

$$(M) \qquad \mathrm{Arctg}(n) = \sum_{n_\alpha < n} k_\alpha \,\mathrm{Arctg}(n_\alpha)$$

où les k_α sont des entiers. Supposons d'autre part que l'on ait

$$\mathrm{Arctg}(n) = \sum_{n_\alpha < n} c_\alpha \,\mathrm{Arctg}(n_\alpha)$$

Retranchons ces deux égalités. Il vient

$$0 = \sum_{n_\alpha < n} (k_\alpha - c_\alpha) \,\mathrm{Arctg}(n_\alpha).$$

Vu l'indépendance linéaire des $\mathrm{Arctg}(n_\alpha)$, on a $c_\alpha = k_\alpha$.