Eléments de Psychologie pour l'Apprentissage des Mathématiques

* *

*

par Jean-Paul FISCHER - Ecole Normale Montigny-lès-Metz
Publication : IREM de Strasbourg - 10, rue du Gal Zimmer
67084 - STRASBOURG CEDEX

Brochure S125 - 1986.

Note et Remerciements

Le présent texte est - à quelques détails près - la reproduction d'un cours que j'ai eu l'occasion de faire dans le cadre du D.E.A de Didactique des Mathématiques à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg durant l'année universitaire 1985/86.

Qu'il me soit permis de remercier :

- Claire **DUPUIS**, qui a encouragé et favorisé l' "édition" de ce cours;
- Claude **DESCHAMPS**, qui y a supprimé quelques fautes d'orthographe;
- Evelyne **LE GUYADER**, Marie-France **BIECHEL**, Alain **BECHTEL** qui se sont occupés du tirage.

Décembre, 1986

L'auteur.

SOMMAIRE

* *

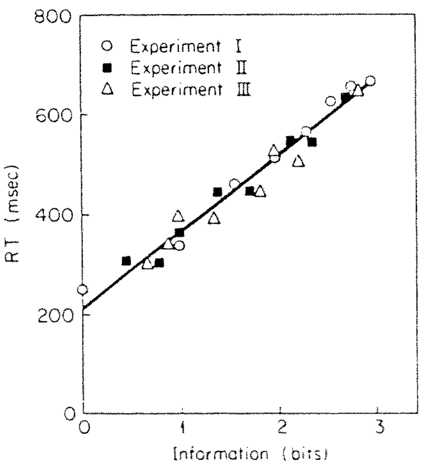
*

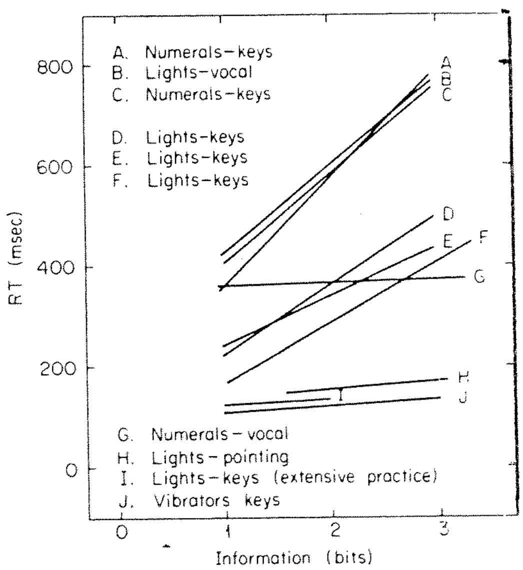
La théorie du traitement de l'information.

1. Origines

1.1. A la fin de la deuxième guerre mondiale et avec l'apparition des premiers ordinateurs, se développe aussi la théorie psychologique du traitement de l'information.

Quelques premiers résultats prometteurs suggéraient que le Temps de Réaction (TR: temps qui s'écoule entre la présentation d'un stimulus et la réponse à ce stimulus) est une fonction linéaire du nombre de bits à transmettre (voir figure gauche ci-dessous).





(figures photocopiées dans Posner, 1978)

Mais ces résultats prometteurs n'ont guère été confirmés (voir figure droite ci-dessus).

C'est donc plutôt une synthèse un peu provocatrice de Miller (1956) qui est considérée comme marquant l'entrée de la théorie de l'information en psychologie cognitive. Cet article rompait en effet avec la théorie psychologique alors prépondérante (du moins au Etats-Unis) : le behaviorisme. Ce dernier est dès lors, et de plus en plus, considéré comme un cadre trop étroit pour approcher les phénomènes humains.

1.2. L'article de Miller rassemble un certain nombre d'expériences d' «estimations absolues» : hauteur du son, intensité sonore, gustative,... et analyse la capacité du canal, i.e la valeur asymptotique vers laquelle tend la quantité d'information transmise lorsqu'on augmente l'information entrante. Cette analyse conduit Miller à la conclusion que les estimations unidimensionnelles sont limitées à 7 catégories environ (ce qui correspond à 2.8 bits: $2^{2.8} \approx 7$).

1.3. Miller rajoute aussi, même si elle n'a pas été analysée en termes d'information, l'expérience de Kaufman et al. (1949). Cette expérience a montré que des sujets adultes n'arrivaient à dénombrer que des collections de 6 points (ou moins), lorsqu'elles étaient brièvement exposées (200 ms). Prudemment, Miller précise que le fait que la limite de la capacité à embrasser une collection en un coup d'oeil se situe aussi à 6 ou 7 doit être vu comme une coïncidence.
Néanmoins, le rapprochement fait par Miller, et la popularité qu'a connue son article, ont contribué à faire pénétrer le nombre «magique» **7** jusque dans les milieux de l'enseignement, où l'on a pu parler d'appréhension **globale** des nombres jusqu'à 6 ou **7**.

1.4. Remarque sur cette valeur 7 et sur sa transposition didactique.
Un examen des recherches qui ont conduit à des valeurs autour de 7 montre que la plupart d'entre elles utilise comme critère 50% de réussites à un nombre pour estimer qu'il est appréhendé. Or si un processus d'appréhension du nombre ne conduisant qu'à 50% de résultats justes était utilisé par les élèves, on peut deviner les difficultés auxquelles se heurteraient les enseignants. Par exemple, si un enfant se trouve devant une collection de 9 fois 7 objets, et s'il n'a qu'une chance sur deux de "voir" qu'il y en a 7 dans chacune des 9 sous-collections, il aura moins de 2 chances sur 1000 d'arriver à trouver qu'il y en a 9 fois 7 !
Une autre conséquence de cette acceptation de 50% d'échecs dans certaines expériences est que, si l'on ne retient que celles qui exigent une appréhension exacte et sûre - sans comptage ni calcul - alors le "subitizing" se limite à 4, voire **3**.
En accord avec une telle limite j'ai trouvé que:
- au CP, seuls les enfants sachant par coeur "2 et 2, 4" subitisaient le nombre "quatre" d'une collection comme • • • •;
- à 5 ans, les réussites chutaient brutalement après 3: • • • a conduit à un taux de réussite de .90, alors que • • • • faisait chuter ce taux à .29.

1.5. La situation déjà complexe par le fait que nous avons deux limites à 7 qui ne correspondent probablement pas au même phénomène est encore complexifiée par le fait que la capacité de mémoire immédiate est (elle aussi !) limitée à 7 chunks (blocs d'information). Mais il ne s'agit pas là d'une quantité d'information fixe : par exemple, un nombre (à 1 chiffre en base dix) vaut 3.3 bits ($2^{3.3} \approx 10$). Or nous pouvons nous souvenir d'environ 8 nombres, soit 26 bits. Si cette quantité était fixe, nous arriverions à nous souvenir de 26 nombres (à 1 chiffre en base deux). Et c'est loin d'être le cas : nous n'arrivons guère qu'à 9 nombres binaires ! Comme 9 n'est pas très différent de 8, on peut même penser que la capacité de mémoire immédiate est quasi-indépendante du nombre de bits par bloc.

1.6. Pour remédier à la limitation de la capacité de mémoire immédiate, nous pouvons en conséquence augmenter le nombre de bits par bloc: ce processus s'appelle le recodage.
Exemple: Recodages d'une séquence de nombres binaires. Soit la séquence :

1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0. On peut la recoder ainsi:

2 par bloc :	2 2 0 2 1 3 0 3 2 ou
3 par bloc :	5 0 4 7 1 6

etc....

Le recodage est une arme extrêmement puissante pour augmenter la quantité d'information que nous pouvons traiter. Le plus courant est la traduction en un code verbal, probablement parce qu'elle est souvent automatique. Et pour être efficiente, la traduction doit être automatique (sinon il y a des interférences).

1.7. Illustrations/applications. La limitation de la capacité de mémoire immédiate ou celle de l'appréhension visuelle, et surtout la possibilité de l'accroître par le recodage peuvent recevoir d'intéressantes illustrations/applications didactiques. Je développerai succinctement 3 exemples:

1.7.1. L'appréhension rapide des nombres (par décomposition)

En limitant (sévèrement) le temps d'exposition d'une collection comme ••••••, on peut "obliger" les élèves de Cours Préparatoire à renoncer au comptage 1 par 1 et à passer par une décomposition additive du nombre. En effet, le comptage 1 à 1 est une procédure coûteuse en temps: les évaluations de Svenson et Sjöberg (voir Fischer, 1984) montrent que le comptage d'un objet supplémentaire demande plus d'une seconde à un élève de 7 ans, et l'évaluation globale est une procédure peu fiable. En conséquence, la décomposition en 2 collections de 3 (dont l'appréhension est "directe"), par exemple, est une procédure qui s'avérera bien meilleure.

1.7.2. L'écriture additive des nombres (en vue d'un traitement différé)

Un exemple d'activité est décrit en détail dans Fischer (1984, p.116-124).

1.7.3. L'introduction et l'utilisation des codages multiplicatifs

Pour faire apparaître 6x8 comme un codage (rapide) du nombre d'éléments d'une collection "rectangulaire" de 6 lignes de 8 objets, on peut là aussi limiter le temps d'exposition d'une collection comme celle ci-dessous :

2. L'étude des TR

La mesure des TR (Temps de Réaction), bien que très antérieure à la théorie du traitement de l'information, s'avère un outil très important pour cette dernière. Je donnerai quelques résultats relativement bien établis concernant l'arithmétique élémentaire, et j'aborderai ensuite l'intérêt, les problèmes et les perspectives qu'offre ou soulève l'étude des TR dans les classes.

2.1. Résultats dans le domaine de l' arithmétique élémentaire

2.1.1. Effets curieux

Effet de taille : il s'agit de l'effet le plus fondamental. Le TR croît lorsque les nombres impliqués dans le cacul deviennent plus grands. Les "doubles" constituent la seule exception notable à cette règle générale: vérifier 9+9=18 ne demande pas plus de temps que de vérifier 3+3=6 (d'après Stazyk et al., 1982);

Effet de distance symbolique : il faut plus de temps pour juger que 8 est plus grand que 7 que pour juger que 8 est plus grand que 3; il faut moins de temps pour repousser 4+3=11 que pour repousser 4+3=8;

Effet de conformité sémantique : il faut moins de temps pour trouver le plus petit de deux nombres que pour trouver le plus grand si les deux nombres sont petits (ex.: 2 et 3); et il faut moins de temps pour trouver le plus grand de deux nombres que le plus petit si les deux nombres sont grands (ex. : 8 et 9);

Effet d'interférence (Stroop): 4+3=12 est plus lente à juger que 4+3=9 (si on connaît les tables de multiplications!);

Effet de positivité : il faut plus de temps pour juger une égalité négative (4+3=6) que pour juger une égalité positive (4+3=7) si l'égalité négative n'est pas trop grossièrement fausse ! L'ordre de grandeur de la différence est 170 ms (pour les conditions précises, voir Ashcraft et Fierman, 1982).

2.1.2. Les modèles pour l'addition

Un résultat, curieux lui aussi, est que nous mettons quelques 20 ms de plus pour vérifier 4+3=7 que pour vérifier 4+2=6. Il a incité les psychologues - Groen et Parkman (1972) en premiers - à conclure que les additions, même les plus élémentaires, ne sont pas uniformément connues "par coeur" et à développer des modèles de l'addition expliquant de tels phénomènes. Le plus populaire de ces modèles est celui du MIN : d'après ce modèle, nous sélectionnons le plus grand des 2 nombres distincts (les doubles jouent un rôle à part: ils donnent des TR très inférieurs) à additionner, soit max(a,b); nous initialisons un compteur à max(a,b); puis nous incrémentons ce compteur 1 à 1 jusqu'à ce que le nombre d'incrémentations soit égal à min(a,b); la valeur finale du compteur est le nombre cherché. Plausible pour des enfants jeunes - et "confirmé" jusqu'au CE2 par Ashcraft et Fierman (1982) - , un tel modèle l'est beaucoup moins pour des adultes, et les "confirmations" du modèle pour ces derniers pourraient n'être qu'un artefact statistique (Svenson, 1985).

2.1.3 Remarques méthodologiques.

La dernière remarque ci-dessus attire l'attention sur le fait qu'il est risqué d'attribuer des processus (déjà) complexes aux gens sur la seule base des patterns de TR. C'est pour cette raison qu' il est important de se demander s'il existe, par ailleurs, des évidences en faveur de la réalité du modèle. Par exemple, pour l'addition chez les jeunes enfants, il faut examiner -

directement ou dans la littérature - si la procédure de comptage décrite par le modèle, ou aussi les procédures de comptage en général, sont effectivement et abondamment utilisées. Notons à ce sujet que l'interrogation des élèves dont on a mesuré les TR présente un problème (sans solution idéale) : si on choisit une interrogation immédiatement après la mesure du TR à un calcul donné, on risque d'influencer la procédure utilisée lors du calcul suivant; et si on choisit l'interrogation différée (après la mesure de tous les TR) la procédure décrite par le sujet risque (beaucoup plus, car ce risque existe de toute façon) de ne pas être celle qu'il a effectivement suivie. En outre, l'introspection est particulièrement inadaptée pour l'étude des processus cognitifs rapides.

2.1.4. <u>Les modèles pour la soustraction</u> accordent aussi une place priviligiée au comptage au moins jusqu'en 4 ième année d'école ou le modèle prépondérant est le modèle du CHOIX : pour calculer m-n, l'élève choisit de compter en arrière de n pas à partir de m, ou de compter en avant de m-n pas à partir de n, suivant le chemin le plus court. Ce modèle doit alors préciser comment l'élève connaît le chemin le plus court. D'après Woods et al. (1975), il peut utiliser au moins deux méthodes : il peut juger si m et n sont proches (si oui il choisira le comptage avant); ou il peut comparer le double de n à m (si 2*n>m il choisira le comptage avant).

2.1.5. <u>Les modèles pour la multiplication</u> sont plus rares (et pour la division je n'en connais pas!). D'après le modèle de Stazyk, Ashcraft et Hamann (1982), les faits multiplicatifs seraient stockés en réseau inter-relié : leur représentation est basée sur la distance. La pratique réduirait la longueur du chemin d'accès, d'où diminution des TR et erreurs. Et une conséquence plus indirecte serait que le rappel juste antérieur de par exemple 5x3 facilite celui de 5x4 (parce qu'il est proche), mais pas celui de 5x8 (parce qu'il est trop distant), ni celui de 4x6 (parce qu'il n'est pas relié). On peut aussi se demander si un rappel juste antérieur - en induisant un chemin d'accès inhabituel - ne peut pas compliquer la tâche du sujet !

2.2. <u>Problèmes, intérêts et perspectives</u> (étude dans les classes)

2.2.1. Tâches de <u>production</u> ou tâche de <u>vérification</u> ?

Une tâche de production implique soit une réponse orale, soit des choix multiples. Dans le premier cas, il faut un dispositif spécial (et une interface pour le micro-ordinateur) permettant l'arrêt du chrono au début de la réponse orale pour arriver à une bonne précision. Dans le second cas, il se pose au moins deux problèmes :

- celui du temps d'accès aux différents boutons (ou touches) réponses : pour le réduire au maximum, il faudrait un entraînement important. Et même dans ce cas on peut se demander s'il

va être uniforme : on sait en effet que chez des secrétaires professionnelles et pour un clavier QWERTY le temps de frappe (qui est beaucoup plus court que le temps de réaction réflexe) varie de 190.5 à 236.2 ms si l'on considère les seules lettres de la première rangée, ou de 168.7 à 279.2 ms si l'on considère l'ensemble des lettres (cf. Salthouse, 1984);
- celui de la limitation de la taille du nombre-réponse : en effet, ce dernier doit être inférieur à 10. Ceci est extrêmement gênant car les nombres utilisables pour les additions sont singulièrement peu nombreux; et même si pour les soustractions le problème est un peu moins grave, on ne peut manquer de remarquer que les multiplications se trouvent quasiment exclues. Et, de fait, on s'est retrouvé à la fin des années 1970 dans une situation à la limite du risible : on avait mesuré certainement plusieurs milliers de fois des TR d'élèves au calcul 5+4, mais jamais à 5+5 ou 3x4 (par exemple) !
Ces exigences ou limitations d'une tâche de production peuvent conduire à préférer une tâche de vérification, bien que cette dernière ne soit pas exempte de défaut non plus (le problème du devinement devient beaucoup plus aigu par exemple). Précisons d'ailleurs que les résultats obtenus (par des psychologues, i.e. avec des calculs conduisant à des % de réussites très élevés) ne diffèrent guère, sauf peut-être en première année d'école : la tâche de vérification semble seulement légèrement plus difficile (Ashcraft et al., 1984).
2.2.2. Echange vitesse - exactitude.
La consigne qui semble s'imposer à l'école est du type "aller le plus vite possible mais commettre un minimum d'erreurs". Si la fréquence des erreurs est faible (disons moins de 5%), on peut admettre que le TR est peu influencé par les erreurs, et se contenter d'étudier seulement les variations des TR. Sinon, il faut tenir compte des erreurs. Outre une analyse séparée de ces dernières - toujours intéressante mais ici insuffisante -, on peut :
- regarder s'il y a une forte corrélation entre TR médian (on met un signe - aux réponses erronées) et % d'échecs : ceci permettrait par exemple de repérer des phénomènes massifs de réponses devinées (rapides) à des questions trop difficiles;
- utiliser le test de la somme des rangs (avec une colonne extrême pour les échecs : réponses erronées ou non réponses) pour comparer non plus les TR ou TRu (=Temps de Réussite) mais les performances en général (car outre le problème des réponses fausses, il y a celui des non réponses : on peut difficilement, avec des élèves, forcer le choix !).
2.2.3. L'intérêt d'une introduction de la mesure des TR dans les classes me paraît triple :
- pour le(a) maître(sse), elle permettra une évaluation plus fine que la simple dichotomie Réussite-Echec : sur l' image de la classe présentée dans Fischer (à paraître) on peut par

exemple distinguer l' élève 11 lent mais sûr de l'élève 4 plus rapide mais très incertain dans les calculs "difficiles"; repérer une opération particulièrement mal maîtrisée (les soustractions de niveau 2); également, des comparaisons inter et intra-classes (à 2 moments différents) sont possibles;
- pour l'élève, elle sera une incitation au calcul rapide, favorisera le développement de la notion de temps et de mesure du temps, provoquera une réflexion sur les ou ses mécanismes cognitifs (métacognition). Cette métacognition pourra d'ailleurs être favorisée par des questions du type:

Pourquoi 12-6=6 est-elle beaucoup plus rapide que 11-3=9 ?
Pourquoi 9+7=15 est-elle difficile (lente et peu réussie) alors que 8+8=16 est facile ?

et déboucher, comme dans ce dernier exemple, sur des remarques et procédures de calcul comme le calcul par compensation 9+7=8+8;
- pour le chercheur, elle constitue une méthode pédagogiquement "non invasive" permettant entre autres une étude génétique du développement et de l'automatisation (voir suite) des faits numériques élémentaires dans des conditions moins artificielles que celles d'un laboratoire de recherche. De plus, certains résultats établis par l'étude des TR soulèvent des questions de didactique : par exemple, on peut se demander si l'insuffisance (en nombre ou proportion) des jugements d'égalités négatives explique l'effet de positivité ? Ou encore, si l'apprentissage de techniques spécifiques (raisonnements sur la parité par exemple : voir l'article de Krueger et Hallford, 1984) ne supprimerait pas (ou même n'inverserait pas) cet effet ?

3. Les modèles sériels

3.1. Une expérience de Sternberg (1966)

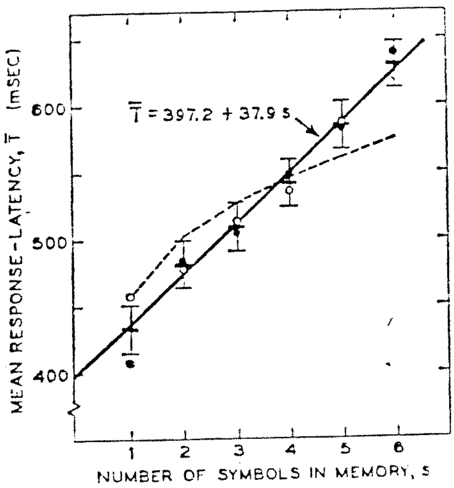
Sternberg montre à ses sujets adultes des séries aléatoires de s ($1 \leq s \leq 6$) chiffres pendant 1.2 secondes. Après 2 autres secondes et un avertissement, il leur présente un chiffre-test : les sujets doivent appuyer le plus rapidement et le plus justement possible sur un des 2 leviers suivant que le chiffre-test était présent ou absent dans la série aléatoire présentée.

Les résultats présentés ci-contre montrent que le TR est à peu près une fonction linéaire du nombre s de chiffres de la série mémorisée :

TR = 397 + 38*s

Ceci suggère l'existence d'un processus de comparaison <u>sériel</u> interne au taux de 25 à 30 chiffres par seconde.

De plus, la non-différence entre réponses positives (chiffre-test présent) et négatives (chiffre-test absent) suggère que le processus de balayage (scanning) est <u>exhaustif</u> : en effet, si le chiffre-test est absent, le sujet doit faire s comparaisons avant d'être en mesure de répondre; par contre, s'il est présent, (s+1)/2 comparaisons en moyenne suffiraient. Donc les réponses positives devraient être plus rapides dans ce dernier cas. Et ceci ne se vérifie pas.



● = réponses positives

○ = réponses négatives

3.2. <u>Le modèle additif de Sternberg</u> (1969)

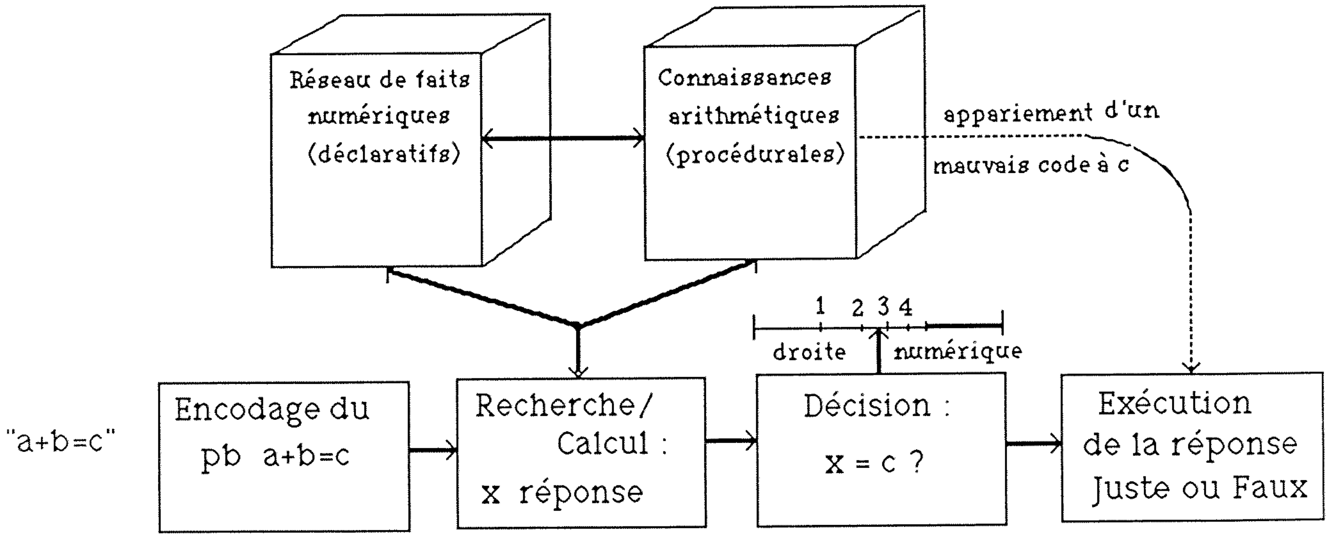
Le traitement de l'information peut être conçu sous forme d'une succession d'opérations élémentaires qui ne se recouvrent pas temporellement. Voici la succession proposée par Sternberg pour une tâche analogue à celle de son expérience rapportée ci-avant :

encodage ---> appariement/comparaison ---> décision ---> exécution réponse

Cette conception est certainement trop simpliste mais elle est pour le moment encore suffisante compte tenu des moyens d'investigation et du peu de résultats dont on dispose. En effet, tant qu'il ne s'agit que de dégager la structure globale du traitement de l'information, l'idée selon laquelle le TR représente la somme des durées d'une série d'opérations de traitement s'est

avérée féconde et satisfaisante en première approximation. C'est Sternberg (1969) qui a formulé le plus explicitement cette idée, en précisant en outre une manière d'étudier les différents stades du traitement de l'information: on peut manipuler deux variables et lorsqu'il y a additivité des effets de ces 2 variables sur le TR alors ces variables agissent sur un stade différent du traitement de l'information; par contre, deux variables dont les effets interagissent indiqueraient qu'il existe au moins un stade de traitement qu'elles influencent en commun. Pour illustrer la fécondité de cette approche, on peut citer une recherche de Duncan et McFarland (1980). Ces chercheurs ont suggéré, en variant la qualité visuelle du stimulus dans une tâche de comparaison de nombres, que les effets de conformité sémantique et de distance symbolique (voir le 2) se situent respectivement au cours de l'encodage et du stade de comparaison. En effet, ils ont trouvé que :
- la qualité visuelle interagit avec l'effet de conformité sémantique;
- la qualité visuelle s'additionne à l'effet de distance symbolique.

3.3. <u>Le modèle d'Ashcraft</u> (1982)
Ashcraft a adapté le modèle additif de Sternberg aux calculs élémentaires. Son modèle se schématise ainsi :



$$TR = t_{encodage} + t_{recherche/calcul} + t_{décision} + t_{réponse}$$ avec :

$t_{r/c}$ = fonction de la distance au réseau et de l'engagement de procédures

t_d = fonction négative de l'écart

$t_e + t_r$ = constante

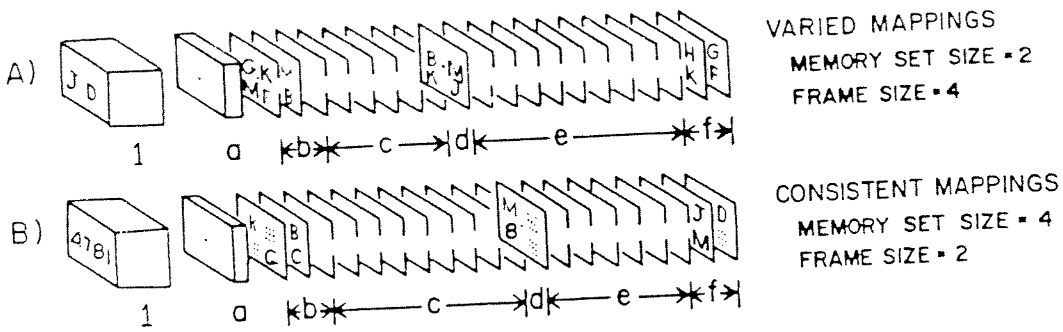
Ce modèle assume un stade initial d'encodage du stimulus, responsable des perception et traduction de l'égalité en un code mental utilisable. Ce stade pourrait également déjà générer un code grossier de la taille des nombres impliqués, quelque chose du type «grand+petit = grand». Une telle estimation de la taille apparaît jouer un rôle important lorsqu'on présente une égalité grossièrement fausse.
A la suite de l'encodage, le stade de recherche/calcul réalise la composante proprement arithmétique de la performance.
Une fois ce stade achevé (avec succès !), par exemple on peut supposer qu'il a conduit à la réponse correcte 9 au problème 6+3=8, il sera suivi d'un stade de décision : la somme calculée sera comparée à 8, une comparaison plutôt lente qui aboutira à une décision négative.
Finalement, un stade d'exécution de la réponse : il est commode de supposer qu'il est constant pour un sujet donné et simplement devient plus rapide avec l'âge croissant.

