

---

DECOMPOSITION DES POLYEDRES

et le TROISIEME PROBLEME DE HILBERT

Jean LEFORT

---

§ 1. INTRODUCTION

En 1900, se tient l'Exposition Universelle, à Paris. A cette occasion, le Second Congrès International des Mathématiciens rassemble la fine fleur de l'époque, sous la présidence de Poincaré. L'exposé de Hilbert est l'un des plus attendus. Il le donne le mercredi matin, 8 août 1900, par une grande chaleur, et y présente sa fameuse liste de 23 problèmes. D'ailleurs, pressé par le temps, il suit le conseil de Hurwitz et de Minkowski, et n'expose qu'une sélection de 10 problèmes. Le texte de son exposé paraîtra en 1902, en allemand - c'est le texte reproduit dans ses oeuvres complètes - et en anglais - traduction dans le Bulletin de la Société Mathématique Américaine, reprise dans le symposium de 1974.

Voici le troisième problème, tel que P. Cartier le traduit de l'allemand :

"3. L'égalité du volume de deux tétraèdres ayant des bases et des hauteurs égales. Gauss exprime, dans deux lettres à Gerling, son regret que certains théorèmes de la géométrie des solides dépendent de la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire, pour employer la locution moderne, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier le théorème d'Euclide (livre XII, prop. 5), selon lequel deux pyramides de même hauteur à base triangulaire sont dans le même rapport que leurs bases. Mais le problème analogue pour les aires planes a été complètement résolu ; Gerling a aussi réussi à démontrer l'égalité des volumes de deux polyèdres symétriques au moyen d'une subdivision en parties superposables (par déplacement). Cependant, il me semble impossible de prouver en général de cette manière le théorème d'Euclide cité plus haut, et il s'agirait de donner une démonstration rigoureuse de cette impossibilité. Une telle démonstration serait obtenue, si nous réussissions à trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui aussi ne

se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible."

L'histoire de ce problème est curieuse. Avant la publication de Hilbert, Dehn, dès 1900 a donné une solution sous la forme réclamée par Hilbert ; ce qui est plus important, il a défini l'invariant qui porte son nom, et sur lequel nous reviendrons plus loin. D'ailleurs, lors de la présentation orale, Hilbert n'avait pas gardé le 3ème problème dans sa liste restreinte. Considéré comme résolu - et comme faisant partie de la géométrie élémentaire - il ne continue à occuper que quelques géomètres suisses, danois ou russes. En 1974, un colloque à De Kalb (U.S.A.) fait le point sur les problèmes de Hilbert. Il y a bien un exposé oral sur le 3ème problème, mais aucun texte dans les deux volumes publiés.

Pourtant, depuis 1975, divers problèmes de topologie et de géométrie différentielle amènent à étudier des généralisations de cette question et la découverte d'analogies avec d'autres théories laisse supposer des liens inattendus entre arithmétique, topologie et physique mathématique.

## § 2. EUCLIDE ET LES AIRES PLANES

Dans les *Eléments*, la fin du Livre I et le Livre VI sont consacrés aux aires planes. Le début du Livre I est consacré aux cas d'égalité des triangles ; on devrait plutôt dire "congruence des triangles" si l'on nomme congruentes deux figures A et B pour lesquelles il existe un déplacement direct amenant A en coïncidence avec B. A partir de la proposition I.34, on s'intéresse à diverses situations où l'on peut affirmer que des triangles ou des parallélogrammes ont la même aire. En particulier, on a la proposition I.41, que l'on pourrait paraphraser par l'énoncé classique : l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur. Mais rien ne serait plus contraire à l'esprit d'Euclide ; il ne définit nulle part la notion d'aire, et il n'est pas question d'attribuer une valeur numérique à une aire.

Si l'on analyse les démonstrations d'Euclide et que l'on se réfère aux notions communes (axiomes généraux qui suivent au début des *Eléments* la liste des postulats géométriques), on se rend compte qu'il considère dans l'ensemble des polygones (1) une relation d'équi-

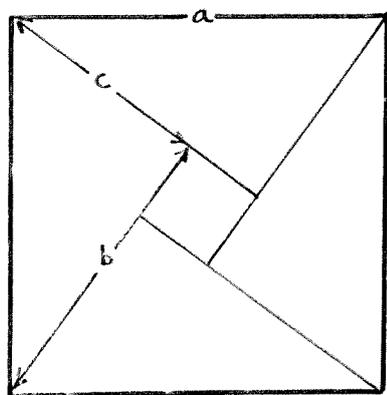
---

(1) Euclide ne donne pas vraiment de définition générale d'un polygone, mais considère surtout des triangles et des quadrilatères (définitions 19 à 22).

valence que l'on interprétera comme signifiant que A et B ont même aire. Cette relation d'équivalence (1) satisfait aux règles suivantes :

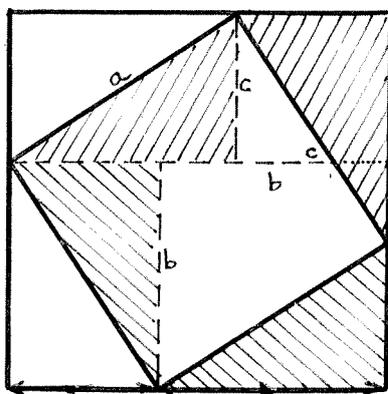
- a) des figures congruentes sont équivalentes (notions communes n° 4) ;
- b) si la figure A est composée de deux morceaux A' et A'', et de même B est composée de B' et B'', de l'équivalence de A' avec B' et de A'' avec B'', on conclut à l'équivalence de A avec B (notions communes n° 2) ;
- c) sous les hypothèses de b), si A est équivalente à B, et A' à B', alors A'' est équivalente à B'' (notions communes n° 3).
- d) si la figure A est composée de n parties équivalentes à A', et B de n parties équivalentes à B', de l'équivalence de A et B on infère celle de A' et B'.

