UN POLYÈDRE UTILE EN MÉTALLURGIE

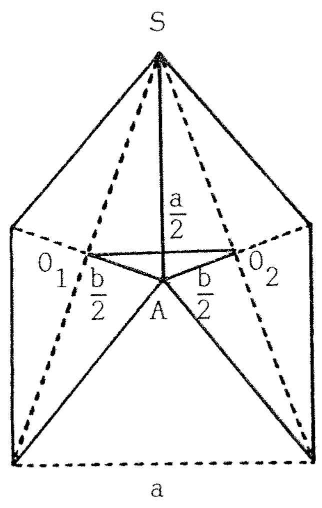
Eugène EHRHART

En novembre 1986 cinq chercheurs du groupe Péchiney ont publié dans la revue scientifique anglaise '*Nature*' un article intitulé '*Large $A_lC_uL_i$ simple quasi-crystals*'. Ils y annoncent la première élaboration directe de mono-quasi-cristaux massifs, laissant prévoir des retombées industrielles importantes pour la mise au point et l'utilisation d'alliages dans les domaines aéronautique, informatique et électronique.

Découvert il y a seulement deux ans, le quasi-cristal a une morphologie intéressante, défiant toutes les lois de la cristallographie : c'est un **triacontaèdre rhombique**, c'est-à-dire un polyèdre convexe dont les 30 faces sont des losanges égaux. Ses 60 arêtes sont donc égales et il a 32 sommets.

Mathématiquement, ce polyèdre remarquable pose trois problèmes : préciser la forme du losange facial, prouver l'existence du triacontaèdre en le construisant, indiquer ses principales propriétés.

1. Forme du losange facial.



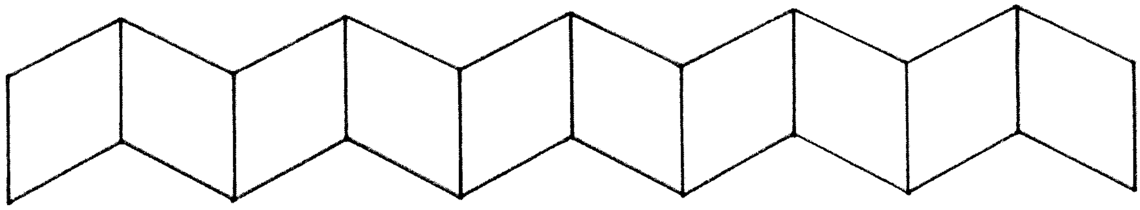
Appelons L tout losange dont la grande et la petite diagonale ont pour longueurs respectives a et b. Considérons une corolle de sommet S, dont les cinq pétales sont des L adjacents. On peut placer entre deux pétales consécutifs L_1 et L_2 un nouveau losange L, si la distance de leurs sommets libres est **a** et donc la distance de leurs centres $O_1O_2 = a/2$. Soit SA le côté commun de L_1 et L_2. Comme les petites diagonales des pétales forment un pentagone régulier, un angle à la base du triangle isocèle $A\ O_1O_2$ vaut $\pi/5$.

Donc **le rapport des diagonales du losange est le 'nombre d'or'** :

$$\frac{a}{b} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62.$$

2. Construction du polyèdre.

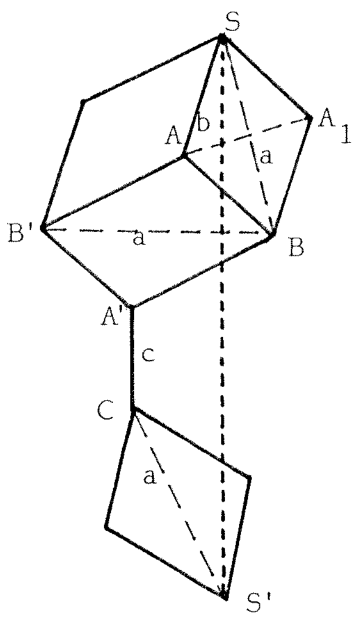
En intercalant entre chaque couple de pétales consécutifs de la corolle un nouveau losange L, on forme une coupole de 10 losanges. A deux telles coupoles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de sommets S et S' donnons le même axe vertical SS', leurs concavités se faisant face. Nous allons montrer qu'on peut les relier par une couronne d'axe SS', formée par 10 losanges L adjacents, telle que son développement plan ait la forme suivante :