4. La théorie de Schneider et Shiffrin (1977)

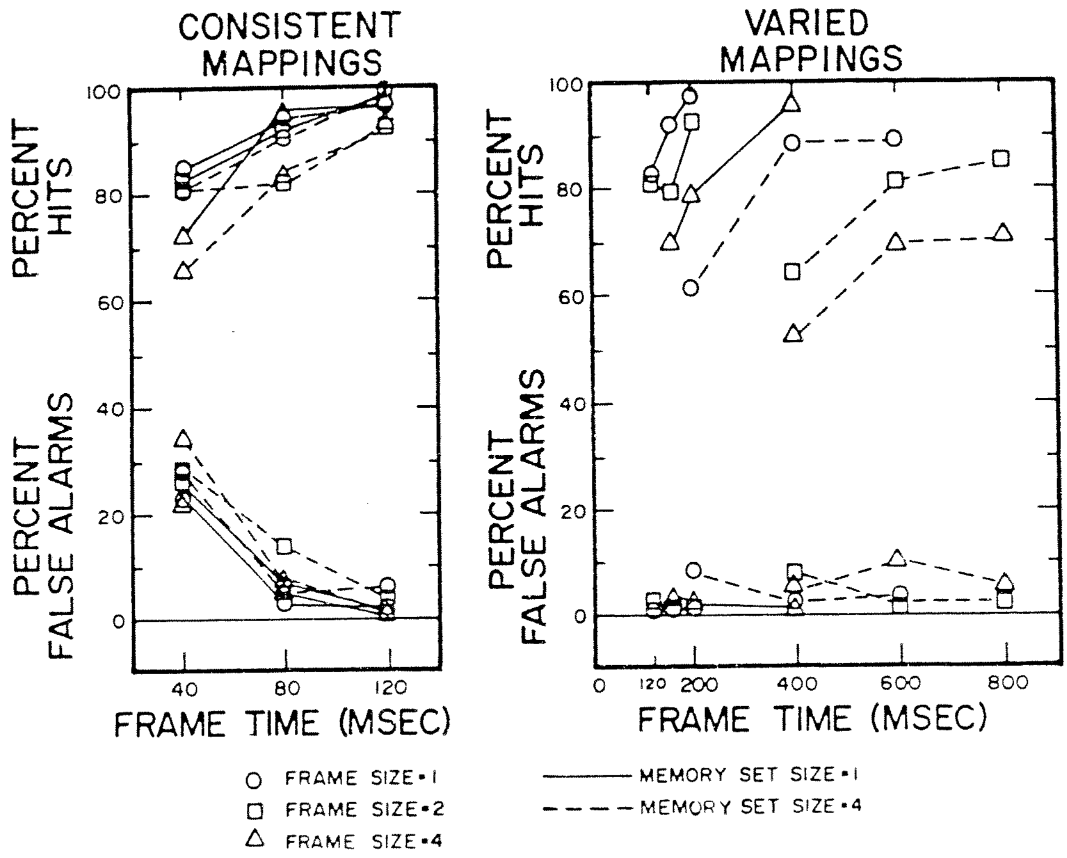
Un modèle de traitement purement sériel débouche assez rapidement sur des difficultés : pour le calcul, par exemple, Ashcraft (1982) est obligé de parler d' «évaluation globale» pour expliquer le fait que certaines égalités grossièrement fausses sont rejetées très rapidement. Même si Sternberg (1969) admet aussi qu'il peut y avoir traitement en parallèle à l'intérieur d'un stade, son modèle, ainsi que celui d'Ashcraft, reste fondamentalement de nature sérielle. Par contre, la théorie de Schneider et Shiffrin (1977) qui va être très succinctement résumée ci-dessous envisage d'emblée **deux modes** fondamentaux de traitement : **contrôlé** et **automatique**.

4.1. Expérience 1

Un objet (lettre, chiffre) peut être une cible ou un distracteur, suivant qu'il appartient à l'ensemble-mémoire ou non (ensemble noté M par la suite).
Dans la condition **CM** (Consistent **M**apping), M est formé de chiffres et des lettres sont utilisées comme distracteurs (ou vice versa).
Dans la condition **VM** (**V**aried **M**apping) des chiffres (ou des lettres) sont utilisés à la fois comme cibles et distracteurs.

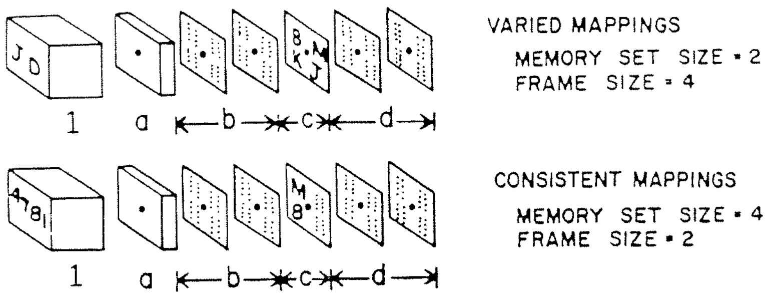


On présente une suite de 20 images consécutives pour chaque essai (pour le contenu voir figure ci-dessus) et le sujet doit dire s'il a détecté une cible. La variable dépendante examinée est l'exactitude. Les graphiques (voir ci-dessous : HIT= détection correcte d'une cible; FALSE ALARM = détection incorrecte d'une cible) montrent que l'accroissement de la charge en mémoire (par augmentation de card(M) ou de card(F), où F (F pour Frame) est l'ensemble des objets sur une image) conduit à accroître considérablement la difficulté dans la condition **VM**, alors que l'on n'observe que de faibles effets dans la condition **CM**.



4.2. Expérience 2

Dans l'expérience 2, la variable dépendante mesurée est le TR. 5 images sont alors seulement présentées par essai, les 2 premières et les 2 dernières ne contenant que des masques.



Là encore (voir page suivante), dans la condition CM, les sujets semblent utiliser une détection automatique indépendante de la charge, alors que dans la condition VM on observe de larges effets à la fois du card(M) et du card(F).

4.3. L' expérience 3

Dans les expériences 3a, 3b et 3c, il s'agit d'une détection de cibles multiples. Le sujet sait qu'il y a des cibles multiples et doit dire combien après les 20 images. Deux nouvelles variables ont été introduites: l'espacement et l'identité des cibles.

Dans VM, il y a une chute des performances pour un espacement de 1 et pour des cibles non identiques. Dans CM, ces effets sont inversés. Ceci confirme qu'il y a bien deux processus qualitativement différents.

4.4. Les autres expériences

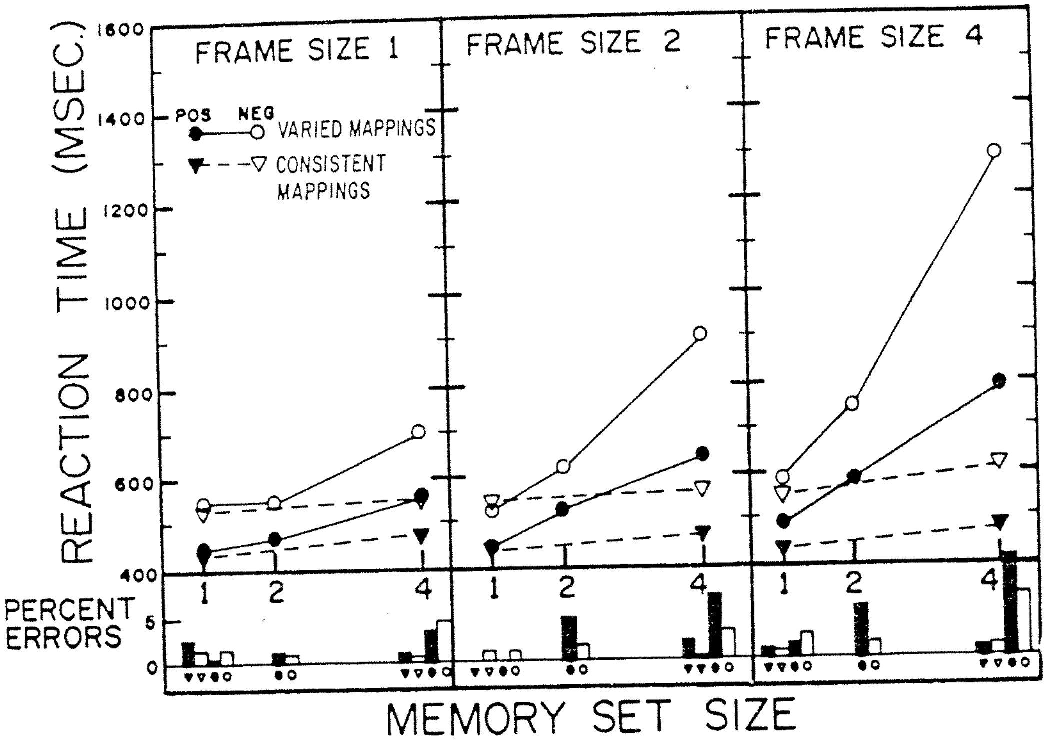
Il s'agit essentiellement d'expériences sur l'apprentissage, le désapprentissage et la catégorisation. Leurs résultats principaux se retrouvent dans les conclusions ci-dessous.

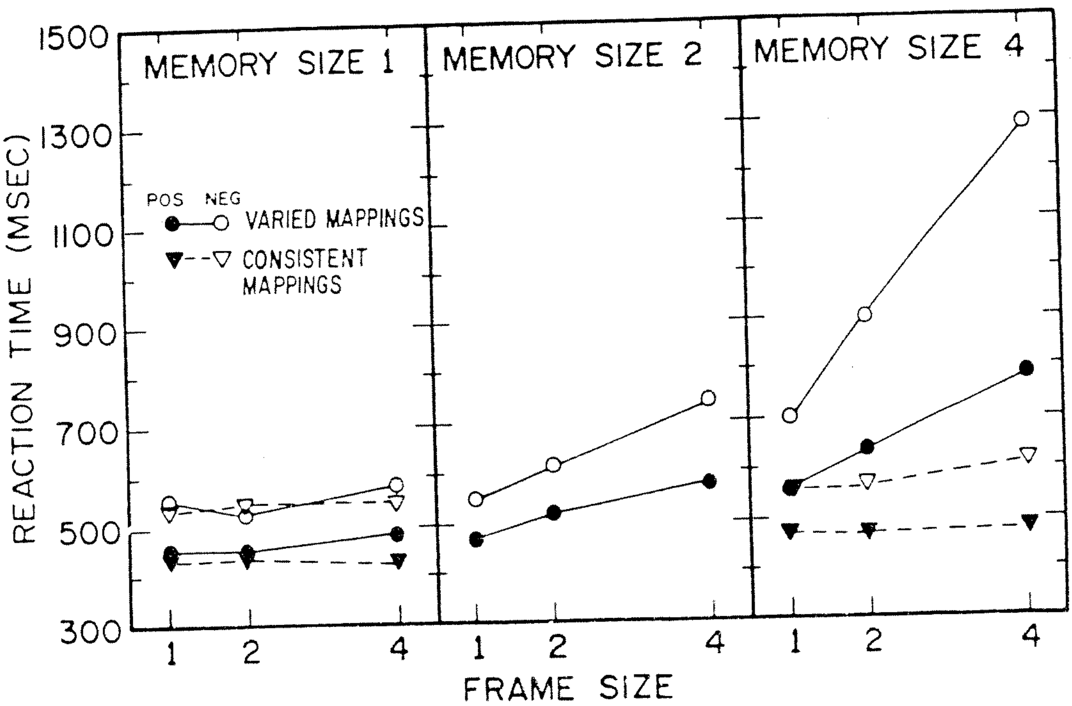
4.5. Conclusions

La recherche contrôlée est hautement exigeante en capacité attentionnelle; elle est usuellement de nature sérielle avec un taux limité de comparaison; elle est facilement établie, altérée, et même inversée par le sujet. Elle dépend fortement de la charge (de la mémoire).

La détection automatique est relativement bien apprise en mémoire à long terme; elle est de nature parallèle et s'avère difficile à altérer, à ignorer, ou à supprimer une fois qu'elle est apprise. Elle est virtuellement inaffectée par la charge.

Toutes les tâches sont accomplies par un mélange complexe de processus contrôlés et automatisés utilisés en combinaison (Shiffrin et Schneider, 1984).





5. Références

Ashcraft M.H., 1982. The development of mental arithmetic: a chronometric approach. *Developmental Review*, **2**, 213-236.

Ashcraft M.H. et Fierman B.A., 1982. Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology*, **33**, 216-234.

Ashcraft M.H., Fierman B.A. et Bartolotta R., 1984. The production and verification tasks in mental addition: an empirical comparison. *Developmental Review*, **4**, 157-170.

Duncan E.M. et McFarland, C.E., 1980. Isolating the effects of symbolic distance and semantic congruity in comparative judgments: an additive-factors analysis. *Memory & Cognition*, **8**, 612-622.

Fischer J.P., 1984. La dénomination des nombres par l'enfant. Strasbourg: IREM.

Fischer J.P., à paraître. L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie*.

Groen G.J. et Parkman J.M., 1972. A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, **79**, 329-343.

Kaufman E.L., Lord M.W., Reese T.W. et Volkmann J., 1949. The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, **62**, 498-525.

Krueger L.E. et Hallford E.W., 1984. Why 2+2=5 looks so wrong: on the odd-even rule in sum verification. *Memory & Cognition*, **12**, 171-180.

Miller G.A., 1956. The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, **63**, 81-97.

Posner M.I., 1978. Chronometric explorations of mind. Hillsdale : Erlbaum.

Salthouse T., 1984. L'art de la dactylographie. *Pour la Science*, n° 78, 32-37.

Schneider W. et Shiffrin R.M., 1977. Controlled and automatic human information processing: I. Detection, search and attention. *Psychological Review*, **84**, 1-66.

Shiffrin R.M. et Schneider W., 1977. Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. *Psychological Review*, **84**, 127-190.

Shiffrin R.M. et Schneider W., 1984. Automatic and controlled processing revisited. *Psychological Review*, 91, 269-276.

Stazyk E.H., Ashcraft M.H. et Hamann M.S., 1982. A network approach to mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, **8**, 320-335.

Sternberg S., 1966. High-speed scanning in human memory. *Science*, **153**, 652-654.

Sternberg S., 1969. The discovery of processing stages: extensions of Donders' method. *Acta Psychologica*, **30**, 276-315.

Svenson O., 1985. Memory retrieval of answers of simple additions as reflected in response latencies. *Acta Psychologica*, **59**, 285-304.

Woods S.S., Resnick L.B. et Groen G.J.,1975. An experimental test of five process models for subtraction. *Journal of Educational Psychology*, **67**, 17-21.

Piaget : conservation du nombre et éléments de la théorie.

1. Le test de conservation du nombre

1.1. Introduction

De manière schématique, le test standard de conservation du nombre consiste à mettre l'enfant en présence de deux collections, par exemple :

• • • • • • • • • (jetons bleus)

• • • • • • • • • (jetons rouges)

et, après lui avoir fait constater l'équivalence des deux collections, à écarter les jetons rouges par exemple :

• • • • • • • • •

• • • • • • • • •

en lui demandant, après la transformation, s'il y a toujours équivalence entre les deux collections.

Piaget a découvert - antérieurement à sa découverte on savait déjà que les jeunes enfants avaient tendance à juger le nombre d'éléments d'une collection sur la base de la longueur (voir Binet) - que les enfants échouent à ce test jusqu'à un âge relativement avancé : ≈ 6-7 ans.

L'importance de la découverte par Piaget de la non-conservation du nombre avant 6 ans vient du fait que Piaget l'a accompagnée d'un postulat épistémologique qu'il affirme avec force dès la première ligne de son ouvrage (avec Szeminska) *La genèse du nombre chez l'enfant* :

> Toute connaissance, qu'elle soit d'ordre scientifique ou relève du simple sens commun, suppose un système, explicite ou implicite, de principes de conservation.

Puis il exprime on ne peut plus fortement l'importance qu'il attache à la conservation :

> .... la conservation constitue une condition nécessaire de toute activité rationnelle ...., il est évident que la pensée arithmétique n'échappe point à une telle règle.
> .... partout et toujours la conservation de quelque chose est postulée par l'esprit à titre de condition nécessaire de toute intelligence mathématique.

Et, de fait, même les critiques les plus sévères de Piaget ont admis que si un enfant «ne comprend pas qu'un groupe de six objets reste un groupe de six objets à moins d'ajouter ou d'enlever quelque chose alors il ne comprend pas réellement ce que signifie "six"» (Bryant, 1974 p.126). Mais le problème est alors de savoir si le test standard de conservation indique une absence complète de cette notion d'invariance du nombre par une transformation irrelevante. Mais décrivons davantage le test original de conservation du nombre.

1.2. Description de l'étude originale

Piaget et Szeminska (1941) ont étudié la correspondance entre n verres et n bouteilles ($6 \leq n \leq 10$), puis n fleurs et n vases, et n oeufs et n coquetiers. Voici par exemple la procédure suivie pour les verres et les bouteilles :

On pose sur la table 6 petites bouteilles alignées et l'on désigne un plateau contenant une collection de verres : «Tu vois, ce sont de petites bouteilles. Qu'est-ce qu'il faut avoir pour les boire ? - Des verres. - Eh bien, voilà les verres. Tu prends sur ce plateau juste assez de verres, la même chose de verres que de bouteilles, un verre par bouteille.» L'enfant opère lui-même la correspondance en mettant un verre devant chaque bouteille. S'il se trompe en trop ou en trop peu, on demande : «Tu crois que c'est la même chose ?», jusqu'à ce qu'il ait fourni son *maximum*. L'erreur n'est possible d'ailleurs que chez les enfants du premier stade (4-5 ans). On peut faciliter la correspondance en faisant verser les bouteilles dans les verres: chaque bouteille remplit un verre exactement. Une fois la correspondance établie, on serre les six verres en un petit tas et l'on demande à nouveau: «C'est la même chose de verres et de bouteilles ?» Si l'enfant dit «non», on poursuit: «Où y a-t-il plus ?» et «Pourquoi il y a plus là ?» Puis on remet les verres en rangées et on serre les bouteilles en tas, etc. en répétant chaque fois les questions.

Les résultats obtenus sont classés en trois stades caractérisés comme suit :

I. Pas de correspondance terme à terme ni d'équivalence;
II. Correspondance terme à terme mais pas d'équivalence durable;
III.Correspondance et équivalence durable.

Au stade I, l'enfant procède par comparaison globale des longueurs (ou densités,etc.) des collections considérées, et ceci même pour réaliser la correspondance initiale. Voici l'exemple de Car (5;2):

Fais que chaque bouteille ait son verre. - (L'enfant qui avait pris tous les verres, en enlève un certain nombre et en laisse 5 qu'il essaie de faire correspondre aux 6 bouteilles en les espaçant pour constituer une rangée de même longueur.) C'est la même chose de verres et de bouteilles ? - *Oui.* - Tout à fait ? - *Oui.* - (On serre alors les 6 bouteilles devant les 5 verres, les deux rangées n'ayant plus ainsi la même longueur.) C'est la même chose de verres et de bouteilles ? - *Non.* - Pourquoi ? - *Les bouteilles sont peu.* - Il y a plus de verres ou plus de bouteilles ? - *Plus de verres.* (Il les serre un peu.) - C'est la même chose de verres et de bouteilles ? - *Oui.* - Pourquoi tu as fait ça ? - *Parce que ça fait peu.*

Au stade II, la correspondance initiale est réussie mais tout se passe toujours comme si la quantité dépendait moins du nombre ou de la correspondance terme à terme que de l'espace occupé par la série (le nombre demeurerait une notion verbale même lorsque le sujet compte correctement). Exemple :

Mül (5;3) fait la correspondance exacte entre les bouteilles et les verres après avoir jugé à vue et mis 2 verres de trop : C'était la même chose ? - *Non, il y avait trop de verres.* - Et maintenant ? - *Oui, c'est la même chose.* - (On serre les verres et on écarte les bouteilles.) C'est la même chose ? - *Non, parce que c'est plus grand.* - Tu sais compter ? - *Oui.* - Combien il y a de verres ? - *Six.* - Et de bouteilles ? - *Six.* - Alors il y a la même chose de verres et de bouteilles ? - *Il y a plus là où c'est plus grand.*

Au stade III, les enfants donnent des explications dont le sens est que les quantités demeurent équivalentes si l'on modifie l'espace occupé. Exemple :

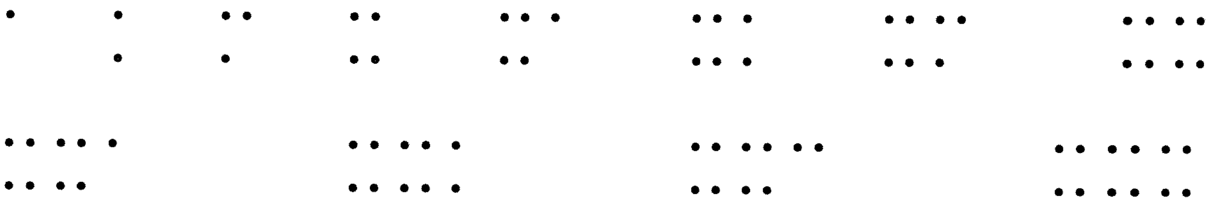
Lau (6;2) fait correspondre 6 verres à 6 bouteilles. Nous mettons les verres en tas : C'est encore la même chose ? - *Oui, c'est la même chose de verres. Vous n'avez rien fait que les serrer comme ça, mais c'est la même chose.* - Et maintenant, il y a plus de bouteilles (en tas) ou plus de verres (espacés) ? - *C'est toujours la même chose. Vous les avez seulement mises ensemble* (les bouteilles).

1.3. Conséquences pédagogiques

Piaget, tout en ayant toujours voulu rester psychologue (ou épistémologue) et se garder de donner des leçons aux pédagogues, n'hésitait pas à faire part de ses découverte et interprétation aux pédagogues. En particulier, lors d'une conférence faite à un congrès des institutrices de l'Ecole Maternelle (en 1949 à Lyon), qui à l'époque enseignaient encore les premières notions numériques - groupements et compte d'objets variés jusqu'à 10 en petite section (2 à 5 ans); groupements jusqu'à 50, calcul mental sur les 4 opérations, représentation des nombres jusqu'à 50,... en grande section (5 à 6 ans) - il expliquait :

...ces nombres, antérieurs au moment où l'enfant a compris l'itération de l'unité, ne sont pas encore de vrais nombres; ce sont des figures perceptives; l'enfant distinguera fort bien un ensemble de deux d'un objet unique, un ensemble de trois d'un ensemble de deux, il le distinguera à la figure perceptive, à la figure géométrique si l'on veut, ce qui peut donner lieu à des manipulations pratiques mais non pas encore opératoires. La preuve, c'est que, à ce niveau préopératoire, nous n'avons pas encore de conservation des ensembles...

Indirectement, Piaget, en réduisant les petits nombres à des figures peceptives, a ainsi favorisé le développement les méthodes figurales d'introduction du nombre, en particulier l'utilisation des constellations dont les plus célèbres sont celles de Lay :



Par la suite, avec l'introduction des *mathématiques modernes* , la non-conservation du nombre avant 6 ans - ou l'interprétation que Piaget et de nombreux pédagogues lui ont donné, à savoir que les pratiques numériques (en particulier le comptage) à l'école maternelle sont aveugles - a conduit (avec aussi le courant créativiste) à une disparition quasi-complète des activités numériques à l'école maternelle.

1.4. <u>Les variantes</u>

La curiosité du résultat, et la popularité de l'oeuvre de Piaget, ont conduit à un nombre difficile à évaluer de replications plus ou moins fidèles de son test-standard de conservation du nombre. Parmi ces dernières il faut cependant distinguer celles qui concernent vraiment la conservation, i.e. celles où il y a transformation, de celles qui s'intéressent aux capacités numériques indépendamment de la conservation.

1.4.1. <u>Les vrais tests conservation</u>.

Les psychologues ont étudié l'influence de nombreuses variables : la nature des objets, le nombre d'objets (effet petit nombre), le nombre de collections (conservation de l'identité, alors que le test standard porte sur l'équivalence), la formulation des questions, la nature de la transformation, la population examinée,....

J'illustrerai ces nombreuses recherches par un seul exemple. Cet exemple s'intéresse à une question que, en général, on se pose tout de suite : le contexte, à savoir un expérimentateur qui transforme l'une des collections, n'incite-t-il pas l'enfant à interpréter la question de conservation comme se référant à l'altération de la dimension physique (longueur) ? Cette question se pose d'autant plus que dans la plupart des communications enfant-adulte les comportements non verbaux guident souvent l'interprétation de l'enfant. Pour examiner cette question, McGarrigle et Donaldson (1975) ont monté une expérience ingénieuse : pour que l'expérimentateur ne donne pas l'impression à l'enfant de vouloir attirer son attention sur la transformation physique, ils ont pensé que cette dernière devait avoir l'air accidentel. En conséquence, ils ont fait faire la transformation à une tierce "personne" : un ours en peluche errant et coquin. Ils commentent leur expérience :

> Si la longueur d'une rangée change, sans que l'expérimentateur donne l'impression de l'avoir fait intentionnellement, l'enfant n'a pas d'évidence comportementale conflictuelle pour ce qui concerne l'interprétation des questions, et peut ainsi répondre à la question de l'expérimentateur sur la base du nombre.

et concluent que «les procédures traditionnelles sous-estiment sérieusement les possibilités de l'enfant».

1.4.2. <u>Quelques autres tests sur les capacités numériques</u>.

Je ne signalerai que deux types de tests : le test non verbal de choix entre deux rangées et les tests sur de très jeunes enfants. Initialement introduit par Mehler et Bever (1967), le test de comparaison de deux rangées perceptivement différentes donnent des réussites beaucoup plus précoces que celles obtenues au test de conservation. J'ai inclus un tel test dans une expérience sur des enfants de 4 et 5 ans : pour les résultats et détails expérimentaux voir dans Fischer (1984, p.50-51).