Le couronnement du Livre I est le théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle ABC de côtés a, b, c, où l'angle en A est droit, on a  $a^2 = b^2 + c^2$ . Cette égalité s'interprète de la manière suivante (2) : le carré construit sur le côté a est équivalent à une figure composée de deux carrés égaux à ceux construits sur les côtés b et c. De très nombreuses démonstrations de ce théorème reposent sur des manipulations d'aires comme le montrent les trois figures suivantes :



méthode chinoise au début de notre ère

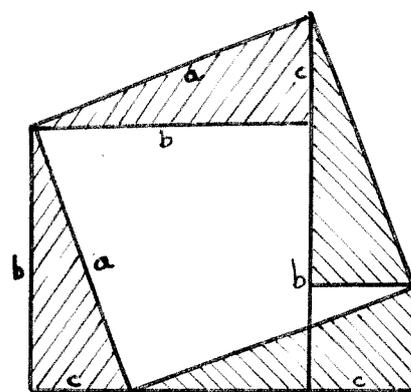
$$\begin{aligned} a^2 &= (b - c)^2 + 2bc \\ &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$



méthode de Legendre

En comparant les parties hachurées dans le même sens on a immédiatement, et dans les deux cas

$$a^2 = b^2 + c^2 .$$



méthode de Thabit ibn Qurra (9ème siècle)

(1) Euclide n'éprouve pas le besoin de distinguer la congruence des figures et leur équivalence, et parle d'égalité dans les deux cas.

(2) On sait que les manipulations d'aires sont un substitut d'algèbre chez Euclide (voir en particulier le Livre II).

Au Livre VI, Euclide utilise les résultats acquis sur les proportions au Livre V ; il va pouvoir étudier les similitudes, et démontrer les deux résultats fondamentaux suivants :

a) si la figure  $A'$  est semblable dans le rapport  $t$  à la figure  $A$ , le rapport des aires de  $A'$  et  $A$  est  $t^2$  ;

b) si, dans un parallélogramme, on multiplie deux côtés parallèles dans le rapport  $t$  et les deux autres dans le rapport  $t'$ , alors l'aire est multipliée par  $tt'$ .

Au passage, on établit le théorème de Thalès par la méthode des équivalences d'aires.

### § 3. LES AIRES PLANES AU 19ème SIECLE

L'idée de développer complètement la notion d'aire sans recourir à la continuité est reprise au 19ème siècle par de nombreux auteurs, dont Bolyai le père. Le résultat de ces travaux est synthétisé au chapitre 4 des "Grundlagen der Geometrie" de Hilbert. Tout d'abord, il faut définir clairement la notion de polygone (ou plutôt de domaine polygonal) dans le plan, comme réunion finie de domaines triangulaires. On dit qu'un polygone  $A$  est décomposé en deux polygones  $B$  et  $C$  si l'on a  $A = B \cup C$  et que l'intersection  $B \cap C$  est réunion de segments de droites ; définition analogue pour la décomposition en un nombre fini de polygones.

DEFINITION 1 : Deux polygones  $A$  et  $A'$  sont équivalents par décomposition (ou équidécomposables) si l'on peut décomposer  $A$  en triangles  $T_1, \dots, T_n$  et  $A'$  en triangles  $T'_1, \dots, T'_n$  de sorte que chaque triangle  $T_i$  soit congruent au triangle  $T'_i$ .

DEFINITION 2 : Deux polygones  $A$  et  $A'$  sont équivalents par complémentation (ou équicomplémentables) s'il existe deux polygones équivalents par décomposition  $C$  et  $C'$  tels que  $C$  soit décomposé en  $A$  et  $B$ , et  $C'$  en  $A'$  et  $B'$ , avec  $B$  et  $B'$  équivalents par décomposition.

Il est clair que deux polygones équivalents au sens 1 le sont au sens 2. La réciproque est vraie en géométrie plane réelle, mais ne le serait plus dans la géométrie plane sur un corps ordonné non archimédien. Dans le cas réel, qui nous occupe seul ici, il y a donc une seule notion d'équivalence ; elle répond à toutes les exigences d'Euclide. En adaptant ses raisonnements, on prouve par des méthodes élémentaires le résultat suivant (Euclide, I.45) :

Soit  $AB$  un segment, pris comme unité de longueur. Pour tout polygone  $P$ , il existe un rectangle  $ABCD$  équivalent à  $P$ , et un seul (1).

