TOUTE FONCTION DÉRIVABLE EST L'INTÉGRALE DE SA DÉRIVÉE

Michel EMERY

Il est toujours fascinant d'assister à la diffusion d'une idée nouvelle : d'abord, pendant assez longtemps, connue seulement d'un petit nombre, la nouveauté paraît ne gagner que lentement, jusqu'au point où elle semble, presque instantanément, conquérir de façon explosive la grande masse. Le non-standard a fourni il y a dix ans un exemple d'une telle explosion; les intégrales de RIEMANN généralisées vont probablement en fournir un autre.

Ces intégrales ont fait leur apparition à Strasbourg durant l'hiver 1985/1986, à l'occasion d'une conférence donnée par le Professeur Jean MAWHIN (Université de Louvain). Il s'agit d'un procédé d'intégration très simple, inventé en 1957 par le tchécoslovaque J. KURZWEIL, et qui se trouve être, en fin de compte, très puissant (équivalent à l'intégrale de PERRON).

Soit $[a,b]$ un intervalle compact, avec $a < b$. On désigne par *partition de* RIEMANN de $[a,b]$ la donnée d'un entier $n \geq 1$, de $n+1$ nombres

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

et de n nombres $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Si σ est une telle partition de RIEMANN et f une fonction sur $[a,b]$, on appelle *somme de* RIEMANN le nombre

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Rappelons que l'intégrale de RIEMANN de f est le nombre I, s'il existe, caractérisé par la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute partition de RIEMANN σ de pas $|\sigma| = \sup_i (t_i - t_{i-1})$ plus petit que δ, on ait $|I - S(f,\sigma)| < \epsilon$. L'idée géniale de KURZWEIL est de faire varier δ en fonction de x_i.

DÉFINITIONS.

1°) *Soit δ une fonction strictement positive sur $[a,b]$. On dit que la partition de* RIEMANN *σ est contrôlée par δ si, pour tout i, on a*

$$[t_{i-1}, t_i] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)].$$

2°) *Soient f une fonction sur $[a,b]$ et I un nombre. On dit que I est l'intégrale de f si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\delta > 0$ sur $[a,b]$ telle que, pour toute partition de* RIEMANN *σ contrôlée par δ, on ait*

$$|I - S(f,\sigma)| < \epsilon.$$

Cette définition n'a d'intérêt que par la remarque suivante, sans laquelle tout nombre serait l'intégrale de toute fonction!

LEMME.— *Soit δ une fonction strictement positive sur $[a,b]$. Il existe une partition de* RIEMANN *contrôlée par δ.*

Démonstration.
Soit E l'ensemble des réels c de $]a,b]$ tels qu'il existe une partition de RIEMANN de $[a,c]$ contrôlée par δ (ou, plus exactement, par la restriction de δ à $[a,c]$). Cet ensemble E n'est pas vide, car il contient les c assez proches de a pour que $c-a \leq \delta(a)$. Il admet donc une borne supérieure s. Puisque E contient un élément d dans $[s-\delta(s),s]$, il est facile de voir que s est dans E (en rajoutant si nécessaire l'intervalle $[d,s]$ à la partition de $[a,d]$), et que $s=b$ (sinon, en rajoutant encore l'intervalle $[s, inf(b, s+\delta(s))]$, on verrait que s n'est pas la borne supérieure de E). Donc b est dans E.

Ce lemme donne un sens à la définition, et permet de montrer immédiatement l'unicité de l'intégrale I (quand elle existe). Il est aussi très facile de vérifier que les fonctions qui admettent une intégrale forment un espace vectoriel, que l'intégrale est linéaire et positive, et vérifie la relation de CHASLES $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.

En outre, en considérant des fonctions δ constantes, on constate que cette intégrale généralise celle de RIEMANN (si f a une intégrale de RIEMANN, celle-ci est son intégrale). En réalité, ce procédé est même plus général que l'intégrale de LEBESGUE : on peut montrer que f est intégrable au sens de LEBESGUE sur $[a,b]$ si et seulement si f et $|f|$ ont toutes deux une intégrale. Je ne vais pas le faire ici, me contentant de trois remarques.