Pour les expériences d'habituation sur de très jeunes enfants et le test intermodalité de Starkey, Spelke et Gelman, voir les résumés ou références dans Fischer (1985, p.18 et ss).

1.5. <u>Conclusions</u>.

De toutes ces variations opérées par les psychologues, que peut-on conclure ? En général, et parce que Piaget a choisi les conditions quasiment les plus difficiles - on observe des conservations plus précoces, sauf dans les populations non comparables à celle de Genève. On parle alors de *décalage*. Néanmoins, et c'est probablement ce qui fait durer la théorie de Piaget, ces décalages ne sont jamais ni très importants - par ex., le décalage identité-équivalence n'est que de l'ordre de quelques mois (Acredolo, 1982) -, ni très massifs - par ex., même si on pratique le test standard avec des nombres très petits (2 ou 3), la réussite des enfants de 4 à 5 ans est loin d'être garantie (Fischer, 1984).

Les autres estimations des capacités numériques posent surtout la question de savoir si l'importance attachée par Piaget à la conservation est justifiée : les non-conservants savent parfaitement choisir, pour peu que leurs capacités perceptives leur permettent de voir la différence, la rangée avec le plus de bonbons; et même s'ils ne sont pas motivés par la gourmandise, ils n'ont aucune difficulté particulière à résoudre de petits problèmes

arithmétiques. De plus, d'un point de vue pédagogique et dans la mesure où tous les enfants ont des pratiques numériques avant la conservation, certains (Fuson, Secada et Hall, 1983) se demandent toujours si ces dernières, que Piaget et son école qualifiaient d'«aveugles, imposées du dehors, cristallisées par l'exercice répété,...» (Gréco, 1960), ne contribuent pas au développement même de la conservation du nombre.
En tout cas, ce que je peux dire pour avoir interrogé plusieurs centaines d'enfants susceptibles d'infirmer mon affirmation, c'est que l'enfant qui récite «bêtement» - c'est-à-dire sans rien comprendre par ailleurs aux problèmes numériques - la suite des mots de nombres jusqu'à 100 (ou même 30), cet enfant n'existe pas.

2. Eléments de la théorie

2.1. L'interprétation théorique (de la conservation du nombre)
Pour Piaget, les opérations consistent en transformations réversibles (inversions ou réciprocités). Or, raisonne Piaget, une transformation réversible ne modifie pas tout à la fois, sinon elle serait sans retour. Une transformation opératoire est donc toujours relative à un invariant qui constitue une notion de conservation.
Le nombre peut servir d'exemple au schéma général de l'acquisition de toute notion de conservation. Ainsi, on retrouve les 3 arguments classiques :
- l'identité simple (*c'est les mêmes*) ou additive (*on n'a rien ajouté ni enlevé);*
- la réversibilité par inversion : *on peut remettre comme c'était avant;*
- la compensation ou réversibilité par réciprocité des relations : *c'est plus long, mais il y a plus de place entre.*
Ainsi également, comme pour toutes les autres notions de conservation - substance vers 7-8 ans, poids vers 9-10 ans ou volume (par immersion de l'objet) vers 11-12 ans, longueur, surface ou volume (par déplacement d'éléments),.... - on retrouve, aux niveaux préopératoires, des réactions centrées sur les configurations perceptives ou imagées, suivies aux niveaux opératoires de réactions fondées sur l'identité et la réversibilité par inversion ou par réciprocité.
Comment l'enfant découvre-t-il cette notion de conservation ? Pour Piaget, la découverte d'une notion de conservation est toujours l'expression de la construction d'un «groupement» (pour "définition", voir Glaeser). Ces groupements caractérisent ce qu'il appelle le «stade opératoire concret» et qui se situe entre 7 et 11 ans. Si la théorie de Piaget est "bonne", le problème pédagogique est alors de savoir dans quelles conditions se constituent de telles structures (de groupement) : pour Piaget, c'est la mobilité et la réversibilité générale des opérations qui les

engendrent.

2.2. L'abstraction réfléchissante

Piaget (1972) constate qu'il existe deux sortes d' "expérience" très différentes l'une de l'autre. La première est ce que l'on appelle l' "expérience physique" (au sens large) : elle consiste en des actions sur les objets pour découvrir les propriétés de ces objets eux-mêmes, par exemple comparer des poids ou des densités, etc... La seconde est ce qu'on peut appeler une "expérience logico-mathématique", qui tire ses informations, non pas des propriétés physiques des objets en particulier, mais des actions elles-mêmes (ou plus précisément de leur coordination) que l'enfant peut avoir sur ces objets. Par exemple, compter des cailloux de diverses manières et toujours retrouver le même nombre est une expérience du second type, car ni le nombre (de cailloux) ni l'ordre (du comptage) ne sont des propriétés physiques des cailloux.

A partir de ce constat, Piaget introduit une variété particulière d'abstraction qui correspond précisément à l'abstraction logique et mathématique : l'abstraction réfléchissante.

Contrairement à l'abstraction au sens ordinaire - qui tire ses fondements des propriétés physiques des objets et que l'on appelle à cause de cela l'abstraction empirique - l'abstraction réfléchissante procède à partir des actions ou des opérations du sujet et transfère à un plan supérieur ce qui est tiré d'un niveau inférieur d'activité : d'où des différenciations entraînant nécessairement au palier supérieur des compositions (ou intégrations) nouvelles et généralisatrices.

Exemple 1: les proportions numériques (Piaget, 1977).

Les sujets doivent prévoir la longueur d'un mur fait de plots rouges à partir de celle d'un mur fait de plots bleus, sachant que b= n*r où b (resp. r) désigne la mesure d'un plot bleu (resp. rouge).

Dans les questions les plus simples, avec b=r, les enfants doivent par exemple dire si les deux murs auront la même longueur ou le même nombre de briques en continuant une construction simultanée.

Au niveau IA, vers 5 ans, les enfants pensent qu'il faut voir, compter,... Pour Piaget, ceci s'explique par le fait que l'abstraction réfléchissante, plus précisément le réfléchissement (transfert du palier inférieur vers le palier supérieur), de la bijection ne fonctionne encore, à ce niveau, qu'en s'appuyant sur une nécessaire abstraction pseudo-empirique, autrement dit sur une constatation des résultats observables. Au niveau IB, vers 6 ans, par contre une telle abstraction pseudo-empirique n'est plus nécessaire à l'abstraction réfléchissante : les enfants soutiennent l'égalité des nombres en se référant aux actions («on a pris ensemble», «on a fait attention de prendre en même temps»,...)

Dans une question un peu plus complexe, l'enfant doit maintenant dire où se terminera le mur avec les rouges par exemple si b=5*r. Les sujets du niveau IIA, vers 7-8 ans arrivent à trouver la réponse par un processus additif revenant à B-R=(b-r)+(b-r)+..., où B (resp. R) désigne la mesure totale du mur bleu (resp. rouge). Mais une différence intéressante se produit lorsque l'on ne précise pas le nombre N de plots bleus en se contentant de tracer une ligne bleue pour les symboliser, l'enfant devant tracer une ligne rouge pour symboliser le mur rouge correspondant. En procédant ainsi dans l'abstrait, le sujet en revient au stade I où B-R=(b-r) ou même B=R parce que le nombre de plots est le même. Cette "régression" est ainsi expliquée par Piaget : il faudrait réunir les additions en une addition d'additions, c'est-à-dire une multiplication B-R=N*(b-r) ou même une proportion B/R=b/r. Or cette forme supérieure d'abstraction, qualifiée de réfléchie ou réflexive et qui procède par une réflexion sur les réflexions particulières (abstraction à la puissance 2), n'est possible que si, par réfléchissement, une relation déjà utilisée (b-r) devient un nouvel objet de pensée.

Enfin au stade III, vers 11-12 ans, la pensée formelle autorise les abstractions sur les abstractions, ou la réflexion à la n-ième puissance. Le sujet tire alors, de la relation fondamentale b=n*r et par abstraction réfléchissante, une généralisation . Mais cela se paye initialement par une généralisation abusive avec un primat des compositions multiplicatives sur les compositions additives, par exemple, si on ajoute à deux murs inégaux des plots de même valeur, le sujet prévoit que la proportion restera la même !

A la lumière de cet exemple détaillé, on peut redonner la définition de l'abstraction réfléchissante et entrevoir la notion d'équilibration:

Pour Piaget, en effet, toute cette évolution que je viens de résumer, est *«dirigée par une loi d'équilibration entre les différenciations et les intégrations. Les premières résultent du processus de "réfléchissement" propre aux abstractions réfléchissantes, qui dégage d'un niveau inférieur certaines liaisons, employées implicitement ou simplement impliquées mais non remarquées, pour les transformer en objets de pensée au niveau ultérieur. Les secondes résultent alors de la "réflexion" ou réorganisation nécessaire, sur le nouveau plan, du système ainsi enrichi par l'introduction de ces objets de pensée non considérés jusque-là. Cette "réflexion", second aspect de l'abstraction réfléchissante est alors nécessairement généralisatrice du fait qu'elle porte sur une totalité plus large.»* (p.29-30).

<u>Autres exemples</u> (également dans Piaget, 1977):

La multiplication, comme on pouvait s'y attendre, offre à Piaget une autre illustration de sa notion d'abstraction réfléchissante. Au niveau I, vers 5-6 ans, il y a une véritable myopie à l'égard de structures multiplicatives pourtant simples et transparentes dans les exemples choisis. Au niveau IIA, vers 7-8 ans, la multiplication est comprise à titre d'addition d'additions résultant d'une abstraction réfléchissante à partir des successions de réunions. Et au niveau IIB, vers 9-10 ans, l'opération multiplicative «n fois x», enfin comprise, constitue le produit d'une abstraction réfléchisante à partir d'additions d'additions, en ce sens que n n'est plus simplement le nombre des «paquets» qu'il a fallu faire pour arriver au but, mais bien le nombre des opérations constitutives de ces classes.

Un troisième exemple étudié par Piaget est celui de l'inversion des opérations arithmétiques à partir, essentiellement, du jeu consistant à deviner le nombre n d'origine connaissant le nombre n' final et les transformations successives que l'on fait subir à n. Là encore, il apparaît qu'au stade IIB, vers 9 ans, l'abstraction réfléchissante, nécessite une abstraction pseudo-empirique, c'est-à-dire la réflexion sur des objets réels ou sur un exemple particulier. L'enfant, doutant qu'on puisse retrouver n, faute de l'avoir fait lui-même, a besoin de constater qu'il y a eu réussite pour reconstituer le processus, bien que cette reconstitution ne lui pose aucun problème; mais n'étant point encore parvenu au niveau des opérations hypothético-déductives, il ne pouvait l'expliciter dans l'abstrait en tant que simplement «possible» avant de vérifier par les faits qu'elle pouvait être réelle.

2.3. La généralisation

L'étude de la généralisation prolonge assez naturellement celle de l'abstraction réfléchissante car, écrit Piaget (1977 p. 78), «quand une généralisation ne dérive pas d'une abstraction réfléchissante, mais seulement à partir d'une abstraction empirique, elle n'entraîne aucune nécessité»; ou encore, page 79, «la nécessité est sous toutes ses formes un produit de l'abstraction réfléchissante, et elle constitue l'une des principales nouveautés dont la formation est provoquée par un tel mécanisme».

Piaget (1978) distingue deux types de généralisation :

- la généralisation inductive part des observables attachés aux objets, donc d'abstractions empiriques, et s'en tient à eux pour vérifier la validité des relations observées pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures (admis sans encore chercher d'explications ou de raisons, ce qui conduirait à dépasser les observables). Elle est de nature essentiellement extensionnelle et consiste à procéder du «quelque» au «tous» ou du «jusqu'ici» au «toujours»;
- la généralisation constructive : elle s'appuie ou porte sur les opérations du sujet ou leurs produits. Elle est de nature simultanément compréhensive et extensionnelle et aboutit à la production de nouvelles formes et parfois de nouveaux contenus (cf. les nombres et leurs multiples variétés).

Dans ses recherches sur la généralisation, Piaget (1978) a étudié plusieurs sujets mathématiques. Je me contenterai ici de présenter trois d'entre elles, en résumant chaque fois le matériel et la procédure (mais pas les "résultats", les "résultats" trouvés par Piaget sont trop difficiles à résumer !) :

- un raisonnement récurrentiel relatif à des polygones inscrits : On utilise une planche à clous et on demande, d'abord pour un pentagone, de construire tous les triangles possibles en précisant bien la condition de faire coïncider deux de leurs côtés avec deux côtés adjacents du polygone de départ. Puis on déplace un ou deux sommets du polygone enveloppant de manière à en augmenter la surface et le périmètre. Ensuite on passe aux quadrilatères. Puis idem avec un hexagone. Enfin, généralisation par simples prévisions à des polygones quelconques et à l'inscription d'autres figures que des triangles et des quadrilatères;

- la récurrence dans la somme des angles d'un polygone convexe : Dans une première partie de l'entretien, on commence par des triangles en procédant par découpage et réunion des angles, puis de même avec des quadrilatères. Puis, pour les pentagones et les hexagones, seulement dessin. Enfin, l'enfant doit prévoir le résultat, la loi de passage et la méthode de hepta à octogone, de 24 à 25 côtés, de 1000 à 1001. Dans la deuxième partie de l'entretien, on fait faire des décomposition en triangles disjoints et on repose les mêmes questions;
- le plus court chemin entre deux plans perpendiculaires : Sur une feuille de papier nommée jardin on pose une coquille d'escargot et une petite feuille de salade en différentes positions parallèles ou non aux bords et le sujet doit indiquer le plus court chemin. Puis sur un carton plié (deux plans perpendiculaires) l'escargot est sur le mur. Enfin, le sujet doit imaginer un escargot dans un coin élevé de la salle d'expérience et indiquer le plus court chemin pour atteindre une salade en des positions variables sur le sol.

Sans entrer dans les détails, on peut encore citer, dans ce même tome 36 des Etudes d'Epistémologie Génétique, une recherche sur l'allongement des périmètres qui aborde le problème bien connu de la différence de longueur entre une ficelle posée sur l'équateur terrestre et une autre à 1 m du sol, et une recherche touchant aux évaluations probabilistes (roulette).

3. Références

Acredolo C., 1982. Conservation-Nonconservation: Alternative explanations. In C.J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition*. New York : Springer.

Bryant P., 1974. Perception and understanding in young children. London : Methuen.

Fischer J.P., 1984. La dénomination des nombres par l'enfant. Strasbourg: IREM.

Fischer J.P., 1985. Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre. Strasbourg : IREM.

Fuson K.C., Secada W.G. et Hall J.W., 1983. Matching, counting, and conservation of numerical equivalence. *Child Development*, **54**, 91-97.

Gréco P., 1960. Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. In P.Gréco, J.B.Grize, S.Papert et J.Piaget, *Problèmes de la construction du nombre*. Paris : PUF.

McGarrigle J. et Donaldson M., 1975. Conservation accidents. *Cognition*, **3**, 341-350.

Mehler J. et Bever T.G., 1967. Cognitive capacity of very young children. *Science,* **158**, 141-142.

Piaget J., 1972. Remarques sur l'enseignement des mathématiques. Communication présentée au congrès d'Exeter.

Piaget J., 1977. Recherches sur l'abstraction réfléchissante : 1/ L'abstraction des relations logico-arithmétiques (tome 34 des EEG). Paris : PUF.

Piaget J., 1978. Recherches sur la généralisation (tome 36 des EEG). Paris : PUF.

Piaget J. et Szeminska A., 1941. La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchatel : Delachaux & Niestlé, 1967.

Quelques méthodes usuelles pour l'étude de la cognition.

1. Méthode clinique

1.1. La méthode clinique initiale

Par la méthode des tests, on peut fausser l'orientation d'esprit de l'enfant qu'on interroge, et par l'observation pure on se heurte à l'égocentrisme de l'enfant et à la difficulté à discerner chez lui le jeu de la croyance. En conséquence, Piaget (1926 p.10 et ss) suggère la *méthode clinique* , déjà utilisée par les psychiatres. Voici quelques réflexions de Piaget à son sujet :

> ... la méthode clinique ne s'apprend que par une longue pratique. Nous pensons même que, en psychologie infantile comme en psychologie pathologique, une année d'exercices quotidiens est nécessaire pour sortir des inévitables tâtonnements du début. Il est si difficile de ne pas trop parler lorsqu'on questionne un enfant, surtout si l'on est pédagogue ! Il est si difficile de ne pas suggestionner ! Il est si difficile, surtout, d'éviter à la fois la systématisation due aux idées préconçues et l'incohérence due à l'absence de toute hypothèse directrice ! Le bon expérimentateur doit, en effet, réunir deux qualités souvent incompatibles : savoir observer, c'est-à-dire laisser parler l'enfant, ne rien tarir, ne rien dévier, et, en même temps, savoir chercher quelque chose de précis, avoir à chaque instant quelque hypothèse de travail, quelque théorie, juste ou fausse, à contrôler. Il faut avoir enseigné la méthode clinique pour en comprendre la vraie difficulté. Ou bien les élèves qui débutent suggèrent à l'enfant tout ce qu'ils désirent trouver, ou bien ils ne suggèrent rien, mais c'est parce qu'ils ne cherchent rien, et alors ils ne trouvent rien non plus.

1.2. La méthode clinique révisée

La méthode clinique initiale était purement verbale. Dans *La genèse du nombre chez l'enfant* Piaget, à la suite de sa prise de contact avec l'intelligence sensori-motrice, souligne la nécessité d'une manipulation :

> La conversation avec le sujet est à la fois beaucoup plus sûre et beaucoup plus féconde lorsqu'elle a lieu à l'occasion d'expériences effectuées au moyen d'un matériel adéquat et lorsque l'enfant, au lieu de réfléchir dans le vide, agit d'abord et ne parle que de ses propres actions.

Piaget s'en est tenu à cette méthode jusqu'à la fin de sa vie : voir les recherches décrites dans le chapitre précédent.

1.3. Commentaires

1.3.1.Une des caractéristiques fondamentales de la méthode clinique est la notion de contre-argument : si un sujet fournit une réponse correcte, on essaie de s'assurer qu'il ne s'agit pas là d'une réponse chanceuse ou reposant sur une fausse explication. Un des moyens souvent utilisé est de dire - par exemple si un enfant répond correctement au test standard de conservation (sans fournir d'explication) - qu'un camarade a dit qu'il y en a plus parce que c'est plus long, et de voir si l'enfant arrive à rejeter l'argument de son camarade (j'ai moi-même utilisé cette technique jusqu'au jour où un enfant m'a répondu que son camarade était *complètement taré* !).

1.3.2.La méthode clinique autorise certaines variantes "improvisées" : Piaget (1977 p.11), en décrivant la technique d'interrogation, mentionne que l'on peut poser la question 5 avant la question 4 pour y revenir ensuite, ou retourner à la question 4 (résolue plus tôt) à propos des questions 6 et 7 quand l'échec est trop total. Ceci lui procure une certaine "souplesse" mais aussi un certain manque de rigueur.

1.3.3.La méthode clinique ne peut conduire - faute de pouvoir définir des critères précis - qu'à une classification "grossière" : Piaget a presque toujours distingué 3 niveaux (I, II et III), chacun subdivisé en deux (IA, IB, etc...)

2. Méthode scientifique standard

2.1. Une méthode utilisée dans de très nombreux domaines de la science est la comparaison de deux conditions (ou modalités), en "utilisant", suivant les circonstances, un ou deux échantillons de sujets.

Cette méthode s'applique aussi à l'étude de l'appréhension des notions mathématiques. Le succès, l'universalité, l'article de Duval et Pluvinage (1977) et les exemples antérieurs (CM et VM dans les expériences de Shiffrin et Schneider; REG et NREG dans mon expérience sur le calcul) m'évitent de la décrire et de souligner ses mérites. Je me contenterai donc, sur un exemple précis, de montrer qu'elle peut cependant être "faillible", en soulignant encore auparavant que les résultats absolus peuvent eux aussi être intéressants et utiles.

2.2. Classes et Collections : Effets réels sur l'appréhension du nombre ?

Une psychologue américaine - Ellen Markman - a développé, à partir des années 1970, une théorie qui, s'appuyant sur le fait que l'on pouvait distinguer des termes de classe (soldats,

blocs,...) et de collection (armée, pile,...), soutient que l'utilisation des termes de collection a un effet facilitant sur un certain nombre de tâches : test d'inclusion, test cardinal,...
Pour le test cardinal - qui consiste à vérifier que l'enfant sait que le dernier mot de nombre utilisé (quatre) lors d'un comptage (un, deux, trois, quatre) désigne le cardinal de l'ensemble des objets comptés - elle avait monté une expérience sur de jeunes enfants (3 et 4 ans) dans laquelle elle comparait les deux conditions classe et collection. Elle avait trouvé - avec un critère de réussite de 3 réponses correctes sur 4 - le tableau1 de résultats suivant :

Markman	Réu.	Echecs
Classe	6	7
Collec.	12	1

Tableau 1: $p \approx .015$

Fuson2	Réu.	Echecs
Classe	13	11
Collec.	14	10

Tableau 2: $p \approx .5$

Fuson3	Réu.	Echecs
Classe	10	3
Collec.	10	3

Tableau 3: $p \approx .678$

Ce résultat, en accord parfait avec la théorie, était important :
- d'une part, et pour moi, parce que j'avais utilisé un test cardinal sur plusieurs centaines d'enfants sans expliciter un terme de collection : je risquais donc d'avoir considérablement sous-estimé les possibilités de mes sujets;
- d'autre part, et pour la pédagogie des petites classes, parce qu'il suggérait une manière d'améliorer considérablement - le résultat de Markman non seulement est statistiquement significatif mais, obtenu avec seulement 26 sujets, semble traduire un effet de grande ampleur - la compréhension des questions numériques initiales.

Mais, au cours d'une expérience1 où elles voulaient, entre autres, étudier l'extension de cet effet à des collections numériquement plus grandes, Fuson, Pergament et Lyons (1985) n'ont pas du tout retrouvé l'effet facilitant de la condition Collection (les résultats non significatifs allaient en sens contraire). Fuson et al. écrivent :
«Notre échec pour répliquer les résultats de Markman (1979) était déconcertant. Nous avions pris un soin considérable (y compris une communication personnelle) pour utiliser les objets et procédures de Markman. L'expérimentateur espérait répliquer les résultats de Markman, et ainsi un biais dû à l'expérimentateur allait à l'encontre de nos résultats.»
Pour éliminer une source possible du non-effet elles décidèrent d'entreprendre une expérience 2: là encore (voir tableau 2) aucun effet (significatif) positif des termes de collection n'est apparu. Enfin, dans une expérience 3, elles répliquèrent exactement l'étude originale de Markman, en utilisant un expérimentateur "aveugle", i.e ne connaissant pas les effets espérés de la manipulation classe-collection. Une nouvelle fois (voir tableau 3 ci-dessus) aucun effet

n'est apparu. Fuson et al. concluent, en remarquant qu'au total elles ont interrogé 122 sujets, que le phénomène mis en évidence par Markman ne semble pas, pour le moins, très "robuste".

2.3. Remarque. A cet endroit, on peut rappeler une expérience "amusante" de Hunt (1975). Reprenant les tests de (fausse) conservation (choix de smarties), cet auteur a engagé 12 expérimentatrices rémunérées : à 6 d'entre elles il expliqua que sa théorie conduisait à prévoir la réussite des enfants (de 2 à 5 ans), et aux 6 autres il expliqua le contraire. Les résultats trouvés par les deux groupes d'expérimentatrices se sont avérés significativement différents dans le sens d'une confirmation de la "théorie" (fluctuante !) de l'auteur de l'expérience ! L'intérêt de l'expérience est toutefois un peu atténué par le fait que Hunt avait, outre la rémunération "normale", promis un bonus dans le cas où sa théorie était confirmée.

3. Etude de cas

L'étude de cas, comme l'indique son nom, peut s'avérer intéressante si l'on tombe sur des cas particuliers. Elle est très fréquente et presque obligatoire dans les domaines où l'on ne dispose souvent que d'un sujet expérimental (ou de plusieurs sujets non regroupables), par exemple en neuropsychologie. Et, selon Shallice (1979), elle serait la technique la plus prometteuse pour nous fournir des informations sur l'organisation fonctionnelle des sous-systèmes cognitifs. Pour illustrer cette méthode, je résumerai une étude de McCloskey et al. (1985). Ces neuropsychologues ont observé un patient - titulaire d'un doctorat en sciences sociales - qui calculait parfaitement (par ailleurs), et montrait une bonne compréhension des opérations arithmétiques. Cependant il était sévérement handicapé en ce qui concerne le rappel des faits numériques, en particulier pour les multiplications. Par exemple, il produisait fréquemment une réponse incorrecte (ex.: 6x7=48) ou était incapable de retrouver la réponse. McCloskey et al. ont alors étudié en détail la connaissance des faits multiplicatifs chez ce patient et sont arrivés à la table des pourcentages d'erreurs suivante :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	_	_	_	5	_	_	6	7	_	_
2		9	7	_	_	10	8	_	13	_
3			7	_	_	11	8	10	31	_
4				12	_	8	20	27	5	_
5					_	_	40	10	36	_
6						_	19	7	48	_
7							13	59	3	_
8								62	23	_
9									44	_
10										_

4. Etudes génétiques

Pour un exemple, je renvoie à mes études sur le comptage ou aux études de Piaget.

5. Autres méthodes

5.1. Les observations naturalistes (ou écologiques). Parmi ces observations, on peut classer les monographies d'enfants. Par exemple, celle générale (i.e non exclusivement mathématique) des Scupin sur leur fils Bubi, ou celle plus spécialisée de Court sur son fils A. (voir Fischer, 1984b p.138 et ss). Outre ces monographies, souvent anciennes, on peut aussi y classer les observations de différentes cultures: par exemple, Saxe et Posner (1983) ont observé en Côte-d'Ivoire le calcul des enfants Dioula (marchands) et celui des enfants Baoule (agriculteurs). Les premiers semblent adopter des stratégies de calcul plus économiques, en particulier ils utilisent un plus grand nombre de faits additifs mémorisés et de regroupements par dix (ex.: 7+5 = 10+2). La scolarisation semble "gommer" cette différence.

5.2. Le raisonnement à voix haute. L'exemple souvent cité (voir Ginsburg et al., 1983) est celui de l'observation par Newell et Simon (1972) de sujets résolvant le cryptogramme arithmétique

	D	O	N	A	L	D
+	G	E	R	A	L	D
	R	O	B	E	R	T

Le sujet doit déterminé, sachant que D vaut 5, la valeur de chaque lettre.