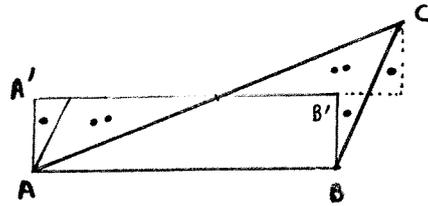
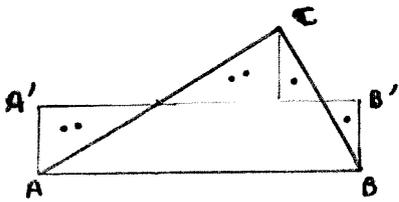
(1) Euclide n'éprouve pas le besoin de démontrer l'unicité qui découle pour lui de l'axiome : "le tout est plus grand que la partie" (Notions communes n° 5). Le mot "équivalent" est pris ici dans le sens d'aires égales.

On prendra comme unité d'aire le carré de côté  $AB$  ; l'aire du polygone  $P$  précédent sera mesurée, dans cette unité, par le rapport  $CB/AB$ .

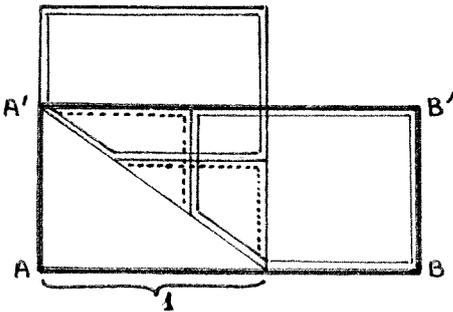
C'est en 1832 que Bolyai (le père) – et en 1833 de façon indépendante Gerwien – démontra le théorème : "Deux polygones ont la même aire si et seulement si ils sont équivalents par décomposition".

La démonstration repose sur les deux étapes suivantes :

1) On peut décomposer un triangle  $ABC$  en un rectangle  $ABB'A'$



2) On peut décomposer un rectangle  $ABB'A'$  en un rectangle dont l'un des côtés est de longueur 1.

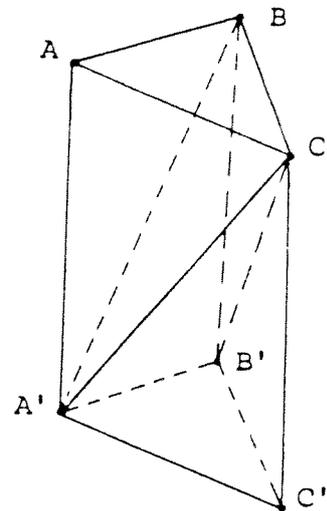


Si le rectangle est trop long on le découpe en  $n$  morceaux qu'on empile.

#### § 4. EUCLIDE ET LES VOLUMES

En dimension 3, un résultat crucial (Euclide, XII.7) affirme que les trois pyramides  $ABCA'$ ,  $BCA'B'$  et  $A'B'C'C$  en lesquelles se décompose un prisme à base triangulaire  $ABCA'B'C'$  ont même volume.

Il suffit pour cela de prouver que deux tétraèdres  $ABCD$  et  $ABCD'$  ont même volume si la droite  $DD'$  est parallèle au plan  $ABC$ , et ceci résulte de Euclide, XII.5. Mais ce dernier résultat nécessite chez Euclide aussi bien que chez Legendre par exemple (1), la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire un découpage continué indéfiniment et une application de l'axiome d'Archimède (ou, de façon moderne un calcul d'intégrale). La démonstration repose sur les deux étapes suivantes :



(1) voir page suivante.

Le tétraèdre  $P = ABCD$  est décomposé  
comme suit :

le tétraèdre  $P' = AB'C'D'$

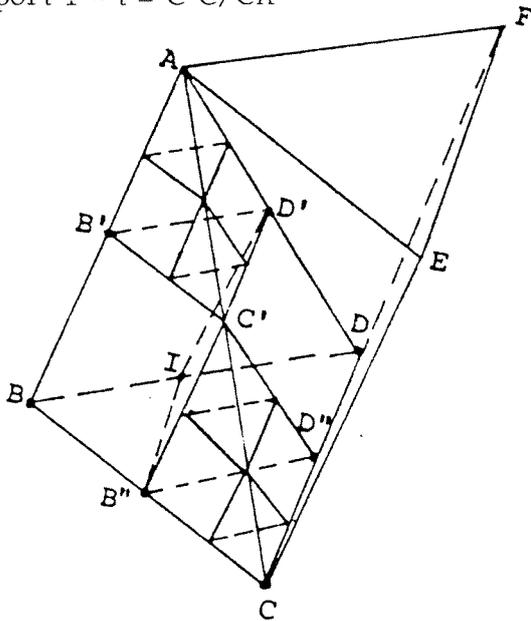
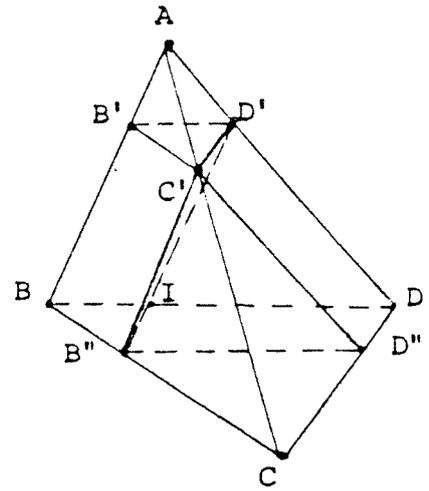
le tétraèdre  $P'' = CC'B''D''$