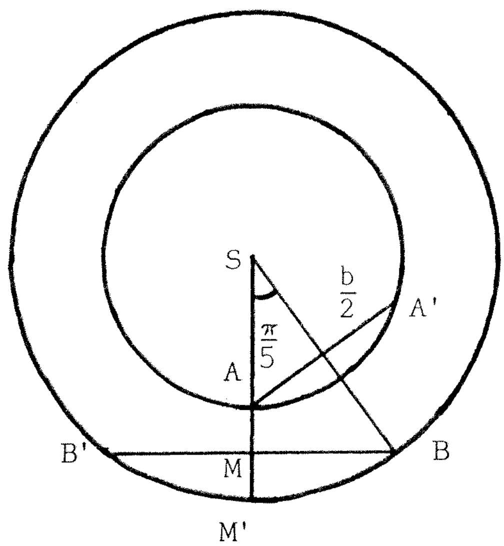


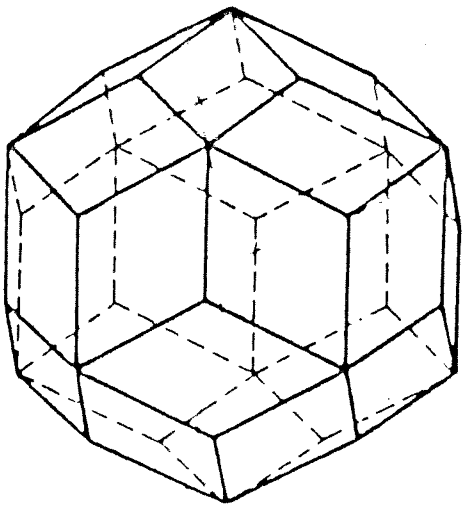
Soit SA une arête de $\mathcal{C}$ et $ABA'B'$ le losange intercalaire correspondant. Amenons par rotation autour de SS' la diagonale $S'C$ dun pétale de $\mathcal{C}'$ dans la plan vertical passant par SA. Nous montrerons plus loin que $A'C$ est vertical et nous le rendrons égal au côté c des losanges L. Par raison de symétrie tout segment joignant un sommet du bord de $\mathcal{C}$ au sommet du bord de $\mathcal{C}'$ situé en face de lui sera alors également vertical et égal à c : les deux coupoles composent donc bien avec la couronne qui les joint un triacontaèdre rhombique.

Démontrer que $A'C$ est vertical revient à montrer que A' et C ou, cela est équivalent, A' et B ont même distance à l'axe SS'. La diagonale $BB' = a$ est le côté d'un pentagone régulier d'axe SS', de même que $AA_1 = b$. Projetons parallèlement à SS' sur un plan horizontal, en conservant la même lettre pour désigner un point et sa projection. Dans la figure obtenue les rayons des cercles de centre S passant respectivement par B ou A sont

$$R = SB = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}} \quad et \quad r = SA = \frac{b}{2\sin\frac{\pi}{5}}.$$







Pour que $A'S = BS$, il suffit que A' coïncide avec M', donc que $AM = MM'$:

$$SM - r = R - SM$$
$$2SM = R + r$$

ou successivement, car $SM = \frac{a}{2tg\frac{\pi}{5}}$,

$$\frac{a}{tg\frac{\pi}{5}} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}} + \frac{b}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$
$$2\cos\frac{\pi}{5} = 1 + \frac{b}{a}$$
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

qui est bien vérifié.

3. Propriétés du polyèdre.

Par simple observation d'un modèle matériel, on voit que ce polyèdre esthétique a 12 sommets **s** à cinq branches et 20 sommets **s'** à trois branches (chaque **s** est centre d'une corolle C à 5 pétales, chaque **s'** centre d'une corolle C' à 3 pétales). Les **s** sont situés sur une sphère, les **s'** sur une sphère concentrique plus petite. On observe aussi que le polyèdre a :
— **un centre de symétrie** O;
— **15 axes de symétrie**, chacun reliant les centres de deux faces opposées;
— **10 axes de rotation à** $2\pi/3$, chacun reliant deux **s'** opposés;
— **6 axes de rotation à** $2\pi/5$, chacun reliant deux **s** opposés.

En géométrie le triacontaèdre rhombique est classique. On sait l'obtenir par **troncature du dodécaèdre ou de l'icosaèdre réguliers** (*). Une transformation par polaires réciproques de centre O montre **sa dualité avec l'icosidodécaèdre**, un solide semi-régulier d'ARCHIMÈDE à 32 faces (20 triangles équilatéraux égaux et 12 pentagones réguliers égaux), 30 sommets (dont chacun a quatre branches) et 60 arêtes égales.

Remarques.

1) A propos de **polyèdres convexes à arêtes toutes égales**, Jean LEFORT me signale qu'il y en a avec un nombre d'arêtes arbitrairement grand : prismes dont les côtés de la base sont égaux aux arêtes latérales.

2) Il existe aussi un **dodécaèdre rhombique**. Ses 12 faces sont des losanges

(*) Voir par exemple Alan HOLDEN, '*Formes, espace et symétrie*' (Cédic, 1977).

égaux, dont l'angle aïgu est de 70°32'. Il a 24 arêtes égales et 14 sommets. **Son dual est le cuboctaèdre**, autre solide semi-régulier d' ARCHIMÈDE, dont les faces sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux; il a naturellement aussi 24 arêtes, toutes égales.

PETITE ANNONCE

L'I.R.E.M. propose au **P**lan **A**cadémique de **F**ormation pour l'année 1987—1988 un groupe de travail sur

L'examen critique de logiciels (didacticiels) de mathématique
en 2^{nde} et $1^{ère}$.

Si vous êtes intéressé(e) par ce travail, n'oubliez pas de vous inscrire (avant le 30 juin) à la Mission Académique, par l'intermédiaire de votre chef d'établissement!

ENSEIGNANTS DE COLLÈGE

Un nouveau bulletin inter-I.R.E.M. premier cycle est disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M. :

"SUIVI SCIENTIFIQUE 1985 - 1986"
Nouveaux programmes de sixième
270 pages 35.– F

De quoi vous donner plein d'idées nouvelles pour vos classes de 6^e en attendant la parution du tome consacré à la 5^e.