Voici un extrait d'un protocole (E=Expérimentateur; S=Sujet):

Temps (en s, les *f* marquent les intervalles de 5 s)

2 E: *Here is another problem f*

10 E: *I will give you that D is 5 f in this problem. f Please talk. f*

5	O	N	A	L	5
G	E	R	A	L	5
R	O	B	E	R	T

22 S: *Well, D ... Giving D 5*

25 *automatically makes f T a zero.*

27 *Could you make T a zero?*

29 E: *T is a zero. f*

32 S: *Because 5 plus 5 is equal to 10,*

34 *and that's simple from the problem. f*

40 *And looking at the leftmost column, f you can see that R is f either 1 or 2 greater than G,*

47 *but that doesn't seem to help very much at this point. f*

55 *In the second column having the two f L's equal,*

60 *and also f the two A's equal in the third f column,*

70 *doesn't seem to help too f much at this point either. f*

etc... (Newell et Simon,1972 p.329).

Dans cette méthode les interventions de E sont minimes. Elle permet l'investigation de la résolution de problèmes relativement complexes (en supposant que c'est une activité séquentielle) et l'identification des mécanismes symboliques internes. Elle s'adresse plutôt à des adultes coopératifs (et ayant des idées sur la manière de chercher) et ne s'applique pas aussi bien à tous les types de problèmes.

5.3. Méthodes mixtes. Voir mes observations sur la dénomination spontanée des nombres au cours des problèmes imagés (Fischer, 1984a et 1984b). Voir aussi la *méthode des protocoles* (Ginsburg et al., 1983).

6. Références

Duval R. et Pluvinage F., 1977. Démarches individuelles de réponse en mathématique: Résultats d'une enquête à trois modalités auprès d'élèves de la classe de 5ème. *Educational Studies in Mathematics*, **8**, 51-116.

Fischer J.P., 1981. Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2**, 277-302.

Fischer J.P., 1984a. L'appréhension du nombre par le jeune enfant. *Enfance*, n°2, 167-187.

Fischer J.P., 1984b. La dénomination des nombres par l'enfant. Strasbourg : IREM.

Fuson K.C., Pergament G.G. et Lyons B.G., 1985. Collections terms and preschoolers'use of the cardinality rule. *Cognitive Psychology*, **17**, 315-323.

Ginsburg H.P., Kossan N.E., Schwartz R. et Swanson D., 1983. Protocol methods in research on mathematical thinking. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Hunt T.D., 1975. Early number "conservation" and experimenter expectancy. *Child Development*, **46**, 984-987.

McCloskey M., Caramazza A. et Basili A., 1985. Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, **4**, 171-196.

Markman E.M., 1979. Classes and collections: conceptual organization and numerical abilities. *Cognitive Psychology*, **11**, 395-411.

Newell A. et Simon H., 1972. Human problem solving. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Piaget J., 1926. La représentation du monde chez l'enfant. Paris : PUF, 1976.

Piaget J., 1977. Recherches sur l'abstraction réfléchissante: 1.L'abstraction des relations logico-mathématiques. Paris: PUF.

Saxe G.B. et Posner J., 1983. The development of numerical cognition: cross-cultural perspectives. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Shallice T., 1979. Case study approach in neuropsychological research. *Journal of Clinical Neuropsychology*, **1**, 183-211.

Les élaborations théoriques de Brousseau.

1. L'exposé initial

1.0. L'exposé initial du processus de mathématisation (Brousseau, 1972a) avait été fait au cours d'une conférence de l'APM en 1970 sous le titre : "Apprentissage des structures". Le processus se compose de 3 dialectiques:
la dialectique de l'action, la dialectique de la formulation et la dialectique de la validation. La présentation résumée que je vais en faire est essentiellement empruntée à El Bouazzaoui (1982 p.133 et ss).

1.1. La dialectique de l'action. Elle consiste à placer l'élève (ou le groupe d'élèves) devant une situation qui lui pose un problème dont la solution est la connaissance à enseigner, sur laquelle il peut agir et qui lui renvoie de l'information sur son action. Il doit pouvoir trouver lui-même la solution en la construisant ou en la choisissant parmi d'autres sans influence ni suggestion du maître ni du milieu. Cette dialectique de l'action lui permet donc de créer un modèle implicite, i.e d'avoir des réactions qu'il ne peut pas encore formuler ni organiser en théorie: "il s'agit de l'association de certains stimulus à certaines réponses" (Brousseau, 1972a p.431). L'élève donne ainsi du sens à la connaissance qu'il fait fonctionner en tant que modèle implicite qu'il a validé empiriquement.
Il ne suffit pas alors de l'interroger pour qu'il explicite le modèle ainsi créé, il faut organiser une autre phase.

1.2. La dialectique de la formulation. Durant cette phase, l'élève communique à un (ou plusieurs) interlocuteur(s) ce qu'il a trouvé. L'interlocuteur utilise l'information et renvoie à son tour de l'information sur son action. Les deux interlocuteurs sont émetteur et récepteur et échangent des messages qui peuvent être écrits ou oraux. Ils sont rédigés en langage mathématique, selon les possibilités de chaque émetteur. L'émetteur met ainsi à l'épreuve et contrôle le vocabulaire qu'il emploie. Le récepteur ne devrait pas être le maître à cause de son rôle de détenteur du savoir, de la différence de niveau des connaissances des deux qui ne permettraient pas à la dialectique de se développer convenablement.

1.3. La dialectique de la validation. La validation empirique obtenue par l'élève lors de la dialectique de l'action est insuffisante. Pour qu'il construise lui-même une démonstration et pour qu'elle ait du sens pour lui, il faut qu'il puisse le faire dans une situation où il doit convaincre quelqu'un d'autre. Une situation de validation est l'occasion pour un élève (proposant) de soumettre le message mathématique (modèle de la situation) comme une assertion à un interlocuteur (opposant). Le proposant doit prouver l'exactitude et la pertinence de son modèle. L'opposant peut demander des explications supplémentaires, refuser celles qu'il ne comprend pas (pour en avoir d'autres) ou celles avec lesquelles il n'est pas d'accord (en justifiant son désaccord), etc..
C'est ainsi que, à travers ces échanges, se réalise une dialectique: la dialectique de la validation.

2. Exemples

2.1. Exemple original. Brousseau (1972b) se veut un exemple du processus de mathématisation. Mais on n'y retrouve pas explicitement les 3 dialectiques décrites ci-dessus (ou dans Brousseau (1972a)). Cet exemple porte sur l'addition dans les naturels (niveau: CP-CE1). C'est une suite de leçons qui illustre 3 points: le travail sémantique, le travail syntaxique, et la construction axiomatique.
Le travail sémantique. Brousseau rappelle d'abord qu'un cardinal est interprété par une grande boîte, dont certaines ont reçu un signe : 11, 9, 8, 6, 3, 4, 2. D'autres n'ont pas de signe, par exemple celle que les adultes noteraient 14, bien qu'elle contienne déjà plusieurs collections et qu'on sache en construire d'autres allant dans cette boîte.
Un exemple d'activité est l'écriture du cardinal d'une collection nombreuse. Le problème posé aux enfants est, devant une collection d'un grand nombre d'objets, de trouver un message permettant à d'autres enfants d'en réaliser une équivalente en nombre. Par exemple, on réunit 200 objets pour la classe entière, ce qui permet de faire 3 groupes, réunis autour de 3 grandes tables, et disposant chacun de plus de 60 objets.
Le but est d'arriver à des écritures du genre (5+4+5+3+2+8+10), mais aucune idée correcte n'est refusée (des exercices préalables de bijection entre ensembles nombreux ont mis en évidence l'avantage de regrouper en sous-ensembles).
Les résultats que l'on peut obtenir :
- un enfant sait compter (très rare) dans l'un des groupes;

- une répartition des objets entre les individus : chacun compte les siens;
- la construction de sous-ensembles de 5.

Dans le deuxième cas on peut introduire tout naturellement l'écriture souhaitée : (5, 8, 4, 8, 7, 1, 2, 2). Et dans le troisième cas on obtient : (5, 5, ..., 5, 8). On peut se contenter de ces écritures (et admettre et).

Le travail syntaxique :

- on indique que l'écriture habituelle est 5+8+4+8+7+12+5;
- l'emploi du signe + permet d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels;
- les enfants s'aperçoivent que 6+3+5 et 8+6 désignent la même boîte. On sait écrire 6+3+5 = 8+6;
- on peut comparer des écritures additives : 9+9+8+3+6 et 4+5+3+8+9+6;
- on peut réduire des écritures et faire des substitutions formelles.

Pour ce dernier point on revient à un travail sémantique, par exemple par le jeu des télégrammes. Ce jeu consiste à transmettre le plus rapidement possible l'information 3+4+6+8+2 (= nombre de bijoux). S'il y a course de relais, il y a intérêt à réduire le message : 7+6+8+2 ---> 7+6+10 ---> 13+10 ---> 23 ---> 23. On justifie ces réductions successives par un arbre des calculs.

Le début d'axiomatisation. On obtient un répertoire d'égalités. Grâce à des substitutions formelles, on obtient de nouvelles égalités. Par exemple, à l'aide de 3+4=7 on construira 3+4+1=7+1 directement, ou encore 3+4+5=7+5. Ou bien au contraire, à l'aide 7+9+3=3+11+5 on affirme par simplification 7+9=11+5. Devant la prolifération des égalités, on a intérêt à réduire leur nombre, à les classer (table de Pythagore), à effacer certaines bien connues (mémorisation).

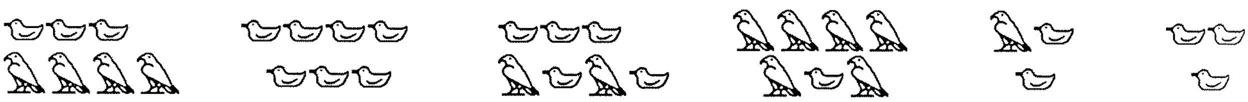
Cette réduction du répertoire d'égalités à un minimum d'axiomes et de schémas de constructions constitue en fait un début d'axiomatisation de la théorie des naturels.

2.2. Exemple adapté. Cet exemple concerne (aussi) l'introduction du signe + tel qu'il m'est arrivé de la pratiquer. Cette leçon s'adresse à des élèves de CP, et se situe vers la fin du premier trimestre à un moment où les enfants savent écrire les premiers nombres.

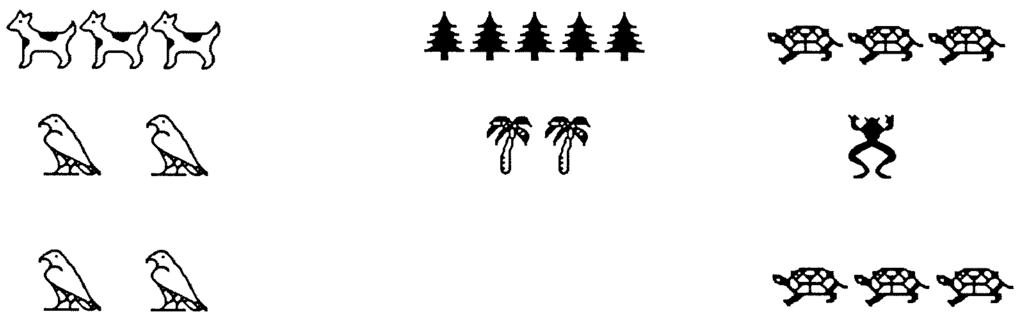
Le principe consiste à coder numériquement une collection, choisie parmi d'autres, pour qu'un camarade (ou groupe de camarades) n'ayant pas participé au choix puisse retrouver la collection choisie.

Dans un premier temps, on peut proposer des collections toutes numériquement différentes, par exemple:

Les enfants qui choisissent l'une des collections la redessinent sur un papier (pour permettre un contrôle ultérieur). Le jeu ne présente ainsi guère de difficultés puisque le message numérique "6" par exemple permet d'identifier sans ambiguïté la 3ème collection.
Pour rendre le jeu plus "intéressant", la maîtresse change alors les collections et propose par exemple:



Cette fois-ci les enfants, s'ils se contentent de coder la collection choisie (dans les 4 premières) par 7, produiront un message ambigu pour les décodeurs. Comme toutes les collections de 7 diffèrent par leur décomposition additive, il est possible de les coder numériquement et sans ambiguïté par une écriture du type 5 , 2 (pour la troisième). On peut, après utilisation de tels codages non conventionnnels, finalement dire que le signe habituel que l'on met est +.
L'écriture additive est ainsi introduite pour résoudre un problème pour lequel l'écriture usuelle s'avère insuffisante, alors que dans une didactique plus classique on aurait présenté des collections comme :



en demandant, par exemple pour la première ou la dernière, le nombre d'animaux. Or, à ce stade de l'apprentissage, les enfants savent répondre à cette question sans qu'il y ait besoin

d'une nouvelle notion, celle que la maîtresse veut précisément introduire. En conséquence, les élèves proposeront 3 + 4 non pas pour indiquer le nombre d'animaux de la première collection - et donc résoudre le problème posé - comme cela était demandé, mais parce que c'est le jour ou l'on apprend le + (si la maîtresse ne l'a pas dit explicitement, les élèves essaieront de le deviner, à des indices indirects).
Cet exemple peut servir à illustrer les 3 phases du processus de mathématisation: en début de jeu, les enfants choisissent, dessinent, réfléchissent et inventent (= <u>actions</u> mentales); puis ils <u>formulent</u>, en langage mathématique - non conventionnel d'abord, conventionnel ensuite - leurs solutions; enfin, en cours d'action, lorsque des récepteurs décodent "mal" un "bon" message, on peut aussi tomber sur d'authentiques (parce que la validation empirique obtenue par comparaison entre la collection identifiée par les récepteurs et celle dessinée par les émetteurs est insuffisante) situations de <u>validation</u> : les proposants doivent "prouver" la pertinence de leur modèle. Egalement, il peut illustrer un point de didactique générale sur lequel Brousseau (1981, p.100) a insisté. Ce point est le suivant : dans les situations de recherche, la pédagogie classique conduit le maître à exploiter immédiatement ou presque la «bonne» déclaration. Et alors, pour 80% d'enfants - les moins vifs et précisément ceux qui sont obligés de chercher, i.e ceux pour qui la solution n'est pas directement disponible - la recherche est sanctionnée négativement. Ici, le fait qu'un groupe ait trouvé une "bonne" solution n'empêche pas un autre de continuer à écrire des messages ambigus et, sous l'influence de la rétroaction à laquelle conduit la vérification, à chercher des solutions meilleures. Enfin, on peut voir dans l'introduction du signe usuel + une <u>institutionnalisation</u> externe (voir le 4.1. ci-après).

3. <u>Commentaires-critiques</u>.

3.1. Pourquoi <u>exclusivement</u> des **dialectiques** ? Brousseau, lorqu'il introduit le terme, vient de décrire une phase dialectique et conclut, de manière générale, que **<u>c</u>'est un processus dialectique**. Qu'il puisse y avoir des phases dialectiques dans la construction des connaissances est quasiment admis par tout le monde. Mais la question importante est de savoir si la construction de <u>toute</u> connaissance mathématique est <u>d'emblée</u> et demeure <u>constamment</u> dialectique, *«comme s'il n'existait pas, entre les phases de construction dialectique, des phases d'équilibre au cours desquelles la simple logique discursive suffirait à dégager les conséquences nécessaires d'affirmations et négations qui les contenaient d'avance»*. Piaget

(1980, que je viens déjà de citer), au terme de 60 ans de réflexion sur le sujet, a essayé de démystifier la dialectique en sa signification courante en soulignant notamment que «*la dialectique constitue l'aspect inférentiel de tout processus d'équilibration, tandis que les systèmes équilibrés ne donnent plus lieu qu'à des inférences discursives, d'où une alternance continuelle, mais à durées variables, entre ces deux phases de construction dialectique et d'exploitation discursive*».

3.2. Une seconde critique concerne la possibilité d'adaptation (de tous les élèves) par essais et erreurs. En effet, El Bouazzaoui (p.133) laisse entendre que l'enfant arrive à "voir" ses erreurs. Or l'école piagétienne a lourdement insisté sur le fait que les constats empiriques sont «***illisibles** tant qu'on ne peut les assimiler à un cadre de référence préalablement constitué*» (Gréco, 1963). On peut par exemple rappeler la très belle expérience de Piaget et Inhelder dans la *Représentation de l'espace* (1948), reprise par Smedslund et résumée par Gréco comme suit : à des enfants de 5-7 ans, on présente un bocal contenant un liquide coloré, et on leur demande de dessiner le niveau du liquide quand le bocal aura été diversement incliné. A ceux qui ne prévoient pas l'horizontalité, on demande de bien observer le niveau du liquide tandis qu'on incline effectivement le bocal. Puis, on recommence l'épreuve de prévision: les améliorations sont quasi nulles, et n'apparaissent pas davantage si l'enfant, au lieu de dessiner, doit choisir entre plusieurs dessins modèles. Pour Gréco, constater la permanence de l'horizontalité exige en effet des mises en relation entre le niveau actuel et un cadre de référence spatial extérieur au bocal. Or ce cadre qui repose sur une structure représentative, ne saurait être tiré des constatations que son absence rend, du reste, impossibles ou incertaines. Cette expérience valait d'être citée, car on aurait pu croire a priori que la tâche se bornait à une lecture, à une appréhension perceptive directe du donné extérieur.

Le même Gréco, mais se référant cette fois-ci à une de ses propres expérimentations - L'inversion de l'ordre linéaire par des rotations de 180° - distingue un apprentissage empirique orienté vers les simples constats de fait d'un apprentissage structural. Le premier n'aboutit qu'à des savoirs provisoires, rapidement perdus et qui ne sauraient donc se généraliser ou se transposer de façon durable à des situations apparentées. Et le second, précisément, **ne procède pas par essais et erreurs**.

Et, pour en venir au maître, il a clairement indiqué (dans Piaget, 1959) la forme des relations entre équilibration et apprentissage : l'équilibration constituerait une condition nécessaire (mais non suffisante) de l'apprentissage en ce sens que tout apprentissage suppose l'intervention de réactions non apprises tendant à son équilibration.

En clair, ne peuvent apprendre (une notion précise) que les enfants qui ont un niveau "suffisant" pour apprendre (cette notion). Ceci est la réponse fondamentale (d'après Piaget, en introduction) fournie par les recherches de Inhelder et al. (1974) : «*la nature des progrès, de même que leur importance, sont toujours et de façon frappante fonction du développement du sujet, en d'autres termes des instruments d'assimilation qui lui sont propres* » écrivent-elles en conclusion de leur livre..

Remarque. A propos de l'expérience sur l'horizontalité, et de l'interprétation qu'en donne Gréco, je voudrais souligner que l'on dispose aujourd'hui de modèles ou hypothèses neurophysiologiques suffisamment précis (Crick, 1984; Harth et Unnikrishnan, 1985) pour comprendre comment peut se produire une telle curiosité: deux enfants (ou adultes) à qui l'on montre pourtant des choses tout à fait identiques, "voient" tout à fait autre chose !

3.3. Comme la plupart des théories générales, celle de Brousseau est essentiellement adaptée aux exemples qui l'ont générée. Par exemple, aux tout débuts de l'enseignement - la petite section de maternelle - on voit mal comment pourrait fonctionner les dialectiques de la formulation et de la validation. Ces dernières nécessitent en effet une coopération entre les enfants. Et l'on sait bien (cf. Zazzo, 1981) que l'enfant, bien avant d'être capable de faire avec l'autre, fait - par imitation, par besoin de synchronie - comme l'autre. Ou encore que le rythme, parce que le cerveau du mammifère perçoit le rythme tout de suite et partout (Robert, 1982), joue - à ce niveau de la scolarité - un rôle essentiel dans l'acquisition des connaissances.
La théorie de Brousseau ne convient pas non plus pour des élèves plus âgés lorsque l'apprentissage concerne des notions vraiment nouvelles. En effet, la dialectique de l'action, qui est censée donner du sens au savoir construit et qui est d'ailleurs la dialectique la plus générale (les autres n'en sont que des cas particuliers: cf. Brousseau, 1983 p.181), ne peut pas, dans un tel cas, y parvenir: si on a une idée tout à fait nouvelle on ne peut pas la comprendre !!! (Piaget, 1972).

3.4. Enfin, un commentaire sur la validation. La validation par constat empirique, ou observation, est certainement importante en science. Par exemple, Dart et Pradhan (1967) avaient publié un article sur l'enseignement des sciences en s'appuyant notamment sur l'observation de communautés népalaises. Cette dernière les a conduits à remarquer que, dans de telles communautés, la vue prédominante est que les connaissances humaines sur la nature constituent un corps fermé, rarement ou jamais extensible, qui est transmis du maître à l'élève et d'une génération à l'autre. Et surtout, que sa source est l'**autorité**. En fait, soulignent Dart et

Pradhan, l'expérience ou l'observation n'est jamais directement suggérée comme critère approprié ou irrécusable de la validité d'un énoncé, ou de sa source. Si l'on considère alors que, comme le soulignent aussi ces deux auteurs, la science ne consiste pas en un corps de faits plus ou moins isolés à mémoriser, mais en un système de relations empiriquement vérifiables entre des concepts plus ou moins abstraits, il devient clair qu'une éducation scientifique doit accorder une place de choix à la validation empirique. Pour les mathématiques se posent cependant le problème de l'insuffisance d'une validation empirique : les expériences physiques ne conduisent en effet qu'à une abstraction empirique, alors que les notions mathématiques nécessitent, selon Piaget, une expérience logico-mathématique conduisant à une variété particulière d'abstraction (l'abstraction réfléchissante, voir cours sur Piaget). Plus pragmatiquement, se pose aussi souvent le problème de la validation d'idées fausses. Sur ce dernier point, on peut mentionner un exemple bien connu: lorsque des enfants doivent reconstruire une figure géométrique à partir d'un message descriptif envoyé par des camarades, et que la validation consiste en la vérification de la superposabilité des deux figures (l'originale décrite par un groupe et la figure reconstruite par l'autre groupe), il arrive très souvent que des messages descriptifs tout à fait insuffisants conduisent néanmoins à des reconstructions tout à fait exactes, et donc à une validation des codage et décodage, par le fait que certaines idées fausses - un carré a ses côtés parallèles aux bords de la feuilles, etc... - sont communes aux deux groupes.

4. L'institutionnalisation

La phase d'institutionnalisation a été rajoutée par la suite (Brousseau, 1981) au processus initial. L'institutionnalisation du savoir consiste à l'extraire du contexte dans lequel il est apparu pour devenir autonome, négociable avec d'autres. Elle transforme une expérience en un savoir exportable (Brousseau, 1984a). Plus généralement, «*les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique* » (Brousseau, 1981 p.113). Par exemple, la consigne (lors d'un jeu) nécessite elle aussi une institutionnalisation : c'est alors l'acte social

par lequel le maître et l'élève reconnaissent la dévolution (il faut faire quelque chose pour gagner). Le problème se négocie avec la classe. C'est ce qui distingue (selon Brousseau, 1984a) une situation sadique de mise en échec de l'élève d'une situation honorable d'apprentissage.
Pour illustrer cette question de la consigne, je voudrais citer un exemple que j'ai pu observer dans une maternelle (petite section). La maîtresse voulait jouer au chat et à la souris avec ses très jeunes élèves: elle expliqua que c'est elle qui était le chat, et eux les souris. L'insuffisance des consignes - ou plutôt l'insuffisance du travail préparatoire, car les enfants (qui venaient de grands immeubles environnant l'école) ne savaient visiblement pas encore qu' un chat croque les souris - a totalement fait échouer le jeu: tous les enfants, dès le début du jeu, se sont précipités dans les bras de la maîtresse ! Peut-on parler de sadisme ?

5. <u>Le contrat didactique</u>

5.1. Pour Brousseau, les raisons des échecs électifs ne sont pas, comme les parents le croient encore souvent, dans des déficits organiques (troubles psychomoteurs, troubles du langage, dyslexie ou débilité mentale,...). Elles tiendraient principalement à un mauvais fonctionnement du «*contrat didactique* ».
Le **contrat didactique** est l'ensemble des comportements attendus du maître par l'élève, et réciproquement l'ensemble des comportements attendus de l'élève par le maître. Que faut-il savoir faire ? A quoi voit-on qu'on a réussi ? Qu'est-ce qu'il faut dire ? Qu'est-ce qu'on aurait pu faire d'autre ? Qu'est-ce qu'il faut apprendre ? Qu'est-ce qui aurait été une erreur ? Etc. C'**est** en quelque sorte **la règle du jeu par laquelle passe l'enseignement.**
Les maîtres seraient alors responsable des échecs : «*Il y a de mauvais contrats,* précise Guy Brousseau. *Quand le maître accorde de l'importance à des choses qui n'en ont pas, quand il véhicule une conception erronée du fonctionnement des mathématiques* ». (source: Le Monde de l'Education, déc.1980). En fait (cf. Brousseau, 1984b p.101), ce sont les <u>ruptures</u> du contrat qui sont importantes.
Plus récemment, Brousseau (1984a) a aussi souligné qu' «*il y a eu beaucoup de malheur avec le concept de contrat didactique* », et dit (avec regret) que «*pour certains professeurs, c'est devenu ce qu' on doit convenir avec l'élève* » et qu'«*il y a alors des bons et des mauvais contrats* ». Mais comme le montre la citation ci-dessus c'est lui-même qui a appliqué - même si

c'est, peut-être, avec des critères différents - le qualificatif **mauvais** au contrat !!!

5.2. La (ou en tout cas une des) recherche principale qui a conduit Brousseau à introduire la notion de contrat didactique est une recherche sur les enfants en échec **électif**. Dans un papier résumant cette recherche, Brousseau (1980) indique que le pourcentage de tels enfants (si on prend pour source les appréciations des maîtres) n'est que de 6% et, qu'en 3 ans, il n'a pu étudier que 5 cas. Il pense que la cause de ces échecs électifs est plutôt à chercher du côté des contrats. Pour arriver à une telle conclusion, il élimine l'approche médicale - qu'il limite à la dyscalculie (infantile)- en expliquant qu'elle ne repose pas sur des connaissances scientifiques, une critique qui, si elle est peut-être vraie, a néanmoins le tort de passer sous silence le fait qu'il existe des approches hautement scientifiques des difficultés électives en mathématiques (hautement scientifique si les mots ont un minimum de sens, en particulier si la revue Science publie des articles de science: voir par exemple John et al., 1977) et n'est pas suffisante pour prouver que l'approche de Brousseau est «objective», «scientifique» et «raisonnée», comme il le laisse entendre dans son papier.

6. La théorie des situations

6.1. La théorie des situations didactiques est la version plus actuelle, i.e avec la composante institutionnalisation et avec un vocabulaire parfois un peu autre, de son processus de mathématisation. Chevallard et Mercier (1984) la décrivent ainsi:
Elle distingue a priori quatre grands types de situations, en fonction du type d'interaction que les élèves ont avec le savoir: situations d'**action**, situations de **formulation**, situations de **validation**, situations d'**institutionnalisation**. L'élève y est respectivement confronté à la résolution d'un problème, à la nécessité de communiquer sa réponse, à la construction d'une solution contre d'autres réponses possibles, enfin à la reprise, par l'enseignant, de l'ensemble des résultats dégagés (en termes de notions, de méthodes, etc.). Ces conditions semblent être les conditions minimales pour que l'on puisse affirmer que l'élève dispose (localement au moins) d'une notion qu'il aura produite et qu'il se sera approprié.
Notons aussi que, vraisemblablement sous l'influence des travaux de Balacheff, la situation (ou dialectique) de validation est souvent appelée situation de **preuve**, mais il ne semble pas qu'il y ait une distinction nette entre les deux (voir Balacheff, 1984 p.109).