le prisme  $BB''IB'C'D'$

le prisme  $C'B''D''ID'D$

$P'$  est homothétique de  $P$  dans le  
rapport  $t = C'A/CA$

$P''$  est homothétique de  $P$  dans le  
rapport  $1 - t = C'C/CA$



Chacun des prismes  $BB''IB'C'D'$  et  
 $C'B''D''ID'D$  est équivalent à  $\frac{1}{8}$  du grand  
prisme  $\bar{\Pi} = AEFBCD$ . Les tétraèdres  
 $P' = AB'C'D'$  et  $P'' = CC'B''D''$  sont  
égaux et homothétiques de rapport  $\frac{1}{2}$   
de  $P$ . Si l'on admet que le volume est  
homogène de poids 3, on a  
 $\text{vol}(P') = \text{vol}(P'') = \frac{1}{8} \text{vol}(P)$   
d'où facilement  $\text{vol}(P) = \frac{1}{3} \text{vol}(\bar{\Pi})$ .

N.B. : Euclide et Liu Hui continuent la subdivision en 2, et utilisent un raisonnement  
équivalent à la formule  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$ .

On comprend alors la question de Hilbert : "Deux polyèdres de même volume sont-ils  
équivalents par découpage fini ?".

## § 5. LES VOLUMES A PARTIR DU 19ème SIECLE

On dit qu'un polyèdre  $P$  est décomposé en les polyèdres  $A$  et  $B$  si l'on a  $P = A \cup B$  et si  
 $A \cap B$  est une réunion de polygones ou de segments. On admet que si  $P$  est décomposé

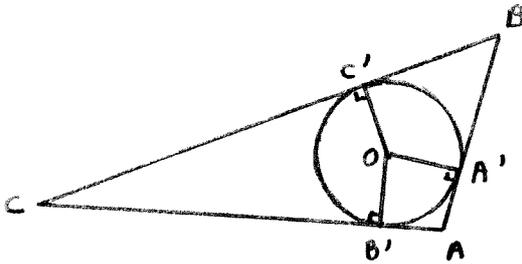
(1) Il est remarquable que, malgré la différence notable des points de vue, et l'éloignement géographique et culturel, la même construction se retrouve tant dans Euclide, XII.3, que chez Liu Hui (刘徽) un auteur chinois du 3ème siècle (voir D.B. WAGNER dans *Historia Mathematica* 6(1979), p. 164-188).

en tétraèdres le volume de P est la somme des volumes des tétraèdres et que ce volume ne dépend que de P (et non pas de la décomposition choisie). Il suffit donc de connaître le volume des tétraèdres pour pouvoir calculer le volume de n'importe quel polyèdre. Le résultat d'Euclide, obtenu par la méthode d'exhaustion, affirme que deux tétraèdres de même base et de même hauteur ont même volume.

Cependant, dans un certain nombre de cas particuliers, un découpage fini permet de conclure :

1) Pour les prismes (droits ou obliques), puisqu'il suffit de travailler sur la base plane et de le ramener ainsi à un prisme à base carrée ; puis de travailler sur l'une des faces latérale pour le ramener à un prisme droit et enfin à un cube en recommençant encore deux fois la même opération.

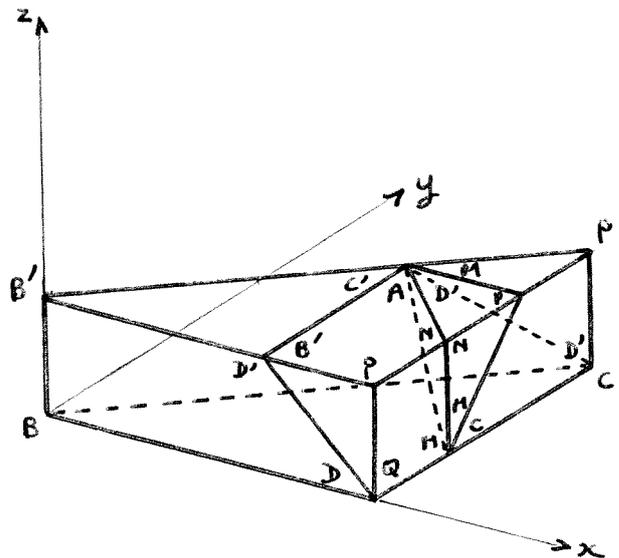
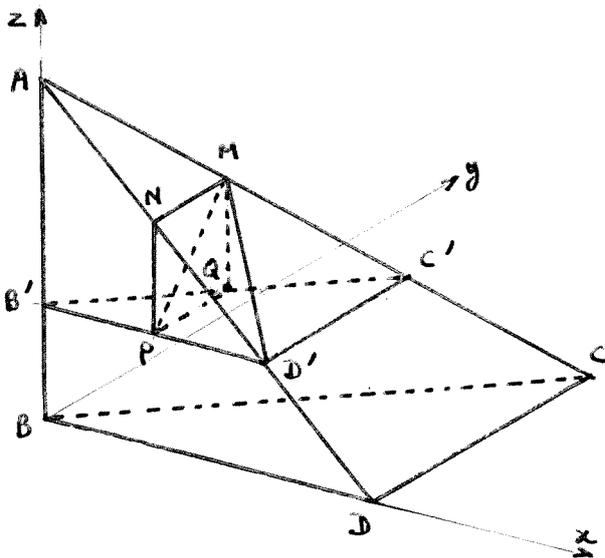
2) Pour les polyèdres symétriques par rapport à un plan (ce qui n'est pas tout à fait évident car on ne peut pas retourner un polyèdre, comme un gant, comme on peut retourner une figure plane). La démonstration analogue à celle ci-dessous pour un triangle scalène a été faite par Gerling en 1844.