Premièrement, il n'est pas difficile de vérifier que ce procédé d'intégration généralise strictement celui de RIEMANN. L'exemple classique de fonction intégrable pour LEBESGUE mais pas pour RIEMANN est la fonction de DIRICHLET qui vaut 1 aux points rationnels et 0 aux points irrationnels. Je laisse au lecteur l'exercice amusant et instructif consistant à vérifier que l'intégrale de cette fonction est nulle.

Deuxièmement, il est des fonctions que l'on a bien envie d'intégrer, mais qui ne sont pas prises en compte par la théorie de LEBESGUE : les fonctions dérivées. Par exemple si $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, avec $f(0) = 0$, la fonction f est dérivable sur $[-1,1]$, mais sa dérivée f' possède en 0 une singularité suffisante pour que $\int_{-1}^1 |f'(x)|dx = +\infty$; donc f' n'est pas intégrable pour LEBESGUE.

Bien sûr, des théories sophistiquées (DENJOY, PERRON) permettent d'intégrer toute fonction dérivée. Mais ce qui est remarquable, avec cette "nouvelle" théorie (elle frise quand même la trentaine!), c'est la dérisoire facilité avec laquelle elle parvient à ce résultat.

THÉORÈME.— *Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$. Sa dérivée f' admet une intégrale, qui n'est autre que $f(b)-f(a)$.*

Démonstration.
Soit $\epsilon > 0$. Pour $u \in [a,b]$, il existe $\delta(u) > 0$ tel que $0 < |v-u| \leq \delta(u)$ entraîne

$$\left|\frac{f(v)-f(u)}{v-u} - f'(u)\right| \leq \epsilon \;;$$

c'est la définition de $f'(u)$.

Soit σ une subdivision contrôlée par la fonction δ ainsi construite. On peut écrire

$$|f(t_i) - f(x_i) - (t_i - x_i)f'(x_i)| \leq (t_i - x_i)\,\epsilon$$

car $0 \leq t_i - x_i \leq \delta(x_i)$, et

$$|f(x_i) - f(t_{i-1}) - (x_i - t_{i-1})f'(x_i)| \leq (x_i - t_{i-1})\,\epsilon$$

car $0 \leq x_i - t_{i-1} \leq \delta(x_i)$.
Par addition, on obtient

$$|f(t_i) - f(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})f(x_i)| \leq (t_i - t_{i-1})\,\epsilon,$$

et donc

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a) - S(f',\sigma)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}[f(t_i) - f(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})f'(x_i)]\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\,\epsilon = (b-a)\,\epsilon. \end{aligned}$$

Le théorème est démontré.

Enfin, je voudrais faire observer combien cette modification de la définition de RIEMANN est naturelle. Lorsqu'on fait calculer numériquement par une machine l'intégrale d'une fonction qui présente des singularités, on est amené à utiliser des subdivisions à pas variable, qui deviennent plus fines dans les régions où la fonction est moins régulière. C'est exactement ce que fait le procédé de KURZWEIL : au lieu d'utiliser, comme RIEMANN, les mêmes subdivisions pour toutes les fonctions, il autorise, par l'intermédiaire des fonctions δ, un choix des subdivisions adapté à la fonction à intégrer. La définition de RIEMANN, avec des fonctions δ constantes, marche bien pour les fonctions continues parce qu'elles sont uniformément continues.

Espérant avoir suffisamment éveillé la curiosité du lecteur, je n'en dirai pas plus. Il trouvera des démonstrations élémentaires des propriétés de convergence monotone ou dominée dans l'article de E. J. McSHANE (*Amer. Math. Monthly*, Avril 1973; n'imposant pas la condition $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, McSHANE obtient une intégrale un peu moins générale, qui se trouve équivaloir à celle de LEBESGUE). Enfin, des références bibliographiques sur la question figurent à la fin de l'article de S. LEADER (*Amer. Math. Monthly*, Mai 1986; plus difficile à lire, mais une bibliographie nombreuse).