6.2. Le concept de rétroaction. Selon El Bouazzaoui (1983, p.179) une bonne situation d'apprentissage est celle où il y a rétroaction (feed-back). Mais pas n'importe quelle rétroaction: la rétroaction introduite de manière arbitraire et extérieure - il est demandé à l'élève de recommencer, de vérifier, etc... - n'a visiblement pas les faveurs de l'auteur qui souligne qu'une telle vérification ne prouve pas que c'est juste. La bonne rétroaction est celle où le sujet contrôle l'action. Par exemple - je résume, simplifie et change (*écrire* est remplacé par *dessiner* (un nombre de cubes)) l'illustration proposée par El Bouazzaoui - pour dessiner une collection de cubes, les élèves peuvent compter le nombre de cubes et faire le même nombre de dessins: ils peuvent alors contrôler leur production dessinée en faisant correspondre un cube à chaque dessin. Autrement dit, pour qu'une telle rétroaction soit possible, il faut que l'élève dispose d'un modèle "sophistiqué" M_1 - ici le comptage des deux collections - et d'un autre M_2, plus primitif, - ici la correspondance 1 à 1 - qui permet le contrôle du premier.

6.3. Commentaire (sur le concept de rétroaction). A propos des exemples précis proposés par El Bouazzaoui, on peut souligner deux limitations de ce contrôle par le sujet de ses propres actions. La première provient du fait que la bonne rétroaction ne peut se produire que lorsque le sujet améliore un savoir ancien (et non pas lorsqu'il apprend quelque chose de nouveau), puisqu'il a besoin de disposer d'un modèle primitif. Ceci est masqué par le fait que les deux exemples de rétroaction ne portent pas sur une même tâche: dans le cas de la mauvaise rétroaction, le sujet doit dire le nombre, alors que dans l'exemple de bonne rétroaction il peut dessiner (et El Bouazzaoui utilise précisément ici le terme *écrire* que je me suis permis de ne pas réutiliser car il me paraît trompeur) la collection. De plus, on peut souligner que le problème de la preuve (que c'est juste) n'est pas mieux résolu: si un enfant compte en faisant la même erreur de comptage, ce n'est certainement pas la correspondance 1 à 1 qui lui permettra de détecter les erreurs de comptage (ou d'améliorer sa suite idiosyncrasique de nombres). Au contraire, le feed-back positif - il gagne au jeu ! - risque de le conforter dans ses erreurs.
Plus généralement, je voudrais dire que le concept de rétroaction est certainement important dans l'apprentissage, mais que, importé de la théorie des systèmes, ou de son importante sous-branche la cybernétique, il a malheureusement donné lieu à beaucoup de "science" facile. Et je ne suis pas le seul à le penser : Jacques Attali (Le Monde du 12/13.01.86) a, récemment et joliment, condamné cette dérive en parlant de *cette fausse «science des systèmes» qui va de San Diego au Luberon sans jamais passer par le réel.* Bien que cela soit moins connu,je voudrais aussi dire que des modèles détaillés de rétroaction avaient été élaborés très tôt par les physiologistes, en particulier le principe de réafférence de von Holst (d'après von Bertalanffy,

1968) : ces modèles, beaucoup plus précis aujourd'hui, permettent de commencer à comprendre certains phénomènes perceptivo-cognitifs (voir ma remarque du 3.2.).

7. Autres élaborations

7.1. La notion de **variable didactique**. Lorsque le didacticien construit une situation pour, par exemple, l'apprentissage des premiers nombres, il peut jouer sur certaines variables (qualifiées alors de didactiques) : la nature des objets, leur forme, leur disposistion, le temps d'exposition de la collection, etc... S'il fixe bien ces variables, il peut alors arriver à des situations qui "contraignent" l'élève à aller dans le sens de l'apprentissage visé : par exemple, dans le 2.1., c'est en jouant sur la variable *taille des collections* que Brousseau a fait émerger des écritures additives.

7.2. La notion de **saut informationnel**. Au début de l'apprentissage des premiers nombres (maternelle et début de CP) les élèves disposent essentiellement de deux modes de comparaison numérique des collections : le comptage et la bijection. Si le maître veut faire évoluer ces procédures, il peut augmenter la taille (numérique) des collections à comparer. Mais s'il l'augmente petit à petit les élèves continueront à utiliser les anciennes procédures en les améliorant (comptage mieux organisé par exemple). D'où l'idée de saut, i.e d'une augmentation brutale de la taille des collections à comparer: ainsi on peut bloquer ou, pour le moins, décourager, l'utilisation des procédures anciennes et favoriser l'émergence de procédure nouvelles (ici la comparaison à l'aide d'une correspondance paquet à paquet).

7.3. La notion d'**obstacle épistémologique**. Elle est inspirée par le philosophe Bachelard, en particulier de son célèbre (que je n'ai pas lu!) ouvrage *La formation de l'esprit scientifique* . Par exemple, Brousseau (1981, p.72) voit dans la prégnance du modèle additif (les enfants de CM devait agrandir un tangram en respectant des proportions "difficiles": 7/4) un obstacle épistémologique. Personnellement je ne vois pas clairement pourquoi cet obstacle serait plutôt épistémologique que génétique (revoir l'exemple1 du chapitre sur Piaget, p.23-24), mais ne voudrais pas entrer dans un débat déjà controversé (voir Brousseau, 1983; Glaeser, 1981 et 1984) ! Par contre, je voudrais encore souligner que Brousseau (1984b) a fait du franchissement d'un obstacle épistémologique - ou au moins du rejet d'une erreur - la base de toute acquisition du savoir, un postulat que je n'ai pas (à cause de mes observations et conclusions sur l'acquisition du principe cardinal) envie d'admettre (dans sa généralité).

8. Références

Balacheff N., 1984. Processus de preuve et situations de validation. In IIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (Recueil des textes et comptes rendus). Grenoble: IMAG.

Bertalanffy (von) L., 1968. Théorie générale des systèmes. Paris: Dunod, 1973.

Brousseau G., 1972a. Processus de mathématisation. In *La mathématique à l'école élémentaire*. Paris: APMEP.

Brousseau G., 1972b. Un exemple de processus de mathématisation: L'Addition dans les naturels : C.P.-C.E.1. *In La mathématique à l'école élémentaire*. Paris: APMEP.

Brousseau G., 1980. L'échec et le contrat. Papier présenté à la Ière Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (Chamrousse).

Brousseau G., 1981. Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2**, 37-127.

Brousseau G., 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4**,165-198.

Brousseau G., 1984a. Le rôle du maître et l'institutionnalisation. In *IIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (Recueil des textes et comptes rendus). Grenoble: IMAG.

Brousseau G., 1984b. Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. In *IIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (Recueil des textes et comptes rendus). Grenoble: IMAG.

Chevallard Y. et Mercier A., 1984. La notion de situation didactique. In *IIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (Recueil des textes et comptes rendus). Grenoble: IMAG.

Crick F., 1984. Function of the thalamic reticular complex : The searchlight hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Science*, **81**, 4586-4590.

Dart F.E. et Pradhan P.L., 1967. Cross-cultural teaching of science. *Science*, **155**, 649-656.

El Bouazzaoui H., 1982. Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions. Thèse : Université de Bordeaux I.

Glaeser G., 1981. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2**, 303-346.

Glaeser G., 1984. A propos des obstacles épistémologiques: réponse à Guy Brousseau. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **5**, 229-234.

Gréco P., 1963. In P.Fraisse , J.Piaget (Eds), *Traité de Psychologie Expérimentale n°VII:*

L'intelligence. Paris: PUF (1963-1965).

Harth E. et Unnikrishnan K.P., 1985. Brainstem control of sensory information: a mechanism for perception. *International Journal of Psychophysiology*, **3**, 101-119.

Inhelder B., Sinclair H. et Bovet M., 1974. Apprentissage et structure de la connaissance. Paris: PUF.

John E.R. et al., 1977. Neurometrics. *Science*, **196**, 1393-1410.

Piaget J., 1959. Apprentissage et connaissance. In M.Goustard, P.Gréco, B.Matalon, J.Piaget (Eds), *La logique des apprentissages*. (vol.10 des EEG). Paris: PUF.

Piaget J., 1972. Jean Piaget, ce psychologue de l'intelligence: Comment l'esprit vient aux enfants. Article de Y. Hatwell dans Le Monde (21 déc. 1972).

Piaget J., 1980. Les formes élémentaires de la dialectique. Paris: Gallimard.

Robert J.M., 1982. Comprendre notre cerveau. Paris : Seuil.

Zazzo B., 1981. Les facteurs scolaires d'adaptation des enfants des petites sections. In *AGIEM: 54 ème Congrès des Ecoles Maternelles* (Lille, 24-27 juin 1981).

La théorie de Papert

1. Biographie de Papert

1.0. Papert est un mathématicien, cybernéticien et psychologue (cf. Piaget, 1967) sud-africain né en 1928.

1.1. Son séjour à Genève et sa contribution aux EEG

Papert débarquait à Genève en 58/59. Il venait de l'Institut Poincaré et a été influencé par l'oeuvre du grand mathématicien français malgré sa logique authentiquement cambridgienne (d'après Piaget, 1960). Il a contribué à plusieurs volumes des Etudes d'Epistémologie Génétique :

- le volume 11 sur les *Problèmes de la construction du nombre* ;
- le volume 15 sur *La filiation des structures* ;
- le volume 21 sur les *Perception et notion du temps* ;
- le volume 22 sur *Cybernétique et épistémologie* .

Curieusement, il n'a pas contribué au volume 17 sur *La formation des raisonnements récurrentiels* . Curieusement parce que dans le volume 11 (daté de 1960) il s'était précisément intéressé à la récurrence. Il avait notamment suggéré cinq paliers (ici décrits d'après Piaget, 1960) :

1) Le raisonnement du vrai au vrai, passant de F(1) à F(2) et de là à F(3) et ainsi de suite mais de proche en proche et sans la généralisation contenue dans le symbole «etc.» ou dans celui que constituent trois points de suspension (...).

2) La généralisation inductive simple.

3) La généralisation dépassant l'induction.

4) Le sujet se convainc de F(n) comme s'il avait compté jusqu'à n (n étant un nombre donné, imaginé ou représenté selon un mode concret). Le progrès est ici de pouvoir «s'insérer» ou «se déplacer» dans la suite des entiers. Papert suppose à cet égard que cette opération de «faire comme si l'on a compté jusqu'à n» n'est pas la seule voie possible à ce niveau, une autre qu'il suppose équivalente étant le retour au principe selon lequel tout sous-ensemble d'entiers comporte un plus petit élément.

5) L'opération (4) est employée de façon réversible et en combinaison avec d'autres opérations. Cas particulier

important : l'opération (4) est insérée dans un raisonnement par l'absurde.

Tout ceci reste bien théorique et, par exemple, Martin a proposé pour sa part, en discussion des 5 paliers de Papert, 3 paliers :

1) Le passage du vrai au vrai, par exemple P(3)-->P(4)

2) Le passage P(n)-->P(n+1) sans (n)P(n) (pour tout n, la propriété P(n) est vérifiée)

3) $\left.\begin{array}{l}(n),P(n) \dashrightarrow P(n+1)\\ P(0)\end{array}\right\} \dashrightarrow (n)P(n)$

Papert ayant affirmé tantôt que le nombre quelconque n est nécessaire à la récurrence, tantôt que la récurrence est nécessaire à n, un des participants au symposium s'est quand même demandé s'il n'y avait pas là cercle et si, pour le lever, on ne pourrait pas dire que la récurrence est nécessaire axiomatiquement au nombre quelconque, tandis que celui-ci serait nécessaire génétiquement à la récurrence (ou l'inverse ?). Beaucoup de participants avaient évidemment un avis sur la question, mais si toutes leurs réflexions témoignent de l'intensité des échanges à Genève aux débuts des activités du Centre (International d'Epistémologie Génétique), ils ne nous renseignent, à vrai dire, que fort peu sur la genèse des raisonnements récurrentiels.

Pour terminer, je mentionnerai l'article intitulé «*Etude comparée de l'intelligence chez l'enfant et le robot* » écrit par Papert dans le volume 15 des EEG. Dans cet article, il a imaginé un modèle mathématique - le «*génétron* » - , ainsi nommé parce que proche des données génétiques, dans lequel l'équilibration s'effectue par étapes, un certain niveau d'équilibre devant être atteint au palier n pour que les combinaisons opératoires nouvelles du palier n+1 soient rendues possibles (d'après Piaget et Inhelder, 1963).

1.2. <u>Ses articles dans *Logique et connaissance scientifique*</u>

Papert a également écrit plusieurs articles dans *Logique et connaissance scientifique* (Piaget, 1967), un volume de 1345 pages de l'Encyclopédie de la Pléiade. Les titres de ses 4 contributions sont :

1) Méthodes techniques et problèmes épistémologiques

2) Structure et catégorie

3) Epistémologie de la cybernétique

4) Remarques sur la finalité

Comme le suggèrent les titres, ces écrits n'ont pas d'intérêt direct pour une théorie de l'apprentissage. De plus, quelques-unes des réflexions neuropsychologiques que l'on peut y trouver n'ont plus qu'un intérêt "historique" : par exemple, les théories qui postulent une représentation physiquement isomorphe de l'espace dans le cerveau (et auxquelles Papert fait allusion) sont aujourd'hui abandonnées.

1.3. Son échec (avec Minsky) au perceptron

Il faut d'abord rappeler que c'est dans les années cinquante que des chercheurs s'inspirant de la cybernétique tentèrent de développer, dans le domaine électronique, des modèles qui reproduisent certains processus humains, en particulier la reconnaissance des formes. Le perceptron est la plus simple de ces machines.

Un perceptron est constitué tout d'abord d'une "rétine". Cette rétine comporte un ensemble de cellules photosensibles constituant une grille de dimensions finies. Les cellules de cette rétine, comme celles de l'oeil humain, sont activées dès qu'elles reçoivent assez de lumière; autrement elles restent au repos. Schématiquement, l'image analysée par le perceptron est une grille de carrés clairs et foncés (voir figure 1). Outre sa rétine, le perceptron possède un grand nombre d'organes logiques rudimentaires: des "démons locaux". Chaque démon local analyse un petit groupe de cellules de la rétine et transmet l'information obtenue à un décideur: le "démon chef". Plus précisément, chaque démon local possède une liste de motifs particuliers dont il doit guetter l'apparition dans le groupe de cellules qu'il analyse. Si et seulement si l'un quelconque des motifs particuliers apparaît, le démon local envoie un message numérique au démon chef qui, pour sa part, totalise tous les messages numériques après pondération (suivant l'importance du démon local qui l'a émis). Lorsque la somme obtenue atteint un certain seuil fixé à l'avance, le démon chef répond "oui"; sinon il répond "non".

En 1969, Minsky et Papert ont publié un livre intitulé *Perceptrons* qui leva un lièvre dans la mesure où il démontrait qu'il existe un certain nombre de tâches fondamentales que les (ou certains) perceptrons ne peuvent pas accomplir. L'une d'elles est de reconnaître si une figure est ou non simplement connexe. La démonstration donnée par Minsky et Papert mérite d'être rapportée.

Supposons que quelqu'un prétende avoir construit un perceptron à champ limité capable de déterminer si une figure est ou non simplement connexe. L'expression "champ limité" signifie que chaque démon local ne peut observer qu'une fenêtre de dimension bien déterminée (de m x m cellules). Pour tester le perceptron, on dessine les 4 motifs de la figure 3 (dont la longueur est > m). Les démons locaux peuvent alors être classés en 3 ensembles disjoints: les démons de Gauche (resp. Droite) sont ceux qui analysent au moins une cellule du bord gauche (resp. droit) du dessin. Les démons d' Ailleurs sont ceux qui restent. Le démon chef totalise D, G et A. S'il répond correctement "non" pour 3a, on aura D+G+A < s (le seuil). On lui présente

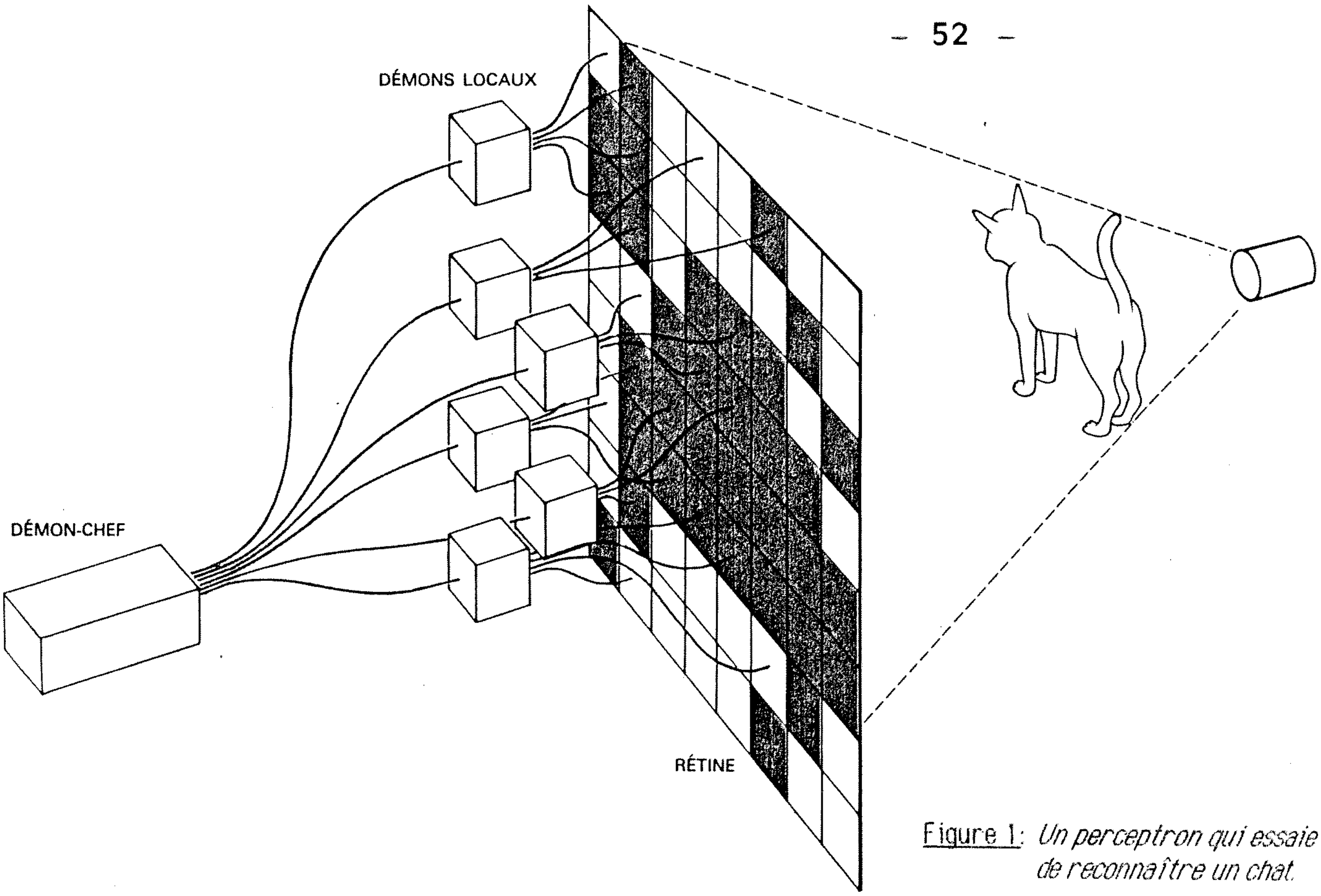


Figure 1: *Un perceptron qui essaie de reconnaître un chat.*

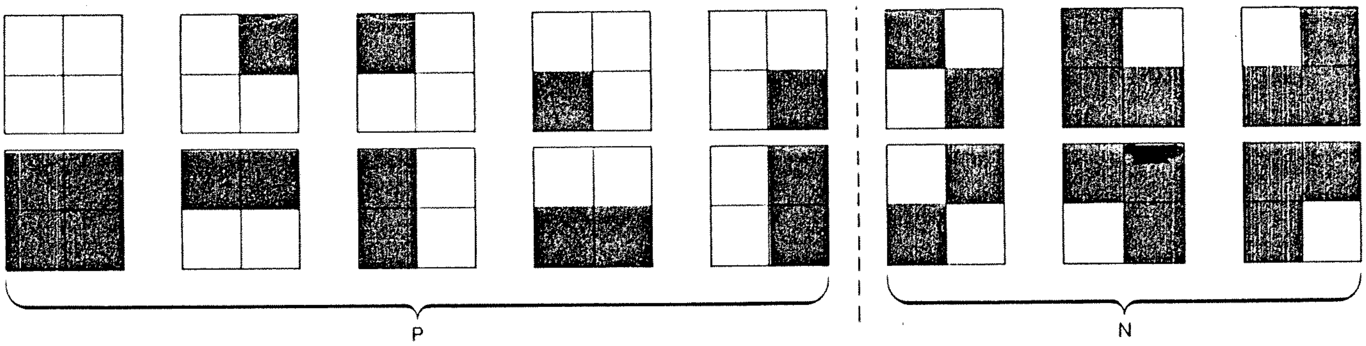


Figure 2: *Détails élémentaires reconnus par les démons locaux à poids positif (P) et à poids négatif (N).*

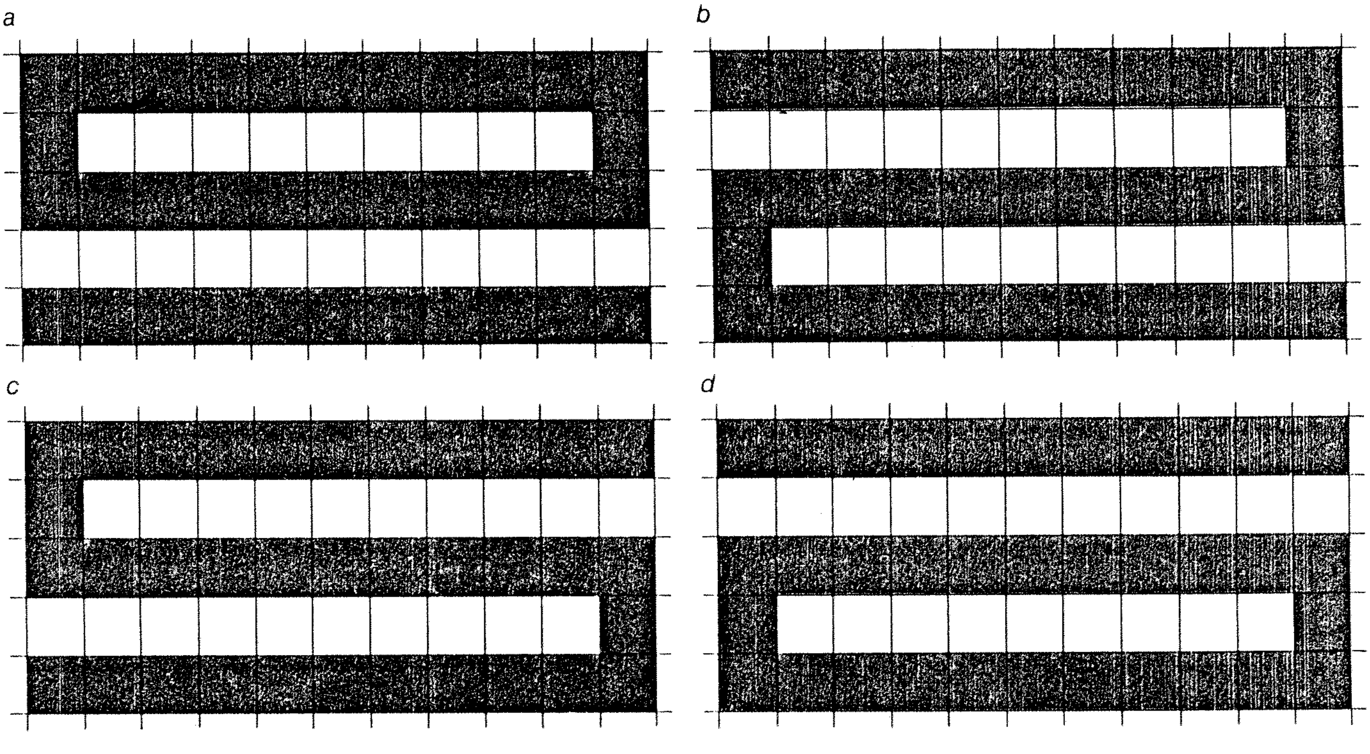


Figure 3: *Quatre figures conçues pour mettre en échec un perceptron qui reconnaît la connectivité.*

alors 3b : comme il n'y a que le bord gauche qui a changé, seul G a pu varier; s'il répond donc correctement "oui" on aura D+G'+A >= s. De même si on remplace 3a par 3c, on a D'+G+A >= s. Le perceptron se trouve maintenant piégé si on lui présente 3d, car la réponse correcte "non" amènerait à D'+G'+A < s ce qui est impossible ! (source principale du 1.3: Dewdney, 1985).

1.4. Son article (avec Solomon) : 20 choses à faire avec un ordinateur

Papert a exposé ses idées sur l'utilisation pédagogique des ordinateurs pour la première fois en 1971. Son papier (avec Solomon) contient déjà beaucoup des idées que l'on retrouvera dans son livre de 1980. Il contient même une idée qui a disparu par la suite et qui m'intéresse beaucoup : la mesure des Temps de Réaction. Papert et Solomon écrivent à ce propos :

« En prenant l'idée de "contrôle" plus sérieusement, on peut effectuer des expériences à perte de vue pour découvrir par exemple, quelles sont les multiplications les plus difficiles (par exemple : 1 x 1 est très facile, mais on pourrait être en désaccord pour savoir si 7 x 9 est plus facile que 8 x 6). »

Bien entendu, pour Papert et Solomon, ce sont les enfants qui écrivent les programmes.

Comme beaucoup de réformateurs, ils commencent par déclarer, en des termes à peine voilés, que les autres n'enseignent que des *sottises* . Ceci - si on l'accepte - laisse la porte grande ouverte à toutes les innovations !

1.5. Son livre *Jaillissement de l'esprit: Ordinateurs et apprentissage* (1980)

Le livre présente une argumentation assez complète en faveur d'une utilisation pédagogique du langage de programmation LOGO pour l'apprentissage des mathématiques notamment. Plus généralement, il défend une certaine conception de l'apprentissage : l'apprentissage *piagétien.*

En utilisant ce qualificatif Papert sait bien - puisqu'il le rajoute aussitôt - qu'il y a une incompatibilité majeure entre ce qu'il propose et la thèse de Piaget. Il faut en effet scotomiser l'aspect le plus présent de la théorie de Piaget : les stades. On - en particulier les pédagogues parce que l'acceptation des stades diminue leur pouvoir - a certes cherché à minimiser ce point de la théorie, mais Piaget lui-même est resté fidèle à cette approche du développement durant toute sa vie.