O est le centre du cercle inscrit. On échange par déplacement les pièces  $B'OC'C$  et  $A'OC'B$ .

Dans l'espace on décompose le polyèdre en tétraèdres élémentaires et on utilise la sphère inscrite dans le tétraèdre.

3) En 1896 Hill découvre trois familles de tétraèdres (plus quelques isolés complétés en 1923-56-58-62 et 74 par divers mathématiciens) équivalents par découpage fini à un cube. Voici un exemple particulier de découpage en un prisme droit (ce qui résout le problème - voir plus haut) d'un tétraèdre de Hill (on trouvera les caractéristiques des autres en annexe).



On décompose le tétraèdre  $A(0,0,1) B(0,0,0) C(1,1,0) D(1,0,0)$  en les quatre morceaux  $BCDB'C'D'$  ;  $AMNPQB'$  ;  $MPD'C'Q$  et  $MNPD'$  avec  $B'D'C'$  plan  $z = \frac{1}{3}$  et  $MNPQ$  plan  $x = \frac{1}{3}$ .  
On rassemble selon le prisme de la 2ème figure.

Mais ce n'est qu'en 1943 que Sydler démontre que dans l'espace ordinaire, il y a équivalence logique entre l'analogue des définitions 1 et 2 du paragraphe 3 (équivalence entre l'équidécomposition et l'équicomplémentation). Ce résultat a été étendu à une dimension quelconque par Hadwiger en 1957 et Zylev en 1965.

En 1896 également Bricard énonce le résultat suivant :

Si deux polyèdres A et B sont équidécomposables, alors on peut trouver des entiers  $n_i$  et  $n'_j$  et  $p > 0$  tels que :

$$n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \dots + n_q \alpha_q = n'_1 \beta_1 + n'_2 \beta_2 + \dots + n'_r \beta_r + p \pi$$

où les  $\alpha_i$  sont les angles dièdres de A et  $\beta_j$  ceux de B.

Ce résultat implique la non-équidécomposabilité du cube et du tétraèdre régulier. En effet, pour le cube  $\sum n_i \alpha_i = k \frac{\pi}{2}$  tandis que pour le tétraèdre  $\sum n'_j \beta_j = l \delta$  où  $\delta$  n'est pas rationnel en  $\pi$  (car  $\cos \delta = \frac{1}{3}$ ).

Malheureusement la démonstration que donne Bricard est erronée. C'est en la reprenant que Dehn arrive en 1900 à énoncer le théorème général.

## § 6. INDICE DE DEHN . THEOREMES DE DEHN ET DE SYDLER

Dans un premier papier, peu clair, publié quelques mois avant l'intervention de Hilbert, Dehn montre qu'on peut trouver deux polyèdres de même volume qui ne sont pas équivalents. Pour cela il invente un indice I qui répond aux axiomes suivants :

a) Si P et P' sont deux polyèdres, on a

$$I(P \cap P') + I(P \cup P') = I(P) + I(P').$$

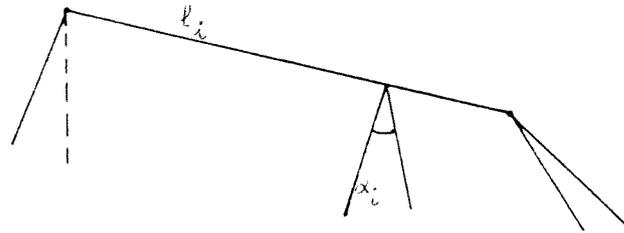
b) Si P est dégénéré, on a  $I(P) = 0$ .

c) Si P et P' sont deux polyèdres pour lesquels il existe un déplacement g avec  $g(P) = P'$ , on a  $I(P) = I(P')$ . (On remarquera l'analogie avec le volume.)

Il est alors immédiat qu'on a  $I(P) = I(P')$  si les polyèdres P et P' sont équidécomposables.

L'indice de Dehn a pris au cours des décennies plusieurs formes (rarement simples). La dernière en date, très moderne, peut s'exprimer ainsi :

C'est la somme formelle des  $(l_i, \alpha_i)$  où  $l_i$  est la longueur d'une arête et  $\alpha_i$  l'angle dièdre correspondant étendue à toutes les arêtes  $i$  du polyèdre.



On pose  $D(P) = \sum_{i=1}^n (l_i, \alpha_i)$  avec les règles d'addition et de réduction suivantes :

$$(l, \alpha) + (l', \alpha') = (l + l', \alpha)$$

$$(l, \alpha) + (l, \alpha') = (l, \alpha + \alpha')$$

$$(l, \alpha) = \left(\frac{l}{n}, n\alpha\right) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$(l, \alpha) = 0 \iff \alpha = k\pi$$

[En fait, la forme initiale de l'indice de Dehn  $D(P)$  s'appuyait sur le théorème de Bricard.]