Ceci dit, on retrouve bien dans l'apprentissage piagétien de Papert une des "grandes" (au sens de fréquemment rappelée) idées éducatives de Piaget : l'enfant constructeur de ses propres connaissances.

Cette idée, que Piaget a par exemple exprimée dans sa célèbre formule:

«*Comprendre, c'est inventer* » (Piaget, 1971),
et/ou aussi par ses réflexions sur la construction des concepts mathématiques publiées dans une revue (Scientific American) de grande diffusion:
«*C'est une grande erreur que de supposer qu'un enfant acquière la notion de nombre et d'autres concepts mathématiques uniquement par l'enseignement. Au contraire, à un degré remarquable il les développe par lui-même , indépendamment et spontanément.* » (Piaget, 1953)
paraît un peu extrême et ne possède, à mon avis, qu'un domaine d'application limité : les aspects élémentaires du nombre que Piaget mentionne explicitement (j'ai d'ailleurs moi-même, avec Meljac (à paraître), repris la dernière citation de Piaget pour expliquer pourquoi, malgré de grossières erreurs, la réforme de 1970 n'avait pas empêché les enfants de maîtriser les nombres) et la géométrie intuitive essentiellement. Dès que les notions deviennent plus complexes, l'idée de Piaget devient beaucoup moins pertinente. Notons d'ailleurs que ce sont là - géométrie-tortue et arithmétique informelle - les deux seuls *micromondes* (voir le 3 suivant) que Groen et Kieran (1983) mentionnent explicitement.

2. La géométrie Tortue : les arguments de Papert

2.1. Arguments pédagogiques

2.1.1. Pour apprendre quelque chose, il faut y trouver un sens : la géométrie Tortue a été conçue pour ça.

2.1.2. L'apprentissage syntone : on peut dire, par exemple, qu'un cercle Tortue présente avec l'enfant une *syntonie corporelle*, en ce sens qu'il est en accord profond avec ce qu'il sait et ressent de son propre corps; sur un autre plan, il y a *syntonie du moi*, en ce sens qu'il (=le cercle Tortue) n'est pas venu de l'extérieur comme quelque chose d'imposé mais qu'au contraire qu'il est cohérent avec ce tout que forme l'enfant : un enfant qui trace un cercle Tortue a voulu tracer ce cercle; cette opération lui procure plaisir et fierté.

2.1.3. La géométrie Tortue offre un point d'appui pour d'autres apprentissages mathématiques car utilisation de stratégies d'apprentissage et de méthodes d'attaque face aux problèmes rencontrés.

2.1.4. En particulier, elle apprend un principe heuristique général - se ramener à une situation déjà comprise - en incitant l'enfant à faire comme si c'était lui la Tortue, à voir comment elle doit faire.

2.2. Arguments mathématiques

2.2.1. Les mathématiques scolaires

- effets relationnels et affectifs
- notion très claire de ce que signifie 45, 10 ou 360 degrés
- syntonie culturelle : lien angle-navigation
- notion de variable : penser aux dessins spiralés
- récursion : racines populaires (*«Si une fée te disait de faire deux souhaits, que devrais-tu demander pour le deuxième ?* » - Réponse : deux autres souhaits), idée d'infini,...
- le TTCT (=Théorème du Tour Complet Tortue) est plus efficace, plus général et plus intelligible que l'énoncé : «La somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180 degrés»

2.2.2. Les mathématiques de l'homme de demain

- calcul différentiel : sens profond (différentiel parce que AV 1 TG 1 nous renseigne sur la différence entre la position actuelle et la position suivante);
- géométrie intrinsèque : non liée à un système de coordonnées;
- notion de courbure : un exemple de notion «complexe» sous une forme facile à saisir.

2.3. Commentaire sur les règles heuristiques de Polya

Dans son argumentation, Papert se réfère à l'oeuvre de Polya. Je présente ici un schéma (emprunté à Zech, 1977) des règles heuristiques suggérées par cet auteur.

I) Pour la compréhension de l'exercice

a) Qu'est-ce qui est inconnu ? Qu'est-ce qui est donné? Quelle est la teneur de la condition?

b) Dessine une figure ! Introduis une désignation adéquate !

II) Pour la conception d'un plan

a) Connais-tu un exercice parent ? Connais-tu un théorème qui pourrait être utile ?

b) Sais-tu formuler l'exercice autrement ?

c) Retourne à la définition !

d) Si tu n'arrives pas à résoudre l'exercice présenté, essaie d'abord de résoudre un exercice parent, un exercice plus spécifique. Arives-tu à résoudre une partie de l'exercice ?

e) Arrives-tu à tirer quelque chose d'utile des données ? As-tu utilisé toutes les données ?

III)Pour la mise en oeuvre du plan

Quand tu mets en oeuvre ton plan, contrôle chaque pas. Peux-tu voir clairement que le pas est correct ? Peux-tu démontrer qu'il est correct ?

IV) Pour un retour sur la solution

a) Peux-tu contrôler le résultat ?

b) Peux-tu dériver le résultat de différentes façons ?

c) Comment es-tu arrivé au résultat ?

Les règles IIa) et III) semblent effectivement favorisées par la géométrie Tortue. D'une part, à des niveaux rudimentaires en tout cas, on sait en général résoudre un exercice parent : faire soi-même, avec son corps, les déplacements ou dessins que l'on veut faire réaliser à la tortue. D'autre part, la décomposition d'un programme en procédures indépendantes et à état transparent (Watt, 1983) est en accord avec la règle III).

Néanmoins il faut souligner que faire soi-même le mouvement ne conduit pas, sans plus, à la procédure cherchée et, en conséquence, craindre que l'on va retrouver les mêmes aberrations que celles que l'on a vues en 1970 : je pense aux enfants qui couraient aux 4 coins de la cour d'école (rectangulaire !) pour construire le groupe de Klein ! En effet, pour atteindre une liaison inconsciemment contenue dans une action, il faut projeter (ou réfléchir au sens physique) cette action sur un nouveau plan, celui de la représentation ou de la prise de conscience (avec réflexion au sens mental du terme). L'abstraction réfléchissante - à laquelle je viens ici de faire clairement allusion - doit reconstruire, en l'élargissant et en l'enrichissant, la structure élémentaire donnée dans l'action. Et c'est ceci qui est difficile : en témoigne la difficulté des petits à se représenter le trajet de la maison à l'école ou inversement, même s'ils le parcourent seuls chaque jour. Cette difficulté est celle de la reconstruction d'un «groupe» pratique de déplacements en un «groupe» représentatif (d'après Piaget et Inhelder, 1963).

3. Le point de vue de Groen et Kieran (1983)

3.0. Parce que la théorie de Papert est très récente, parce qu'elle implique l'utilisation d'un matériel nouveau, ou encore parce qu'elle n'est pas présentée de manière scientifique, elle n'a guère été discutée par des psychologues expérimentés. Groen semblant faire exception, j'accorde ici une place privilégiée à ses réflexions, avec Kieran, sur la géométrie-tortue.

3.1. La distinction Etat-Transformation

Piaget s'était intéressé à la théorie des catégories et aux mathématiques bourbakistes parce qu'elles concernaient primitivement des transformations de structures mathématiques simples en de plus complexes. En effet, comme ces théories se construisent à partir d'axiomes dont les transformations apparaissent comme les termes primitifs, ces transformations peuvent être définies indépendamment des états des objets mathématiques transformés. Et, en fait, une certaine façon d'arriver à définir les transformations indépendamment des états semble nécessaire pour parler des structures logico-mathématiques (puisqu'elles sont basées sur l'expérience directe des actions). Cette propriété peut sembler subtile, mais c'est elle qui donne leur unicité aux mathématiques piagétiennes. Les mathématiques modernes sont construites en grande partie à partir de la théorie conventionnelle des ensembles dans laquelle des notions comme les *fonctions* ou *transformations* ou *morphismes* n'apparaissent pas comme des termes primitifs dans les axiomes. De ce fait, elles ne peuvent pas s'ajuster exactement au cadre de référence piagétien. Il existe certes des domaines mathématiques - théorie des groupes de transformations,.. - qui possèdent cette propriété, mais ces domaines se situent à un haut niveau d'abstraction et concernent plutôt les mathématiciens professionnels que les enfants. En conséquence, ce dont on a toujours besoin, c'est une sorte de mathématique piagétienne qui servirait d'intermédiaire pour la construction des opérations formelles à partir de l'expérience logico-mathématique.

3.2. <u>Les micromondes de Papert</u>

Papert (1980) a précisément suggéré un chemin spécifique pour arriver à cela: les *micromondes*. Ces micromondes peuvent être formulés comme des systèmes mathématiques avec axiomes et théorèmes, mais ces derniers restent "en surface" dans la mesure où l'expérience directe de l'enfant est concernée. Les transformations se manifestent elles-mêmes comme des commandes qui conduisent à des changements d'états d'objets concrets. Les effets de ces commandes sont gouvernés par les axiomes qui sont souvent de simples descriptions du résultat de la commande. Les théorèmes se présentent comme des propriétés générales des combinaisons de commandes.

La géométrie-tortue est l'exemple le plus développé de ces micromondes. Les états sont les position et orientation de la flèche sur l'écran. Cet exemple peut clarifier ce qui a été expliqué dans le paragraphe précédent sur la définition des transformations indépendamment des états.

3.3. <u>Autres micromondes</u>

Il peut exister des micromondes sans ordinateur. Par exemple, on peut dire que l'arithmétique informelle basée sur le comptage est un micromonde. Dans ce cas, l'espace des états pourrait

être les nombres dans un compteur, et les opérations d'initialisation et d'incrémentation (de 1) seraient indépendantes de l'état du compteur. Néanmoins, l'ordinateur est un outil précieux.
Premièrement, parce qu'un langage de programmation est un système de notation dans lequel les tranformations et structures transformationnelles ont des représentations naturelles, à savoir les opérations et les procédures. Ainsi, il peut fournir une introduction au formalisme mathématique qui est mieux coordonnée avec les structures naturelles de l'enfant.
Deuxièmement, parce qu'écrire un programme pour ordinateur incite à réfléchir sur la manière dont on ferait soi-même les actions impliquées dans le programme.
Troisièmement, parce que l'élève peut inventer une théorie grossièrement fausse au sujet du micromonde. Le feedback renvoyé par la machine permet l'autocorrection.

3.4. Conclusion

Groen et Kieran insistent sur les faits que :
- un micromonde est un habillage d'un domaine mathématique dans lequel les transformations sont traitées directement plutôt que subordonnées aux états;
- l'interaction que procure l'ordinateur est importante pour l'implantation d'un micromonde .
Un tel environnement rend tangibles deux notions cruciales que Piaget lui-même n'a pu exprimer que de façon très abstraite: les actions et coordinations d'actions. En conséquence, un micromonde informatique adéquatement construit fournit un intermédiaire pour l'expérience logico-mathématique directe. Egalement, écrire et débugger un programme implique l'observation de ses propres pensées et l'abstraction à partir d'elles. Le micromonde peut donc être vu comme un intermédiare induisant cette forme d'abstraction réfléchissante spontanée qui amène à la construction de nouvelles structures logico-mathématiques.
3.5. Remarque. Il convient de faire une réserve sur l'argumentation de Groen et Kieran. Cette réserve porte sur la possibilité d'arriver à raisonner directement sur les actions, sans une phase intermédiaire où l'on passerait par les états impliqués dans les actions. En effet, Piaget lui-même a souligné que la prise en compte des transformations était génétiquement postérieure à celle des états, de l'état final en particulier. Voici ce qu'il écrit :

«Toute action, et *a fortiori* toute succession d'actions s'éloigne, en effet, de son point de départ par le fait même qu'elle se rapproche de son point d'arrivée. Or, la prise de conscience initiale des conduites étant centrée sur leurs buts ou résultats,..., il va de soi que l'abstraction porte d'abord sur la terminaison des séquences et non pas sur leur point d'origine ou sur leur déroulement. Au point de vue spatial, cela est si vrai que jusqu'à 8-9 ans la longueur des chemins est évaluée par l'ordre des points d'arrivée sans s'occuper des points de départ. » (Piaget, 1977).

4. Evaluations (empiriques) de la théorie

4.1. Recherches ponctuelles

- Gorman et Bourne (1983) ont vérifié que des enfants (3ème année d'école) ayant pratiqué LOGO pendant une année à raison d' 1 h par semaine avaient, comparativement à d'autres ayant pratiqué 1/2 h par semaine, des performances significativement supérieures à une épreuve de règles conditionnelles.
- Clements et Gullo (1984) ont comparé deux échantillons d'enfants de 6 ans : les uns soumis à de l'EAO, les autres à LOGO. Le groupe LOGO a eu des performances finales supérieures à des tests mesurant les habiletés métacognitives (réflexion sur ses propres processus de pensée) et les habiletés à décrire des directions, mais aucune différence n'a été trouvée à des tests mesurant le développement cognitif. Les auteurs soulignent que, alors que Papert a basé sa théorie sur les idées de Piaget, il n'a pas pris en compte certaines hypothèses piagétiennes qui s'opposent à l'idée que l'ordinateur pourrait avoir des effets révolutionnaires.
- Wertz (1984), qui a observé des élèves d'une Section d'Education Spécialisée, est frappé par l'uniformité des résultats et par la pauvreté des programmes :

«Avec le langage Logo, il est rare de voir des programmes qui font autre chose que tracer un carré ou une maison.», écrit-il, en mettant en cause l'incapacité des structures des langages informatiques à exprimer des mécanismes de résolution de problèmes, et en citant l'algorithme récursif qui nous permettrait de décider si nous devons manger:

> Pour savoir s'il faut manger
> Vérifier
> Si l'on a faim, alors il faut manger
> Sinon, exécuter «Savoir s'il faut manger».

- Zimmerman et al. (1984) concluent leur recherche dans une école de Genève ainsi :

«LOGO "marche" dans le sens qu'il est possible d'obtenir des productions d'enfants, même très jeunes, de niveaux et de milieux différents. Ces productions évoluent dans le temps en devenant plus complexes et plus structurées, les stratégies utilisées pour obtenir le résultat envisagé évoluent également. Les procédures font appel à des instructions de plus en plus complexes (récursivité). Les enfants ne se lassent pas de cette activité. Après deux ans d'expérience, tous continuent à participer avec plaisir à l'atelier LOGO, mis à part quelques enthousiastes, sans plus ni moins d'intérêt que pour les autres activités "para-scolaires" (gymnastique, chant, travaux manuels, etc.)

Nous pouvons constater que l'ordinateur a perdu tout pouvoir de fascination, ils l'utilisent sans problème pour d'autres activités (apprentissage de la lecture par exemple).
Nous n'avons cependant pas constaté d'évolutions-miracle "d'enfant à problèmes" telles qu'elles sont souvent décrites dans certains ouvrages prônant les mérites de LOGO.»

4.2. Tentatives de synthèse

Robert (1985) - chercheur à l'INRP - dans un rapport rédigé à la demande du Conseil de l'Europe, écrit (entre autres) :

«...il semble que, si tous les enfants sont toujours aussi motivés par le système LOGO, la rapidité et la qualité de leurs apprentissages s'accordent assez bien en moyenne avec celles de leurs performances scolaires habituelles. Il devient difficile, à partir de telles observations, de continuer à affirmer que LOGO et l'informatique vont permettre de lutter contre l'échec et d'atténuer les écarts, si on reste dans les mêmes cadres et si on ne se donne pas d'autres moyens d'intervention. Par ailleurs, on observe aussi que, chez les enfants en difficulté, l'enthousiasme initial retombe rapidement si les erreurs et les obstacles se multiplient : l'intolérance à l'échec est grande chez beaucoup et la patience limitée devant les contraintes du système. Faire trop confiance à la spontanéité dans ces cas-là risque d'entraîner de graves déboires.»

alors que Chaguiboff (1985) - du Centre Mondial de l'Informatique - dans un article reprenant les principaux passages d'un rapport rédigé en 1984, pour le ministère de la Culture, conclut :

«En dépit de la multiplication d'ateliers et de stages "LOGO", le langage mis au point par Papert, il n'existe pas à ce jour de publications relatant des vérifications empiriques de ses théories sur les modes de pensées.»

4.3. Conclusions.

Malgré cette (plutôt) non-confirmation empirique des thèses optimistes de Papert, le langage Logo n'est pas abandonné. Le ministre de l'Education Nationale le cite en exemple des langages permettant *«de mettre en oeuvre des démarches originales de construction des savoirs et de formation du raisonnement»*. (Chevènement, 1985).
Au niveau de l'école élémentaire, les compléments aux programmes et instructions (du 15 mai 1985) suggèrent l'utilisation de macroprimitives et soulignent implicitement que LOGO, parce qu'il est procédural et (pratiquement) accessible, semble le langage actuellement le plus adapté à une telle utilisation.
Au niveau du collège, Dupuis et al. (1985) suggèrent que pour que les enfants *«puissent produire des programmes d'assez haut niveau»*, il faut *«leur enseigner de véritables techniques de programmation »*.

5. Références

Chaguiboff J., 1985. Informatique et apprentissages. *Enfance*, n°1, 31-42.

Chevènement J.P., 1985. Lettre du 29 octobre 1985. *Bulletin Officiel*, n°39, (7 novembre), 2778-2780.

Clements D.H. et Gullo D.F., 1984. Effects of computer programming on young children's cognition. *Journal of Educational Psychology*, **76**, 1051-1058.

Dewdney A.K., 1985. L'échec de l'oeil artificiel nous éclaire sur le rôle du cerveau dans la perception visuelle. *Pour la Science*, n° 87, 98-102.

Dupuis C., Egret M.A. et Guin D., 1985. Récursivité et Logo: 1.Préexpérimentation. Strasbourg : IREM.

Fischer J.P. et Meljac C., à paraître. Pour une réhabilitation du dénombrement: le rôle du comptage dans les tout premiers apprentissages numériques. *Revue Canadienne de Psycho-Education.*

Gorman H. et Bourne L.E., 1983. Learning to think by learning LOGO: Rule learning in third-grade computer programmers. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 1983, **21**, 165-167.

Groen G. et Kieran C., 1983. In search of piagetian mathematics. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Papert S., 1980. Jaillissement de l'esprit: Ordinateurs et apprentissage. Paris: Flammarion, 1981.

Papert S. et Solomon C., 1971. Vingt choses à faire avec un ordinateur. MIT: LOGO memo 3. (Traduction française de E.Martin et A.Deledicq, 1972).

Piaget J., 1953. How children form mathematical concepts. *Scientific American*, n° 189, 74-79.

Piaget J., 1960. Introduction. In P.Gréco, J.B.Grize, S.Papert, J.Piaget (Eds), *Problèmes de la construction du nombre* (vol. 11 des EEG). Paris: PUF.

Piaget J.(Ed), 1967. Logique et connaissance scientifique. Paris: Gallimard.

Piaget J., 1971. Où va l'éducation ? Paris: Denoël, 1972.

Piaget J., 1977. Recherches sur l'abstraction réfléchissante : 1/L'abstraction des relations logico-arithmétiques (tome 34 des EEG). Paris: PUF.

Piaget J., Inhelder B., 1963. Les opérations intellectuelles et leur développement. In P.Fraisse, J.Piaget (Eds), *Traité de psychologie expérimentale: VII. L'intelligence.* Paris: PUF, 1969.

Robert F., 1985. L'utilisation de l'ordinateur dans l'enseignement primaire: l'exemple de la France. *Enfance*, n°1, 19-30.

Watt D., 1983. Learning with Logo. New York: McGraw-Hill.

Wertz H., 1984. Un chercheur sur le terrain. *Science&Vie Micro*, n°6, 64-65.

Zech F., 1977. Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim: Beltz, 1978.

Zimmerman J.L., Nidegger C. et Giordan A., 1984. LOGO: Obstacles. *Education & Informatique*, n°23, 40-43.

Les théories éducative et psychologique de Bruner

1. Introduction

1.1. Bruner est le plus connu des psychologues américains de l'enfant. Ses théories éducatives, son traitement des problèmes dans toutes leurs dimensions, et aussi sa longévité (ses premiers écrits datent de 1939) et sa prolificité (plusieurs centaines d'articles), le font apparaître comme une autorité scientifique et morale. Ainsi, Papert (1980) éprouve-t-il le besoin - dans un passage où il critique la théorie des représentations de Bruner (voir suite) - de renvoyer à une note dans laquelle il explique qu'il est «*d'accord avec l'essentiel de sa* (= celle de Bruner)*pensée* ».
1.2. Tout le travail de Bruner sur le développement de l'enfant est pénétré par un sens de l'histoire humaine. L'homme est à la fois le produit :
- d'une phylogenèse : Confiance de Bruner dans le langage et les symboles;
- d'une ontogenèse : Pour comprendre les capacités de l'homme adulte, il faut retrouver leur origine et voir leurs transformations;
- d'une culture : Bruner soutient qu'une culture fournit les technologies par l'intermédiaire desquelles les capacités cognitives humaines sont amplifiées et le système éducatif par lequel le cours du développement cognitif est profondément modifié (d'après Anglin, 1974).

1.3. Dès à présent, on peut remarquer les profondes divergences entre Bruner et Piaget. Bruner a d'ailleurs parfois exprimé (indirectement) son point de vue, et donc ses divergences (avec Piaget), dans des formules retentissantes. Par exemples : « **culture-free means intelligence free** » (Greenfield et Bruner, 1966), ou « **Any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development** »(Bruner, 1960). On peut d'ailleurs aussi noter que Vygotski (voir chapitre suivant) est qualifié de *brillant psychologue* et que le second système pavlovien de signalisation - langagier et symbolique - est considéré *avec intérêt* (Bruner, 1961).
1.4. Dans l'ensemble, on peut dire que les vues de Bruner sont beaucoup plus encourageantes (pour les pédagogues) que celles de Piaget. En effet, alors que ce dernier insiste volontiers sur les apprentissages spontanés, Bruner (1966a) souligne, et on pourra le rapprocher de mes

réflexions de la page 54, que cette spontanéité ne vaut que pour les savoir-faire fondamentaux : diriger son attention, signifier son intention, économiser sa peine dans l'exécution d'une tâche. « *Lorsqu'une société va au-delà de ces techniques relativement primitives, l'instruction par l'école, moins spontanée, doit prendre le relais* ».

2. Quelques "grands" sujets

2.1. L'acte de découverte (ou de mémorisation)

Bruner (1961) rapporte une expérience dans laquelle on avait demandé :

- à un groupe 1 d'enfants de simplement retenir 30 paires de mots pour pouvoir les répéter plus tard;
- à un groupe 2 de retenir les paires en produisant un mot ou une idée qui va relier les paires ensemble de manière à leur donner un sens;
- à un groupe 3 de retenir les paires en leur donnant les médiateurs utilisés par le groupe 2 pour les aider à relier deux mots d'une paire en une unité opérante.

Les résultats - 2>1 et 2>3 - prévus ont été obtenus. Les enfants du groupe 2 sont arrivés à retrouver jusqu'à 95% des seconds mots lorsqu'on leur indiquait les premiers, alors que ceux du groupe 1 en retrouvaient au maximum 50%. A propos de la supériorité de 2 sur 3, Bruner suggère que «*en général, un matériel qui est organisé suivant les intérêts et structures cognitives propres à une personne, est un matériel qui a les meilleures chances d'être accessible en mémoire* ».

Remarque1. Ausubel (1963), qui, de manière générale, critique la déification de l'acte de découverte et le mythe de l'apprentissage par découverte soutient que, dans l'expérience de Bruner, la supériorité de 2 sur 3 provient du fait que les médiateurs que les enfants2 ont choisis leur étaient plus familiers et relevants que les médiateurs suggérés ne l'étaient aux enfants3. Et selon lui, le fait que ces médiateurs aient été auto-construits est tout à fait à côté du sujet.

De manière générale, Ausubel, après avoir passé en revue une série d'expériences sur l'apprentissage par découverte, arrive aux conclusions suivantes :

- la plupart des articles sont des discussions théoriques, conjectures,...
- la plupart des recherches raisonnables et bien contrôlées rapportent des résultats négatifs;
- la plupart des recherches rapportant des résultats positifs soit ne contrôlent pas d'autres

variables significatives, soit emploient des techniques d'analyse statistique critiquables.
Remarque 2. Sans faire spécialement de recherches (bibliographiques) dans ce domaine, je peux dire que la seule recherche sur laquelle je suis tombé (au hasard de mes lectures) est effectivement négative. Il s'agit d'une recherche de Lunzer et al. (1976) : des enfants de 7-8 ans qui ont développé leurs propres symboles n'apparaissent pas avoir mieux compris les règles de combinaison des opérations (arithmétiques) que ceux à qui l'on avait fourni des symboles tout faits.
Remarque 3. Dans cette suite de remarques emboîtées, il convient encore de rappeler que des expériences qui n'arrivent pas à rejeter l'hypothèse nulle n'ont d'intérêt que si l'on connaît (approximativement) la puissance de rejet (en fonction du nombre de sujets, du seuil et de l'ampleur du phénomène) du test utilisé.

2.2. La croissance cognitive

Pour Bruner (1966a), la croissance cognitive se caractérise par :
- une indépendance croissante vis-à-vis de la nature immédiate du stimulus;
- une intériorisation des événements en un "système de stockage" qui correspond à l'environnement;
- l' implication d'une capacité croissante à se dire à soi-même et aux autres, au moyen de mots et symboles, ce que l'on a fait ou ce que l'on veut faire;
- sa dépendance d'une interaction systématique entre un tuteur et un "apprenant";
- sa facilitation par l'intermédiare du langage, ce dernier finissant par être non seulement le médiateur des échanges mais un instrument que l'apprenant peut utiliser lui-même pour mettre de l'ordre dans son environnement;
- une capacité croissante à traiter plusieurs alternatives simultanément, à faire plusieurs séquences durant la même période de temps, et à allouer temps et attention de manière appropriée à ces demandes multiples.

Sur les trois derniers points on peut remarquer, une nouvelle fois, combien les idées de Bruner diffèrent de celles de Piaget. D'ailleurs sur le problème de l'apport de la logique à la compréhension du développement psychologique, Bruner semble également se démarquer de Piaget lorsqu'il commente une expérience de Bruner et al. (1966). Cette expérience consistait à demander à des enfants entre 4 et 11 ans lequel de deux verres, inégaux (en volume) mais tous deux à moitié pleins, est le plus plein et lequel est le plus vide. Souvent les enfants ayant identifié le verre A comme celui ayant le plus grand volume disent que A est plus plein que B, mais aussi que A est plus vide que B. Et, fait étonnant, le nombre de contradictions croît avec l'âge : à 5 ans, il y en avait 27%, à 6 ans, 52%, et à 7 ans 68%. Bruner en conclut que la logique ne nous dit pas grand chose sur le développement psychologique, même si elle peut aider à décrire les connaissances que possèdent les enfants. Et, s'appuyant sur d'autres recherches, il soutient que l'idée de proportion qui apparaît vers 10 ans n'est pas le fruit de la logique mais est due à l'émergence de la nécessité de pointer une indication perceptuelle de chaque idée.