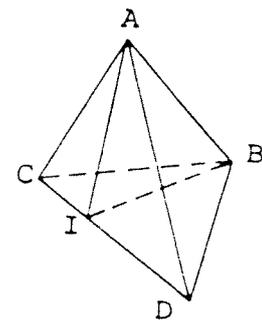
Pour vérifier l'additivité de l'invariant de Dehn, on se ramène au cas élémentaire d'un tétraèdre  $P = ABCD$  décomposé en deux tétraèdres  $P' = ABCI$  et  $P'' = ABDI$  ; l'arête  $CD$  est décomposée en deux arêtes  $CI$  et  $ID$ , mais les deux angles dièdres sont égaux à  $\delta$ , d'où  $|CD| = |CI| + |ID|$ , et

$$(|CD|, \delta) = (|CI|, \delta) + (|ID|, \delta).$$

De même l'arête  $AB$  est commune aux trois tétraèdres avec des angles  $\delta_1$  pour  $P$ ,  $\delta_2$  pour  $P'$  et  $\delta_3$  pour  $P''$  ; comme on a  $\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$ , on a

$$(|AB|, \delta_1) = (|AB|, \delta_2) + (|AB|, \delta_3).$$

Les autres arêtes et dièdres sont communs aux deux tétraèdres, et l'on a finalement  $D(P) = D(P') + D(P'')$ .



On retrouve facilement le résultat de Bricard .

Considérons maintenant un cube  $C$  et un tétraèdre régulier  $T$  de même volume que  $C$ . Soit  $l$  la longueur des arêtes de  $C$ , et  $l'$  celle des arêtes de  $T$ . Les angles dièdres du cube sont tous égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , et il y a 12 arêtes du cube, d'où

$$D(C) = (12 l, \frac{\pi}{2}) = (6 l', \pi) = 0.$$

De manière analogue on a  $D(T) = (6 \ell', \delta)$  ; mais on a  $\cos \delta = \frac{1}{3}$  ce qui exclut que  $\delta/\pi$  soit rationnel, d'où  $D(T) \neq 0$ .

En conclusion, on a  $\text{vol}(C) = \text{vol}(T)$  et  $D(C) \neq D(T)$ , Les polyèdres C et T ne sont pas équivalents.

Remarque : L'indice de Dehn (de même que le résultat de Bricard) montre qu'un polyèdre dont tous les angles dièdres sont des rationnels en  $\overline{\pi}$  est décomposable en un cube.

Sydler en 1951 et Jessen en 1967 construisirent de tels polyèdres : ce sont les polyèdres orthogonaux (c'est-à-dire que deux faces quelconques sont orthogonales dès qu'elles ont une arête commune). L'exemple de l'icosaèdre de Jessen montre qu'il ne s'agit pas toujours d'un assemblage de parallélépipèdes :

Les sommets sont les points

$$(\pm 2, \pm 1, 0)$$

$$(0, \pm 2, \pm 1)$$

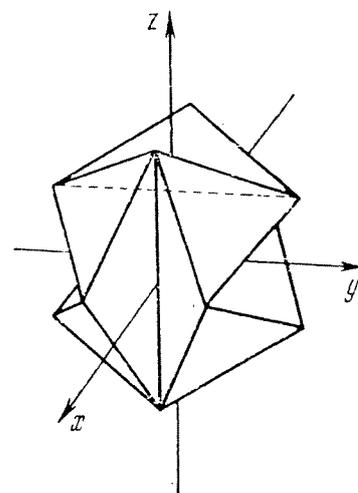
$$(\pm 1, 0, \pm 2)$$

huit des faces sont des

triangles équilatéraux et les

douze autres des triangles isocèles.

L'enveloppe convexe ressemble à l'icosaèdre régulier.



De tels polyèdres n'ayant que des angles dièdres égaux à  $\frac{\overline{\pi}}{2}$  sont décomposables en un cube. Mais l'exemple des prismes montre que cette condition n'est pas nécessaire. Le tétraèdre de Hill donné au § 5 répond à cette condition (dièdres de  $\frac{\overline{\pi}}{2}$ ,  $\frac{\overline{\pi}}{4}$  et  $\frac{\overline{\pi}}{3}$ ). Il est important de remarquer que 6 tels tétraèdres - à l'orientation près - remplissent un cube. On reviendra sur cette particularité.

Le théorème de Sydler (1965)

Le résultat de Dehn semblait clore la discussion, et de fait, il n'y eut que des progrès insignifiants jusqu'en 1940. C'est sans doute Hopf qui ramena l'intérêt sur ce problème et les progrès viendront d'un de ses élèves, nommé Sydler. Il commença à y travailler vers 1943, et démontra finalement en 1965 le résultat suivant qui lui vaudra un prix de la Société Royale Danoise :

Deux polyèdres sont équivalents si et seulement s'ils ont même volume et même indice de Dehn.

## § 7. QUELQUES AUTRES DIRECTIONS DE RECHERCHE

En géométrie plane non archimédienne (1) on démontre qu'on peut trouver deux triangles de même aire qui ne sont pas équidécomposables. Par contre, on démontre qu'il y a équivalence entre l'égalité d'aire et l'équicomplémentabilité.

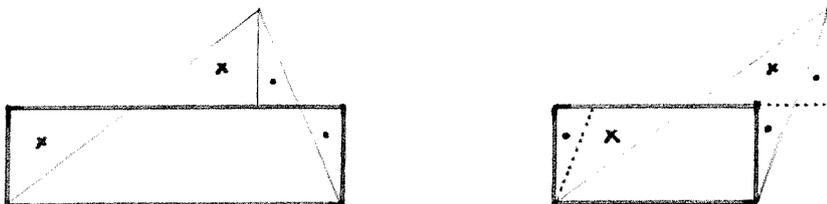
En géométrie plane non euclidienne on démontre l'équivalence des concepts d'équidécomposabilité et d'égalité d'aire aussi bien en géométrie hyperbolique qu'en géométrie elliptique. Il y a d'autre part équivalence avec la notion d'équicomplémentabilité.

En dimension supérieure à 3 il y a toujours équivalence entre équidécomposable et équicomplémentable mais il n'y a pas équivalence avec l'égalité de "volume" (ou ce qui en tient lieu). Des analogues de l'indice de Dehn en dimension 4 et plus ont été proposés par Hadwiger (en 1954). En dimension 4 les conditions trouvées sont nécessaires et suffisantes mais on a seulement démontré leur nécessité en dimension 5 et plus.

Sous groupes de déplacements. Au lieu de transformer une figure en une autre en utilisant des déplacements quelconques pour réassembler les différentes pièces, on peut essayer de se limiter à des déplacements d'un sous-groupe donné à l'avance.

Hadwiger et Oher ont démontré en 1951 que pour les polygones du plan on pouvait se contenter de translations et de symétries centrales (et cela est minimum en ce sens que tout sous groupe permettant l'équidécomposabilité de deux figures de même aire contient ces deux types de transformations). La démonstration repose sur la suite de dessins ci-dessous :

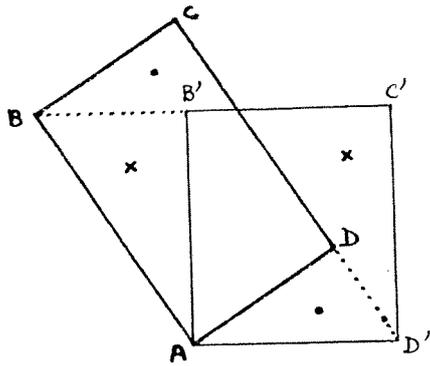
1) Un triangle est équivalent à un rectangle (2 cas de figures)



---

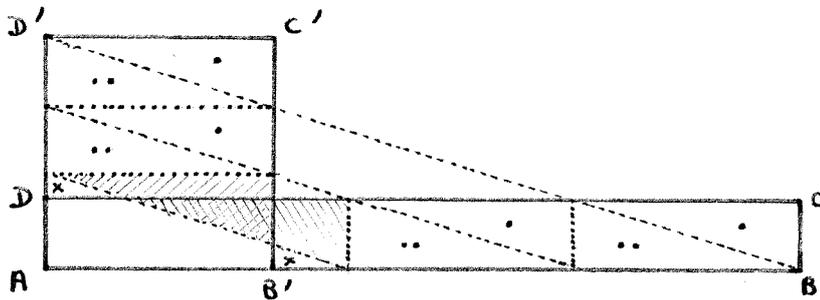
(1) On peut trouver deux segments AB et AC avec  $|AB| < |AC|$  tels qu'il n'existe pas d'entier n avec  $n \cdot |AB| > |AC|$ .

2) Un rectangle est équivalent à un rectangle de direction de côtés donnée.



Si ABCD est trop étroit, on le coupe en deux (ou plus) morceaux égaux qu'on ré-empile comme page 34.

3) Un rectangle est équivalent à un carré



4) Un polygone est équivalent à une réunion de triangles.

Pour les polyèdres, le groupe minimum est celui des déplacements.

Si on prend un sous-groupe de déplacements qui ne contient pas le groupe minimum, on peut se poser la question de chercher les conditions qui rendent deux figures équidécomposables selon ce sous-groupe. Hadwiger a résolu le problème dans le cas des polygones du plan et du groupe des translations :

Soit  $\vec{\Delta}$  une droite orientée et  $P$  un polygone. On appelle poids du côté  $AB$  du polygone  $P$  relativement à  $\vec{\Delta}$  la quantité  $\varepsilon l$  où  $l$  est la longueur de  $AB$  et  $\varepsilon$  vaut 0 si  $AB$  n'est pas parallèle à  $\vec{\Delta}$ , +1 si  $AB$  est parallèle à  $\vec{\Delta}$  et si localement  $P$  est à droite de  $AB$  orienté comme  $\vec{\Delta}$  et -1 si  $P$  est à gauche de  $AB$ . L'indice de Hadwiger de  $P$  relativement à  $\vec{\Delta}$  :

$H_{\vec{\Delta}}(P)$  est la somme des poids de tous les côtés du polygone  $P$ . Le théorème annonce que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux polygones  $P$  et  $Q$  de même aire soient équidécomposables par translation est que  $H_{\vec{\Delta}}(P) = H_{\vec{\Delta}}(Q)$  pour toute droite orientée  $\vec{\Delta}$ .

Exemples : Deux parallélogrammes de même aire car si  $P$  est un parallélogramme

$$H_{\vec{\Delta}}(P) = 0 \text{ pour tout } \vec{\Delta} .$$

Des indices analogues faisant intervenir plans et droites ont été créés en dimension 3 et l'on a aussi une condition nécessaire et suffisante.