2.3. <u>Le rôle du langage</u>.

Pour Bruner (1964), la croissance dépend de la maîtrise de techniques et ne peut pas être comprise sans référence à cette maîtrise. Ces techniques ne sont pas, généralement, des inventions individuelles : ce sont plutôt des habiletés, transmises avec des efficacité et succès variables, par la culture, le langage étant un premier exemple. D'où l'importance, déjà apparue à plusieurs reprises, que Bruner attache au langage.

Dans Bruner (1964), il rapporte une expérience de Sonstroem destinée à montrer l'influence de la manipulation M et du langage L sur la réussite des élèves de 6-7 ans dans des expériences de conservation de la matière (boule de plasticine transformée en saucisse ou crêpe). Selon Bruner, la manipulation devait favoriser une représentation énactive, et le langage une représentation symbolique (voir ci-après). Et l'influence conjointe de M et L a effectivement conduit à un pourcentage de réussite de 80%. Mais ce qui est surtout intéressant, note Bruner, c'est que l'un des deux facteurs isolé est insuffisant pour produire le conflit conduisant à l'apprentissage (il n'y a eu que 30% (resp.40%) de réussites pour M sans L (resp. L sans M), soit à peine plus que les 26% sans M ni L).

Dans Bruner (1966a) il illustre ses interrogations sur le rôle du langage par un exemple tiré des mathématiques. Se référant à une expérience de Suppes qui a observé que les équations de la forme $3 + x = 8$ sont plus faciles que celles de la forme $x + 3 = 8$, il se demande si la difficulté vient du fait d'avoir à traiter une équation avec une inconnue au début, ou si elle provient du transfert des habitudes linguistiques de l'anglais usuel dans lequel les phrases sont plus faciles à compléter lorsqu'un terme est effacé au milieu plutôt qu'au début. Et il en conclut que l'interférence entre les habitudes linguistiques et les habitudes mathématiques doit être examinée soigneusement et de manière détaillée.

<u>Remarque</u>. L'exemple de Bruner ne semble pas très convaincant au niveau des jeunes enfants. En effet, le modèle principal de traitement de telles équations, à savoir le modèle du compteur

(voir page 5) explique très bien la différence de difficulté : dans le cas de 3 + x = 8, l'enfant lit les informations dans l'ordre où il en a besoin (d'abord 3 pour initialiser le compteur, puis 8 pour savoir quand stopper l'incrémentation), alors que dans le cas de x + 3 = 8 il ne sait pas comment démarrer (= initialiser le compteur). L'exemple de Bruner est plus convaincant si l'on suppose que les sujets examinés connaissent "par coeur" les phrases "trois plus cinq égalent huit" et "cinq plus trois égalent huit", ou s'ils ont mémorisé les images "3 + 5 = 8" et "5 + 3 = 8".

2.4. Pensée intuitive et analytique

Bruner (1971) consacre un (petit) chapitre à ce sujet. Il y argumente que l'apprentissage et l'enseignement doivent partir d'un niveau intuitif. Il illustre son point de vue avec deux ou trois exemples mathématiques.

L'un d'entre eux est celui de la décomposition d'un nombre en facteurs et du concept de nombre premier qui peuvent être approchés intuitivement par des boutons à disposer en rangées et colonnes (voir suite).

Un autre est celui d'un maître de 5ème année d'école qui pratiquait le jeu des *nombres cachés* . Ce jeu consiste à essayer de trouver une série de nombres (cachés) sur laquelle le maître donne quelques renseignements. Par exemple, que la somme des nombres de la série est inférieur à 20. La classe doit alors poser d'autres questions. Bruner voit dans ce jeu une version simplifiée d'algèbre qui se pratique de manière intuitive.

3. La théorie des niveaux de représentation

3.0. La théorie du développement de la pensée de Bruner peut être vue comme la modification la plus radicale de la théorie de Piaget. En effet, selon Bruner, le développement de la pensée, ne se ferait pas suivant des niveaux de pensée chronologiques, mais selon différents niveaux de représentation, simultanés et en étroite interaction. «**Le développement n'implique pas une série de stades, mais plutôt une maîtrise successive de trois formes de représentation avec leurs traductions partielles l'une dans l'autre** » écrit Bruner (1966b).

3.1. Les trois niveaux de représentation.

Bruner distingue les trois niveaux de représentation suivants : le niveau de l'action, celui de l'image et celui du symbole. En des termes plus orthodoxes, les représentations énactive, iconique et symbolique. Au cours du développement, il s'effectue un transfert de l'importance relative de ces trois niveaux : d'abord c'est la représentation énactive qui domine, puis la représentation iconique, enfin la représentation symbolique. Citons le :

> « D'abord l'enfant connaît son environnement principalement par les manipulations habituelles dont il a besoin pour interagir avec lui.
> Avec le temps, il s'y rajoute une méthode de représentation en images, qui est relativement indépendante des manipulations. Peu à peu s'y rajoute une méthode nouvelle et efficace, qui traduit aussi bien la manipulation que l'image en langage ... » (Bruner, 1966b)

Pour Bruner, le développement intellectuel adulte se caractérise par la flexibilité - en fonction des contraintes - du changement de niveau de représentation.

3.2. Les arguments de Bruner

Une des expériences à laquelle Bruner s'est souvent référé pour soutenir son point de vue est l'expérience de Frank que Bruner (1964) résume ainsi :

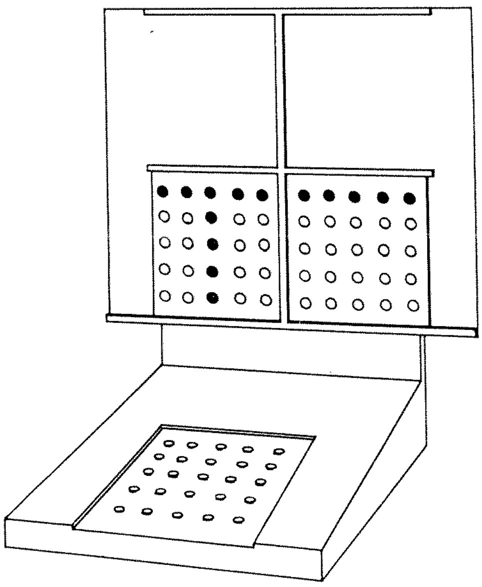
Françoise Frank pratiqua d'abord les tests classiques de conservation pour déterminer les enfants conservants. Ses sujets étaient âgés de 4, 5, 6, et 7 ans. Elle utilisa ensuite d'autres procédures, parmi lesquelles la suivante : Deux verres standard étaient partiellement remplis de telle manière que les enfants jugent qu'ils contiennent la même quantité d'eau. Un verre élargi de même hauteur est maintenant introduit et les trois verres, mis à part leur partie supérieure, sont cachés derrière un écran. L'expérimentateur verse un verre standard dans le verre large. On demande à l'enfant, sans qu'il voit l'eau, lequel des deux verres contient le plus à boire : le verre large ou le verre standard.

L'expérience montra, comparativement à la préexpérience pratiquée sans écran, un accroissement considérable des jugements corrects d'égalité : ces jugements passèrent de 0% à 50% chez les 4 ans, de 20% à 90% chez les 5 ans, et de 50% à 100% chez les 6 ans.

Mais l'expérience ne s'arrêta pas là. On enleva alors l'écran. Tous les 4 ans changèrent alors leur point de vue. La présentation perceptive les a confondus et ils décidèrent que le verre large avait moins d'eau. Mais quasiment tous les 5 ans, et tous les 6 et 7 ans, ont maintenu leur jugement.

Et l'expérience continua encore. Quelque minutes après, Frank fit un posttest en utilisant un verre étroit et haut avec le verre standard, et pas d'écran. Les enfants de 4 ans n'avaient pas été influencés par leur expérience antérieure. Aucun d'entre eux n'arriva à l'invariance de la

quantité dans cette nouvelle tâche. Chez les 5 ans, au lieu des 20% de conservation enregistrés au cours du prétest, Frank enregistra maintenant 70% de conservation. Et chez les 6 et 7 ans, le pourcentage de conservation est passé de 50% à 90%. En outre, un groupe-contrôle, juste soumis aux pré et post-test, ne montra pas de progrès significatif.
Une autre expérience sur laquelle Bruner (1966b) s'est appuyé pour soutenir sa théorie des représentations est celle d'Olson :



L'enfant doit, en appuyant sur le moins de boutons possible, trouver laquelle des deux formes au-dessus est "cachée" dans le tableau du bas (lorsqu'un bouton appartient à cette forme, il s'allume en rouge).

Les 3 ans appuient non aléatoirement (ils commencent par un coin) sur les boutons, en espérant que leur action (on a du mal à les empêcher de presser sur plusieurs boutons à la fois) produira une figure équivalente à l'une des deux au-dessus.
Les 5 ans sont capables d'adopter une représentation imagée du travail : ils testent l'une des deux alternatives et l'acceptent (souvent sur des bases insuffisantes le – est accepté sans vérification qu'il pourrait s'agir du T) ou la refusent.
Les 8 ans semblent capables de traiter l'information proprement dite : ils peuvent traiter simultanément les figures devant eux et voir leur inclusion, exclusion et intersection, afin d'isoler les traits caractéristiques.
La stratégie de recherche initiale montre donc une interdépendance de l'action et du percept. Chez les 5 ans, le choix est gouverné par une seule figure à la fois et ils ne sont pas capables d'incorporer les deux alternatives dans une structure hiérarchique qui est l'essence de la représentation symbolique. C'est seulement quand l'appareil symbolique peut être appliqué à la tâche que l'ensemble des alternatives est fusionné dans ce qui peut être décrit comme un espace informationnel, caractérisé par des traits distinctifs.

4. Quelques sujets mathématiques

4.0. Bruner et Kenney (1965) avaient observé 4 enfants de 8 ans (120< QI<130) à qui un enseignant donnait des leçons de mathématiques, 1h par jour pendant 4 jours x 6 semaines. Notons d'ailleurs que cet enseignant n'était autre que Dienes, et qu'il a lui aussi développé une théorie de l'apprentissage mathématique (Dienes, 1970) dont les rapports avec celle de Bruner ne sont pas toujours évidents. Peut-être son apprentissage des "structures en mouvement et rythme" (Dienes, 1972), rappelle-t-il la représentation énactive de Bruner. Notons aussi, pour en revenir à Bruner, que ce dernier - au moment de ses écrits sur l'apprentissage mathématique - n'a pu être qu'influencé par la réforme des mathématiques qui était alors en train de se développer.

4.1. Le rôle de la construction

Le concept de nombre premier semble se construire plus facilement quand l'enfant, par des constructions, découvre que certaines poignées de grains ne peuvent pas être disposées en lignes et colonnes complètes.

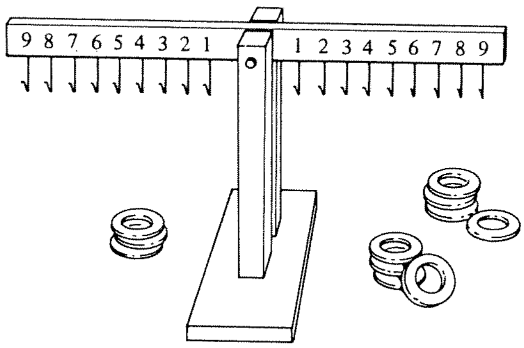


FIGURE 1. Balance beam and rings used on quadratic construction

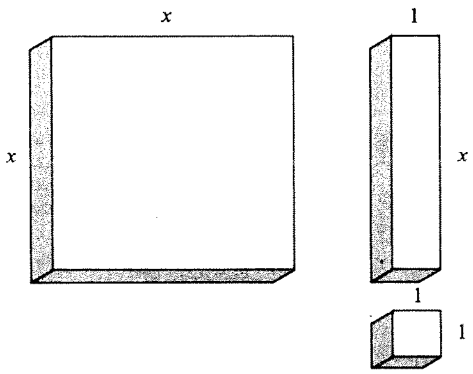


FIGURE 2. Three components for quadratic constructions

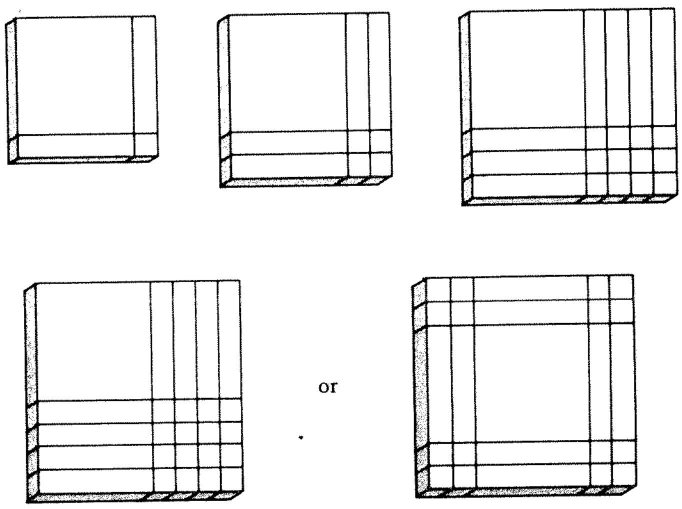
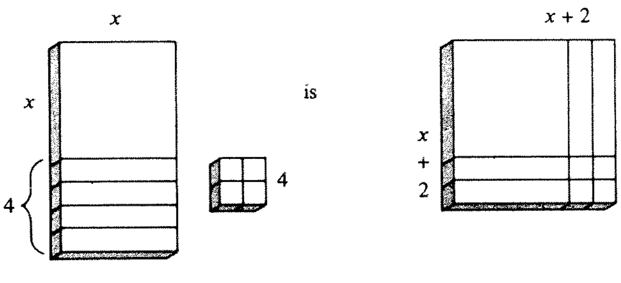


FIGURE 3. Squares of ever-increasing size constructed with components



$[x(x+4)+4] \quad = \quad (x+2)^2 \quad =$

$x^2 + 4x + 4$

FIGURE 4. Syntactic exercise supported by construction

Pour introduire à l'idée de commutativité de la multiplication, Bruner utilise une balance (voir fig. 1) à laquelle on accroche des anneaux à diverses distances : « *C'est une belle découverte que de voir que 2 anneaux au crochet 9 équilibrent 9 anneaux au crochet 2* » écrivent Bruner et Kenney (1965).

Pour les fonctions quadratiques, Bruner utilise du matériel de construction : des carrés de bois aux dimensions non spécifiées et présentées simplement comme inconnues ou de largeur x et de longueur x (voir fig. 2); des baguettes de bois aussi longues que le côté du carré et larges de 1, ou simplement de 1 sur x; enfin des petits carrés de 1 sur 1. On demande à l'élève de construire d'autres carrés avec le matériel dont il dispose. On voit ainsi des constructions comme celles de la figure 3.

4.2. L'utilisation des notations

L'élève décrit, en énumérant les différents composants, le carré qu'il a construit. On lui montre les notations : $x^{\square}$ pour le grand carré; 1 x ou simplement x pour la barre et 1 pour le petit carré. L'expression "et" peut être abrégée par +. Ainsi l'enfant peut écrire l'aire pour un carré construit comme $x^{\square} + 4x + 4$. Et il peut aussi trouver que c'est $(x + 2)^{\square}$. Ainsi il peut écrire sa première égalité : $(x + 2)^{\square} = x^{\square} + 4x + 4$. Virtuellement chaque chose a un référent qui peut être pointé avec le doigt. L'élève dispose maintenant d'un système de notation qui lui permet de traduire l'image qu'il a construite.

On peut ainsi arriver à une liste (produit des constructions des élèves) :

$x^{\square} + 2x + 1$ c'est x+1 fois x+1
$x^{\square} + 4x + 4$ c'est x+2 fois x+2
$x^{\square} + 6x + 9$ c'est x+3 fois x+3
$x^{\square} + 8x + 16$ c'est x+4 fois x+4

Il est alors presque impossible que l'élève ne fasse pas certaines découvertes : les observations syntaxiques ont leurs correspondantes manipulo-perceptives.

Après un certain temps, on note le carré $(x + 2)^2$, et on le reconstruit d'une nouvelle façon (voir fig. 4).

4.3. Variation et contraste

On revient à la balance. On suppose par exemple que x c'est 5. Les 5 anneaux au crochet 5 sont x^2, 5 anneaux au crochet 4 c'est 4x, 4 anneaux au crochet 1 c'est 4: $x^2 + 4x + 4$. Comment pouvons-nous trouver que c'est comme un carré de x+2 sur x+2 ? Si x c'est 5, x+2 c'est 7, donc 7 anneaux au crochet 7. Et, nature oblige, la balance s'équilibre. Et maintenant les propriétés de commutativité et de distributivité peuvent être explorées : $x(x+4) + 4 = x^2 +$

4x + 4, ou x+4 anneaux au crochet x et 4 au crochet 1 réalisent aussi l'équilibre.
Le contraste est le moyen par lequel l'évident, qui est trop évident pour être apprécié, peut-être à nouveau remarqué. Dans le cas de la commutativité, Bruner suggère d'exploiter les observations concrètes qui s'opposent à la commutativité : 6 esquimaux dans 4 igloos ce n'est pas exactement la même chose que 4 esquimaux dans 6 igloos.

4.4. La structure de groupe
Comme déjà souligné, Bruner a été influencé par la réforme des mathématiques modernes. On trouve donc aussi, dans Bruner et Kenney (1965), une expérience d'apprentissage de la structure de groupe avec 10 élèves de 9 ans.

5. Les écrits récents de Bruner

5.0. Bruner (1970, p.123) s'intéresse à des savoir-faire d'une absolue simplicité qui apparaissent durant les 18 premiers mois. Et, par la suite, il continue essentiellement à s'intéresser à des très jeunes enfants. La description précise de ses travaux ne paraît donc pas essentielle pour la didactique des mathématiques. Par contre, les éléments pour une théorie de l'apprentissage, que Bruner en tire, méritent d'être résumés.

5.1. L'information en retour
J'ai déjà souligné (p.45) l'importance du concept de rétroaction - la rétroaction est initiée par l'information en retour - pour l'apprentissage. Bruner (1973b) avait déjà noté les simplifications abusives (voir aussi p.45) du concept d'information en retour. Il s'efforce en conséquence de le préciser et distingue trois formes :
- l'information en retour **interne** qui signale, dans le système nerveux, une intentionnalité d'action et qui apparaît **avant** l'action manifeste (d'où sa qualification de prospective);
- l'information en retour **proprement dite** en provenance du système effecteur **au cours de l'action** ;
- la **connaissance des résultats** qui n'est possible qu'**après** que l'action soit terminée.
Pour Bruner (1973b p.88), *«l'information en retour apparaît à l'évidence comme un élément qui ne peut se réduire au feedback négatif d'un système de commande »*.
Remarque. Comme pour Papert (voir p.50-51), on peut noter que les considérations neurophysiologiques de Bruner mériteraient une mise à jour. Par exemple, il est clair que l'information en retour interne, et éventuellement aussi celle proprement dite, peut être aujourd'hui décrite plus précisément à l'aide des modèles de transformation des sensations en perceptions auxquels j'ai fait allusion (voir p.41).

5.2. Les contraintes de situation

Bruner s'inspire du modèle systémique de Bernstein. Dans ce dernier, **c'est l'effet** - ce qui est produit - qui est porteur des conditions de l'organisation de l'action propre. Et cet effet est assujetti aux contraintes de situation. Pour Bruner, «*plus un savoir-faire est assujetti en temps réel à des contraintes physiques comme la gravité, des impératifs de vitesse d'exécution, etc., et moins il existe de variantes fonctionnellement équivalentes* ». C'est dire que le degré de contraintes est un déterminant essentiel de l'effet de l'acte, effet **qui en retour va avoir un caractère structurant** (d'après Deleau, 1983 p.19).

Remarque. Ces réflexions de Bruner (et Deleau) me paraissent applicables aux Temps de Réponse (ou de présentation). Elles conduisent alors à prédire que la limitation des TR conduira à des structurations différentes en éliminant les variantes lentes (et non pas, par exemple, à une prise de risque supplémentaire).

5.3. La modularisation

La modularisation est la traduction théorique de ce mécanisme de structuration en retour. A mesure des exécutions successives, l'anticipation du résultat devient plus précise et plus précoce, l'effectuation de l'acte lui-même se calibre: son temps d'érection, sa vitesse d'exécution se réduisent et se stabilisent. L'acte demande ainsi une moins grande dépense d'énergie et surtout il libère l'attention auparavant mobilisée par l'exécution elle-même. Ainsi voit-on se mettre en place des détours, des enchâssements d'actions complexes particulières à l'intérieur d'une action d'ensemble (d'après Deleau, 1983 p.19).

De manière intéressante, Bruner (1973b p.95) souligne que c'est la boucle omniprésente du circuit prospectif (voir ci-avant) qui rend possible la mise en place d'un ordre sériel dans le comportement. Mais, « *par dessus tout*, continue Bruner, *dès qu'il y a modularisation et réduction de l'attention requise par régularisation d'un acte, celui-ci peut alors s'intégrer à un acte de plus haut rang et appelant une séquence plus longue sans que l'attention requise soit telle qu'il y ait dé-régulation de l'acte de plus haut rang.* »

Pour Bruner (1973b, p.95), la **modularisation est** tout à fait dans la ligne des théories du développement de type «traitement de l'information». Elle a en particulier pour effet de libérer une part de capacité de traitement de l'information qui peut ainsi servir à une analyse plus poussée de la tâche, tout simplement parce que les sous-routines constituantes de la tâche réclament moins d'attention. Et c'est pourquoi elle constitue **un préalable si essentiel** (Bruner, 1970 p.121) à l'inclusion d'un acte dans un acte plus complet, dans une routine plus vaste.

6. Références

Anglin J.M., 1974. Introduction (de Bruner, 1973a).

Ausubel D.P., 1963. The psychology of meaning verbal learning. New York: Grune &Straton, 1968.

Bruner J.S., 1960. The process of education. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner J.S., 1961. The act of discovery. *Harvard Educational Review*, **31**, 21-32. Reproduit dans Bruner, 1973a.

Bruner J.S., 1964. The course of cognitive growth. *American Psychologist*, **19**, 1-15. Reproduit dans Bruner, 1973a.

Bruner J.S., 1966a. Toward a theory of instruction. Cambridge : Harvard University Press.

Bruner J.S., 1966b. The growth of representational processes in childhood. Paper presented at the meeting of the 18th International Congress of Psychology (Moscou, août 1966). Reproduit dans Bruner, 1973a.

Bruner J.S., 1970. Développement et structure du savoir-faire. In Bruner, 1983.

Bruner J.S., 1971. Relevanz der Erziehung. Ravensburg : Maier, 1973.

Bruner J.S., 1973a. Beyond the information given : Studies in the psychology of knowing. London : Allen&Unwin, 1974.

Bruner J.S., 1973b. L'organisation des premiers savoir-faire. In Bruner, 1983.

Bruner J.S., 1983. Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire. Paris : PUF.

Bruner J.S. et Kenney H.J., 1965. Representation and mathematics learning. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, **30**, 50-59. Repoduit dans Bruner, 1973a.

Bruner J.S., Olver R.R., Greenfield P.M. et al., 1966. Studies in cognitive growth. New York: Wiley.

Deleau M., 1983. Présentation (de Bruner, 1983).

Dienes Z.P., 1970. Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique. Paris : OCDL.

Dienes Z.P., 1972. Strukturen in Bewegung und Rhythmus. Freiburg: Herder, 1974.

Greenfield P.M. et Bruner J.S., 1966. Culture and cognitive growth. In D.A. Goslin (ed.), *Handbook of socialization theory and research.* Chicago : Rand McNally. Reproduit dans Bruner, 1973a.

Lunzer E.A., Bell A.W. et Shiu C.M., 1976. Numbers and the world of things : A developmental study. University of Nottingham (School of Education).

Papert S., 1980. Le jaillissement de l'esprit. Paris: Flammarion, 1981.

La théorie de Galperin

1. Les influences de Vygotsky et Luria

1.1. Vygotsky (1896-1934), malgré une carrière très brève, a profondément influencé la psychologie soviétique. Il a aussi influencé Bruner (voir chapitre précédent) et est présenté (Luria, 1965; Vygotsky, 1934) comme l'un des fondateurs de la neuropsychologie. Son ouvrage *Pensée et langage* (Wygotski, 1934) vient même d'être traduit récemment en français ! Dans ce dernier, Vygotsky fait la distinction entre concepts **scientifiques** et concepts **communs**. Il rapporte une étude sur des enfants en 2ème et 4ème année d'école montrant une supériorité de la maîtrise des concepts scientifiques. De manière précise, dans les tests ayant conduit au tableau ci-après, il fallait compléter des phrases se terminant par *parce que* ou par *bien que* . Exemples : Le train a déraillé parce que ...; Olja ne sait pas encore bien lire bien que ... Voici les résultats en pourcentages :

		2ème année	4ème année
parce que	c. scientifiques	79,7	81,8
	c. communs	59	81,3
bien que	c.scientifiques	21,3	79,5
	c. communs	16,2	65,5

Vygotsky commente longuement ce tableau : pour lui, il montre que, dans le cas des concepts scientifiques, nous avons affaire à des niveaux de compréhension supérieurs à ceux relatifs aux concepts communs, et à un type particulier de développement. «*Il est bien connu* , écrit Wygotski (p.184), *qu'un élève formule mieux le principe d'Archimède que la définition de ce qu'est un frère. Cela doit provenir du fait que les deux concepts ont suivi des voies différentes dans leur développement* ».

1.2. Un autre grand psychologue, ou plutôt neuropsychologue, qui a pu influencer Galperin, est Luria. Au contraire de Vygotsky, Luria a eu une longue et prolifique carrière. Pour ce qui concerne les mathématiques, ses préoccupations neuropsychologiques l'ont surtout conduit à étudier la pathologie du calcul (Luria, 1946) et de l'appréhension du nombre et des formes géométriques élémentaires, et l'implication des lobes frontaux dans la résolution de problèmes arithmétiques (voir Fischer, 1985 p.4, 41-43). Pour ce qui concerne maintenant son influence sur Galperin, et la psychologie soviétique en général, on peut signaler les études de Luria (1956; 1969) sur le rôle de la langue. Par exemple, Luria (1969) écrit :

«Le problème de la langue et de son rôle dans la formation des processus mentaux occupe une place spéciale dans la psychologie soviétique. Les psychologues soviétiques partent du point de vue que les manifestations les plus complexes de la vie mentale se forment dans un processus de réflexion active sur la réalité. Les processus mentaux complexes se forment durant l'association de l'enfant avec les adultes. Ce sont des systèmes fonctionnels complexes formés avec la participation intime du langage. »

2. La théorie de la formation par étapes des actions mentales

2.0. Après avoir dit que Galperin est né en 1902, a fait des études de neuropsychologie et a travaillé avec Luria à partir de 1931 (aussi avec Leontiev et Saporoshez), je vais décrire sa théorie principale en m'appuyant aussi sur Zech (1977) et Lompscher (1973).

2.1. Description succincte

Les trois étapes que distinguent Galperin et Talysina (1957) sont :

a) Action **extérieure** (matérialisée) : Les élèves disposent d'une fiche d'orientation (ou de consignes orales pour les préscolaires) sur laquelle sont énumérées les conditions nécessaires et suffisantes caractéristiques du concept à apprendre. On leur demande de vérifier si chacun des objets qu'on leur soumet possède les caractéristiques du concept.

b) Action effectuée à **haute voix** : Les élèves vérifient, à partir de leur fiche et à haute voix, si un objet possède les caractéristiques souhaitées. Dès qu'ils sont familiarisés avec les caractéristiques du concept, on leur demande d'abandonner la fiche.

c) Action **interne** ou **mentale** : Finalement on leur demande de renoncer au langage extériorisé. L'élève travaille alors silencieusement, pour lui, et ne donne que le résultat de son travail.

2.2. Commentaires

Dans cette théorie, on retrouve bien le rôle important de médiateur joué par le langage. Mais durant la première étape apparaît un concept dont je n'ai pas encore parlé : l'**orientation**. Importé de la physiologie (réflexe d'orientation: voir Galperin, 1976), ce concept dépasse cependant de beaucoup ce que les physiologistes, à la suite de Pavlov, ont décrit sous ce terme. Ceci parce que chez l'homme il existe une orientation relevant de processus totalement intériorisés, c'est-à-dire des représentations, des images. Ainsi, déjà dans cette première étape le langage semble jouer un rôle priviligié. Par exemple, Zaporojets (1960) conclut qu'un système organisé de mouvements, c'est-à-dire l'apprentissage d'une tâche complexe, se forme plus facilement quand l'expérimentateur organise, par des indications verbales, les réactions d'orientation du sujet. Une régulation verbale du mouvement s'opère qui dépend de l'orientation donnée dès le départ. Cette orientation et, dit Zaporojets, les images qui se construisent à sa suite, dépend essentiellement de la direction qui est donnée par le langage : direction de l'attention sur les conditions spécifiques de l'activité. Les plus jeunes enfants ont besoin de répéter la consigne à haute voix.

2.3. Les conséquences d'un tel apprentissage

Un tel apprentissage conduit, et c'est alors que Galperin considère que le concept est maîtrisé, l'élève à ne plus s'interroger sur une caractéristique particulière du concept, mais à répondre, "d'un coup d'oeil", grâce à une **opération mentale** "raccourcie" (Galperin et Talysina, 1957), "réduite" ou **automatisée** (Lompscher, 1973), si un objet donné relève du concept ou non.
Une deuxième conséquence de cet apprentissage est qu'il conduit à des généralisations s'appuyant uniquement sur les propriétés caractéristiques des concepts que contenait la fiche d'orientation et non pas sur des bases perceptives fausses.
Enfin, une dernière conséquence qu'il faut mentionner est la possibilité - en cas de difficulté: fatigue, contestation,... - d'un retour à l'étape antérieure. Ceci paraît en effet extrêmement important dans le cas de certains apprentissages mathématiques. Par exemple, à propos de l'automatisation des calculs, Menschinskaya et Moro (1965) insistent sur le fait que si l'automatisation, qui désigne la transition d'un calcul conscient vers un calcul mécanique, a été faite prématurément, l'enfant ne peut pas se corriger en cas d'erreur, alors que dans le cas contraire, s'il rencontre un obstacle, «la conscience vient à la rescousse et l'opération est exécutée avec sa participation active».

3. Preuves et exemples

3.1. Exemples élémentaires

Galperin et Talysina (1957) présentent, dans la phase d'apprentissage, des tés exclusivement dans les positions T et ⊥ . Lors de l'épreuve de contrôle, ils présentent les tés dans toutes sortes de positions :
Les enfants répondent tous correctement, même s'ils mettent un peu plus de temps et si l'un ou l'autre est obligé de retourner à une étape plus primitive en nommant à haute voix les

caractéristiques des droites.
Tjoplenkaja (1973) définit, à partir de figures de forme, couleur et grandeur différentes, mais toutes en bois, des concepts artificiels à partir des deux variables : hauteur et surface. Ainsi, une figure donnée sera "*mup* " si elle est grande et haute, "*dek* " si elle est petite et haute,...
Lors des épreuves de contrôle, elle présente de nouvelles figures en métal, verre,...
Il s'avère que le critère *être en bois* , que les enfants (5 à 6 ans) ont pu percevoir commun à tous les objets au cours de la phase d'apprentissage, n'a pas conduit les enfants à des jugements erronés et ils résistent même aux contre-suggestions de l'expérimentatrice.

3.2. <u>Exemple didactique</u>
Zech (1977) a développé l'exemple d'une résolution d'un problème élémentaire. L'énoncé du problème est :
6 écoliers forment, pour le ramassage de vieux chiffons, une brigade. Il y a déjà 6 brigades. 12 écoliers les rejoignent quelque temps après. Combien y a-t-il d'élèves ramassant des vieux chiffons ?
Pour <u>orienter</u> l'élève, on peut utiliser une fiche avec les questions suivantes :

1° Que sais-tu ?
2° Comment est formulée la question ?
3° Réfléchis à ce que tu peux calculer en premier ! Questionne !
4° Forme une équation !
5° Réfléchis à ce que tu peux calculer maintenant !
6° Forme une équation !
7° Résous les équations !
8° Réponds !

Pratiquement, comme pour l'apprentissage de concepts, on peut distinguer les trois étapes suivantes :
1) Les élèves ont la fiche avec les consignes devant eux. Ils peuvent donc, dans leur activité de résolution, constamment s'orienter d'après le texte.
2) Les élèves n'ont plus accès au document écrit. Ils doivent commenter verbalement chaque pas dans leur résolution.
3) Les élèves peuvent renoncer au document écrit et à la formulation verbale des différents pas. Il se sont appropriés la démarche.

3.3. <u>Exemple plus complet</u>
Le thème retenu par Butkin (1973) pour son expérience d'apprentissage de la démonstration est la congruence des figures géométriques. Les indices de la congruence sont :

1° Figures superposables.
2° Deux figures avec un même nombre de côtés sont égales si les points extrêmes des segments se recouvrent par superposition.
3° Deux figures sont égales si elles sont égales à une même troisième.
4° Si l'on retranche à deux segments (ou angles) égaux un segment de même longueur (ou un angle égal) les segments (ou angles) obtenus sont égaux.
5° Si l'on rajoute à deux segments (ou angles) égaux un segment de même longueur (ou un angle égal), les segments (ou angles) obtenus sont égaux.

Ces indices sont présentés - numérotés et sur une fiche - à l'élève. Une autre fiche contient les consignes pour la conduite des activités. Enfin, la matérialisation de l'exercice s'est faite de manière analogue : chaque exercice était présenté sur une fiche qui contenait également un dessin correspondant à l'exercice. Les étapes de l'apprentissage selon Galperin sont respectées (avec cependant la disparition de l'action matérialisée) : langage extérieur, langage pour soi, langage interne. Pour chacun des indices on propose à l'élève 12 à 15 exercices. Par exemple : *On donne deux segments AB et CD. On diminue la distance AB de KB et CD de ED égale à KB. Les segments AK et CE ont-ils la même longueur ?*

Puis on travaille une autre composante de la démonstration : le développement des conditions. L'analyse de l'activité a permis à Butkin de trouver les règles de son déroulement. Ces dernières, numérotées, sont fournies sur une fiche à l'élève :
1° Indique les figures dont il est question dans les prémisses.
2° Cite tout ce que l'on dit d'elles.
3° Indique les nouvelles figures qui peuvent être extraites des figures données.
4° Enumère ce que tu en sais.

Pour l'étape d'**action matérialisée**, les élèves devaient utiliser la fiche, et développer les différents points dans l'ordre et avec les contenus précis indiqués. E contrôle sévèrement.

Les élèves disposent en plus d'une fiche avec toutes les figures géométriques - et les relations entre elles - qu'ils connaissent. Les élèves devaient vérifier systématiquement la présence ou l'absence, sur cette fiche, des figures proposées, et leurs relations dans les conditions de l'exercice. L'expérimentateur contrôle soigneusement l'activité.

A l'étape du **langage extériorisé**, l'activité est conduite sans les fiches. E s'assure constamment que les élèves suivent exactement la règle.

A l'étape du **langage "pour soi"**, E indique les numéros des points de la règle et l'élève doit en actualiser le contenu et l'adapter aux conditions de l'exercice. Il indique uniquement le résultat de ses opérations qui peut alors être contrôlé par E.

Enfin, à l'étape du **langage interne**, l'élève applique, pour soi, tous les points de la règle et ne formule plus, à haute voix, que le résultat final.

Durant l'apprentissage 1440 exercices ont été proposés au total aux 20 élèves de 5ème année concernés par l'expérience. Mais en fait 10 enfants (groupe 1) ont seulement été soumis à un apprentissage partiel. Les 10 autres forment le groupe 2.
Pour le contrôle final, le groupe 1 s'est vu proposer des exercices nécessitant la démonstration de théorèmes (ex.: Des angles à côtés perpendiculaires sont "égaux"). Le % de réussites a été de 97,5, alors qu'un groupe contrôle (6è année d'école) n'a obtenu que 15% de réussites.
Le groupe 2 s'est vu proposer 5 démonstrations de théorèmes tels qu'ils sont formulés dans les livres, plus 1 exercice semblable à ceux du groupe 1. Butkin souligne que le groupe 2, comparativement au groupe 1, ne procède plus du tout par essai-erreur. Il a aussi testé le transfert à des exercices sur le parallélisme. Comparativement à un groupe contrôle, les résultats (en % de réussites) sont remarquables, comme le montre le tableau général suivant :

Groupe Expérimental		Groupes Témoins			
(5è année)		(6è année)		(7è année)	
Paral.	Congr.	Paral.	Congr.	Paral.	Congr.
100	90	25	50	35	46

4. La formation des notions mathématiques élémentaires

4.0. Le titre général de cette série de 4 articles publiés dans les *Reports of the Academy of Pedagogical Sciences of the USSR* en 1960, regroupés dans Galperin et Georgiev (1960) et résumés dans Galperin (1968), paraît quelque peu usurpé puisque, en fait, ne sont traitées que les premières notions numériques. Cependant on peut remarquer que la manière de les traiter confère une certaine généralité à l'étude.
Galperin et Georgiev font jouer un rôle primordial à la notion de mesure et à celle d'unité (de mesure) qu'elle implique. Par exemple, ils écrivent que «*le concept d'unité a une place spéciale dans la formation des notions mathématiques élémentaires* », que «*tous les concepts mathématiques élémentaires, si l'on ne regarde pas les limitations de leur contenu, supposent la notion d'unité* », que la notion d'unité est «*primitive et ne peut être basée sur d'autres notions mathématiques* ».
Traditionnellement "un" est tacitement compris comme quelque chose de séparé ou d'individuel. Mais l'unicité ne caractérise pas plus "un" que ne le caractérise d'autres aggrégats avec d'autres désignations numériques. La caractérisation de l'unicité comme une entité

discrète n'est pas satisfaisante. Définir "un" comme une puissance concrète (donc comme une description quantitative d'un ensemble) par sa caractéristique d'individualité (une caractéristique descriptive) est **simplement faux.**

4.1. Le constat

Galperin et Georgiev ont proposé une série de 14 tests à 60 enfants âgés de 6;6 à 7;2 et issus de 3 classes d'école maternelle où l'arithmétique avait été spécialement bien présentée. La plupart de ces enfants savaient par exemple compter jusqu'à 10 et avaient, dans des proportions variables, des compétences numériques plus sophistiquées. Voici quelques-uns de ces tests et leurs résultats :

Test 3 : On montre d'abord à l'enfant que 2 tasses remplissent une coupe. On lui propose alors 3 coupes et 4 tasses remplies d'eau en lui demandant : *Combien de coupes d'eau y a-t-il sur la table ?*

Seuls 11 des 60 enfants testés ont répondu correctement.

Test 7 : L'enfant doit mesurer combien il y a de pièces *égales à 4 comme celle-là* (on montre un bout de 10 cm) dans une corde.

40 sur les 60 ont échoué.

Test 10 : On demande aux enfants de dire combien il y a de petites (resp. grandes) cuillerées de riz dans deux coupes identiques. Pour répondre, les enfants font deux groupes de petits monceaux. On leur demande alors quel groupe contient le plus de riz.

50 des 60 enfants ont répondu sur la base du nombre de monceaux en oubliant totalement leur taille.

Test 1 : On demande aux enfants de faire un monceau de 5 cuillerées de riz. Puis d'en enlever 4. Ils doivent alors dire combien il reste de cuillerées.

32 d'entre eux étaient en difficulté parce qu'ils n'avaient pas vérifié que les cuillerées sont pleines !

Test 4 : L'expérimentateur dit qu'il y a 10 cuillerées dans un monceau de riz et demande si c'est la petite ou la grande cuillère qui a été utilisée pour la mesure (c'est la petite !).

27 des 60 enfants se trompent en reliant directement grande taille et grande cuillerée.

Test 11 : 35 enfants soutiennent que le monceau formé par 4 grandes cuillerées contient plus de cuillerées que celui formé par 5 petites cuillerées.

Test 12 : Un monceau de 2 cuillerées étalées est considéré comme contenant plus de riz qu'un autre de 2 cuillerées non étalées.

Galperin et Georgiev concluent, en résumé, que présenter le concept d'unité comme une entité conduit à une orientation qui ne permet pas d'utiliser l'unité comme un moyen de mesurage et de comptage. Une telle orientation mène à la comparaison directe et à des distinctions qualitatives visuelles.

4.2. L'analyse théorique

La comparaison directe est seulement un objectif des mathématiques. L'étude scientifique commence avec l'évaluation des quantités par une unité de mesure. Les mathématiques sont, dès le départ, un phénomène social.

L'analyse théorique conduit alors Galperin et Georgiev à dégager la série des groupes d'opérations nécessaires à la formation des notions mathématiques élémentaires. En outre, à l'intérieur de ces groupes d'opérations ils précisent (et justifient) leurs choix. Par exemple, dans le cinquième groupe, ils indiquent l'ordre et la manière d'introduire les nombres : 1 évidemment en premier; puis 2 par addition de 1; puis 0 en enlevant 1 de 1; enfin 3 qui est 2+1. Mais ils suggèrent que l'ordre 1, 0, 2 et 3 a des chances d'être tout aussi bon.

4.3. Le contenu de l'enseignement

Partie 1 : Elaboration d'une approche mathématique de l'étude des quantités (22 leçons).
- visite de magasins pour montrer le rôle et l'importance de la mesure dans la vie pratique;
- nécessité de la mesure pour certaines comparaisons;
- unité spéciale pour chaque type d'objet à mesurer;
- processus de mesurage avec ses problèmes pratiques;
- différenciation unité de mesure et entité séparée;
- généralisation au continu.

Partie 2 : Formation de concepts dans la première dizaine (38 leçons).
- 1 est trouvé égal à l'unité de mesure;
- introduction de 2, 0, 3 déjà à l'aide de la règle $n \pm 1$;
- pour 4 et les suivants, toujours cette règle générale.

Partie 3 : Relation entre quantité, unité de mesure et nombre (6 leçons).
- différentes quantités (ex. : longueur et volume) ne doivent pas être comparées;
- différentes mesures ne doivent pas être comparées si les unités ne sont pas les mêmes;
- étude de l'interdépendance des quantité, unité de mesure et mesure.

4.4. Résultats de l'expérience d'apprentissage

Les 68 leçons de 30 minutes environ (2 à 3 par semaine) sont conduites en dernière année d'école maternelle. L'expérience porte sur 50 enfants. On procède à une évaluation des connaissances numériques au début (avant tout apprentissage). Après avoir signalé quelques difficultés (surmontées), Galperin et Georgiev présentent les résultats suivants:

Groupe / Test n°		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Contrôle	(fin d'année)	47	78	52	47	18	8	47	33	32	17	42	25	68	52	55
Expérimental	début d'année	42	44	36	28	18	4	26	40	44	24	38	22	52	40	32
	fin d' année	100	100	100	100	100	100	100	100	100	92	92	96	100	96	98

Galperin et Georgiev rapportent aussi quelques descriptions qualitatives. Ils soulignent en outre que :
- les élèves ne mémorisent pas les décompositions des nombres : les compositions d'un nombre sont le résultat d'une opération arithmétique plus ou moins automatique;
- si l'on prend pour unité 2 objets, on arrive au comptage par 2 et à la multiplication;
- les addition, soustraction, multiplication et division sont maîtrisées simultanément.

En conclusion, Galperin et Georgiev écrivent :
«Ces expériences confirment les opinions et espérances des grands éducateurs Rousseau, Pestalozzi, et Ushinskii : lorsque l'enseignement des mathématiques élémentaires est basé sur le mesurage, il procède avec une extraordinaire vitesse et efficience. »

5. Commentaires-critiques

5.1. J'enchaîne tout de suite sur l'expérience de Galperin et Georgiev (1960) en remarquant d'abord que, du point de vue de la structure de l'article, cela peut être un modèle : le constat qui montre qu'il y a un problème, l'analyse théorique qui suggère des solutions, la réflexion sur la mise en oeuvre pratique de ces solutions, enfin l'expérimentation et ses résultats.
Maintenant pour ce qui concerne l'insistance que portent Galperin et Georgiev, et plus récemment Davydov (1982), sur la notion de mesure elle paraît tout à fait légitime. Néanmoins le fait que les premières notions numériques doivent être initialement (i.e chez les enfants très jeunes) tout de suite associées à l'unité de mesure peut paraître choquant : je vois mal les enfants de 4-5 ans dire qu'ils ont **deux nez** (en prenant pour unité le trou) et **un** seul **oeil** (en prenant pour unité la paire)!!!
A des niveaux scolaires légèrement ultérieurs, l'idée de mesure, et conséquemment d'unité de mesure, doit et peut cependant être développée : en particulier le fait de disposer de deux "unités" (le pixel et le segment=8 pixels) dans les langages et matériels informatiques standards

actuels pourrait donner lieu à une exploitation intéressante.

5.2. Pour ce qui concerne maintenant la théorie de l'apprentissage, et les expériences qui la supportent, il est clair que l'on peut faire certaines réserves. Par exemples :
- l'imposition par l'enseignant d'une méthode unique;
- le caractère répétitif et contraignant de l'apprentissage;
- les résultats trop nets en faveur de la thèse soutenue.

Ces derniers font en effet penser, par exemple, à des tests de contrôle trop bien adaptés au groupe expérimental (ou trop mal adaptés au groupe contrôle). Ou encore craindre - vu le temps consacré à l'apprentissage visé - que d'autres apprentissages aient été négligés.

5.3. Pour ce qui concerne maintenant le rôle majeur que fait jouer la théorie de Galperin, et la psychologie soviétique en général, au langage, il convient de donner quelques précisions supplémentaires sur les preuves expérimentales qui ont été trouvées en faveur de ce rôle du langage.

En effet, dans les années 1960, principalement sous l'impulsion de Sokolov, les psychologues soviétiques ont réalisé des expériences d'électromyographie. Par exemple dans l'épreuve des *Progressive Matrices de Raven,* Sokolov a relevé une augmentation substantielle de l'intensité moyenne des potentiels électriques (prélevés sur la lèvre inférieure) : ceci plaide en faveur de la participation de l'activité subvocale à la résolution des problèmes non verbaux (d'après Oléron, 1972). Mais Kinsbourne (1968) a remarqué qu'il est trop hâtif d'en conclure que le langage "couvert" durant la cognition est causalement connecté à la réussite de l'acte cognitif. Et Kinsbourne cite une "revue" de Zangwill montrant des exemples où une résolution correcte du problème était accompagnée par une verbalisation tout à fait inappropriée (voir aussi l'expérience de Biemüller dans Fischer, 1984).

5.4. Pour terminer ces commentaires, et pour terminer le cours comme je l'ai commencé, je parlerai de l'automatisation du calcul. En effet, la théorie de de Galperin, avec la notion d'acte mental abrégé et d'intériorisation progressive, semble trouver une illustration idéale dans le calcul et le comptage (pour ce dernier, je renvois à Fischer, 1982).

D'ailleurs beaucoup d'auteurs ont utilisé cet exemple des nombres et du calcul. Au hasard de mes lectures, je citerai :

«L'enseignement de l'arithmétique ne doit pas, en conséquence, débuter avec ceci (=la formation d'associations), mais par une formation active par des actions sur des objets externes . Après ces actions externes sont graduellement transformées en langage ("compter à voix haute"), abrégées et finalement acquièrent le caractère d'actions internes ("compter dans la tête"), qui sont automatisées dans la forme de simples actes associatifs. » (Leontiev, 1959 p.80).

«Il suffit de suivre soigneusement la formation du concept de nombre du jeune enfant. Cette formation commence avec l'examen concret des objets et de leur énumération externe. Ce processus diminue graduellement, la poursuite visuelle de toute une série d'objets lui succède, puis assure le langage externe. Nous pouvons suivre la réduction progressive du langage et le passage vers la désignation d'ensembles d'objets par des nombres séparés. Finalement, l'enfant maîtrise le calcul mental accompli à l'aide des tables de multiplication bien connues. » (Luria, 1960 p.24).

«La formation des associations comme "2.3=6 "ou "2.4=8" doit être le résultat d'une réduction et automatisation des actions arithmétiques correspondantes et ne doit pas servir comme moyen ou mécanisme à l'appropriation de ces actions. » (Leontjew et Galperin, 1979).

Mais toutes ces déclarations restent superficielles : je n'ai pas rencontré une tentative de définition opérationnelle d'un processus automatisé. Et il est loin d'être sûr que la réduction progressive des actions soit la cause directe de l'association finalement créée : voir par exemple le problème de l'appréhension du nombre de points de la collection • • • • que j'ai longuement examiné (Fischer, 1984), appréhension pour laquelle je ne crois plus à un comptage très rapide et très bien intériorisé.

6. Références

Butkin G.A., 1973. Untersuchungen zur Ausbildung des Könnens, geometrische Sätze zu beweisen. In Lompscher, 1973.

Davydov V.V., 1982. The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T.P.Carpenter, J.M.Moser et T.A.Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale : Erlbaum.

Fischer J.P., 1982. L'enfant et le comptage. Strasbourg : IREM.

Fischer J.P., 1984. La dénomination des nombres par l'enfant. Strasbourg:IREM.

Fischer J.P., 1985. Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre. Strasbourg : IREM.

Galperin P.I., 1968. Towards research of the intellectual development of the child. *International Journal of Psychology*, 3, 257-271.

Galperin P.J., 1976. Zu Grundfragen der Psychologie. Köln:Pahl-Rugenstein,1980.

Galperin P.J. et Georgiev L.S., 1960. The formation of elementary mathematical notions. In *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, vol.1., 1969.

Galperin P.J. et Leontjew A.N. (eds), 1979. Probleme der Lerntheorie. Berlin : Volk und Wissen, 1979 (5è éd.).

Galperin P.J. et Talysina N.F., 1957. Die Bildung erster geometrischer Begriffe auf der Grundlage organisierter Handlungen der Schüler. Reproduit dans Galperin et Leontjew, 1979.

Kinsbourne M., 1968. Critical notice : the analysis of higher nervous activity in man. *British Journal of Psychology*, **59**, 475-479.

Leontiev A.N., 1959. Principles of mental development and the problem of intellectual backwardness. In B. Simon, J. Simon (eds), *Educational psychology in the U.S.S.R.* London : Routledge & Kegan, 1963.

Leontjew et Galperin P.J., 1979. Die Theorie des Kenntniserwerbs und der programmierte Unterricht. In Galperin et Leontjew, 1979.

Lompscher J.(Ed.), 1973. Sowjetische Beiträge zu Lerntheorie : Die Schule P.J.Galperins. Köln : Pahl-Rugenstein.

Luria A.R., 1946. On the pathology of computational operations. In *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, vol.1., 1969.

Luria A.R., 1956. The role of speech in the regulation of normal and abnormal behaviour. New York : Pergamon Press, 1961.

Luria A.R., 1960. L'enfant retardé mental. Toulouse : Privat, 1974.

Luria A.R., 1965. L.S. Vygotsky and the problem of localization of functions. *Neuropsychologia*, **3**, 387-392.

Luria A.R., 1969. Speech development and the formation of mental processes. In M.Cole, I.Maltzman (eds), *A handbook of contemporary soviet psychology*. New York : Basic Books.

Menschinskaya N.A. et Moro M.I., 1965. Questions in the methods and psychology of teaching arithmetic in the elementary grades. In *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, vol.14.

Oléron P., 1972. Langage et développement mental. Bruxelles : Dessart.

Tjoplenkaja C.M., 1973. Zum Problem der Begriffsbildung bei Kindern im Vorschulalter. In Lompscher, 1973.

Vygotsky L.S., 1934. Psychology and localization of functions. *Neuropsychologia*, **3**, 381-386, 1965.

Wygotski L.S., 1934. Denken und Sprechen. Frankfurt am Main : Fischer, 1977.

Zaporojets A.V., 1960. Le développement des mouvements volontaires. Moscou: Acad. Sc. Pédagogiques (en russe : cité d'après N.Galifret-Granjon, *Naissance et évolution de la représentation chez l'enfant.* Paris : PUF, 1981.)

Zech F., 1977. Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim : Beltz, 1978.

TITRE : **Eléments de Psychologie pour l' Apprentissage des Mathématiques.**

AUTEUR : Jean-Paul **FISCHER**.

DATE : Décembre 1986.

EDITEUR : **I.R.E.M.** de Strasbourg (Brochure S 125).

MOTS-CLE : PSYCHOLOGIE - APPRENTISSAGE - MATHEMATIQUES - Traitement de l' Information - Méthodes de Recherche - Numérique - Piaget - Brousseau - Papert - Bruner - Galperin.

RESUME : Ce texte présente quelques éléments de psychologie à propos de notions mathématiques - nombre, calcul, ... - à des niveaux élémentaires. Mais, surtout, il présente un **panorama** (mondial) des **théories** de l'**apprentissage** mathématique.
En moins de 90 pages, des points de vue aussi différents que ceux de Piaget et Galperin se trouvent ainsi illustrés - par des exemples précis et centraux dans l'oeuvre de l'auteur concerné -, commentés et critiqués.
Ecrit à l'intention des étudiants du D.E.A. de Didactique des Mathématiques, il devrait aussi intéresser les pédagogues confrontés à l'enseignement des mathématiques et/ou à de jeunes élèves. En particulier ceux qui ne veulent pas se limiter à la psychologie piagétienne.