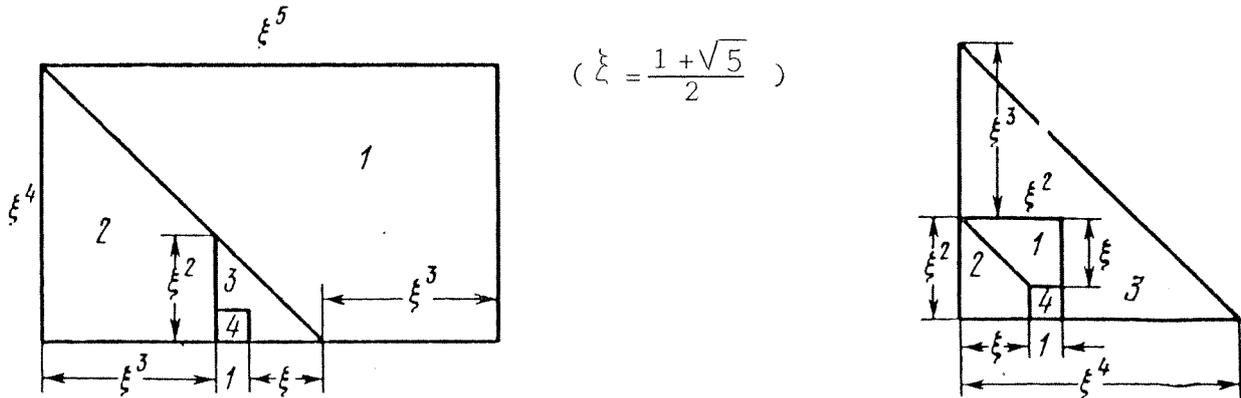
D'autres groupes. Au lieu de choisir un groupe de déplacement, on peut prendre un autre groupe de transformation.

Dans  $\mathbb{R}^3$  deux polyèdres quelconques sont décomposables selon le groupe des similitudes directes, c'est-à-dire qu'il existe une décomposition de  $P$  ( $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$ ) et une décomposition de  $Q$  ( $Q = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ ) ainsi qu'un ensemble de similitudes directes  $\{s_i\}$  telles que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad s_i(P_i) = Q_i$ .

Ce résultat est évident dans  $\mathbb{R}^2$  puisqu'une homothétie amène le polygone  $P$  à avoir même aire que le polygone  $Q$ . Aussi dans  $\mathbb{R}^2$  a-t-on le résultat plus fort suivant :

Si  $G$  est le groupe des homothéties-translations, deux polygones quelconques sont équidécomposables selon  $G$ .

Une autre façon de voir ce théorème est la suivante : On dispose d'une photocopieuse permettant des agrandissements et des réductions dans des rapports arbitraires et d'une paire de ciseaux. On peut décomposer un polygone  $P$  en un nombre  $n$  de morceaux, chaque morceau subit une homothétie à la photocopieuse et on peut les rassembler en conservant la direction des côtés pour obtenir un polygone  $Q$  fixé à l'avance. La figure ci-dessous en donne un exemple :



### § 8. LIEN AVEC LE 18ème PROBLEME DE HILBERT

Ce problème est la recherche des polyèdres pavant l'espace. Sydler a démontré en 1943 que :

Si un polyèdre  $P$  est équidécomposable avec un cube et si on peut décomposer  $P$  en  $n$  polyèdres  $Q$  isométriques alors  $Q$  est aussi équidécomposable avec un cube.

Comme le cube pave l'espace ainsi qu'un certain nombre de prismes, si on peut décomposer l'un de ces polyèdres en polyèdres isométriques, on obtient à la fois d'autres pavages de l'espace et des polyèdres équidécomposables avec un cube.

Le théorème de Sydler donné ci-dessus permet de démontrer d'une autre façon que les tétraèdres de Hill sont équidécomposables avec un cube, puisque, comme il a été vu page 39, ces tétraèdres pavent le cube.

#### BIBLIOGRAPHIE

- . BOLTJANSKII (V.-G.) - Hilbert's third problem - Traduction anglaise chez V.-H. Winston & Son - Washington D.-C.
- . CARTIER (Pierre) - Décomposition des polyèdres : le point sur le 3ème problème de Hilbert - Séminaire Bourbaki - 37ème année - n° 646 (juin 1985)
- . I.R.E.M. de Strasbourg - Géométrie 1ère S et E - Chapitre sur les "Puzzles" Editions Casteilla ( anciennement Istra)

Edges	$H_1(\alpha)$		$H_2(\alpha)$		$H_3(\alpha)$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$\sin \alpha$	$\alpha$	$2 \sin \alpha$	$\alpha$	$2 \sin \alpha$	$\alpha$
$ac$	$\sqrt{3} \cos \alpha$	$\pi/3$	$\sqrt{3} \cos \alpha$	$\pi/3$	$\sqrt{12} \cos \alpha$	$\pi/6$
$ad$	1	$\pi/2$	2	$\pi/2$	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha\right)$
$bc$	1	$\pi/2$	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\pi - \arccos\left(\frac{1}{2} \cot \alpha\right)$	2	$\pi/2$
$bd$	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$	$2 \sin \alpha$	$\pi/2 - \alpha$	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$
$cd$	$\sin \alpha$	$\alpha$	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\arccos\left(\frac{1}{2} \cot \alpha\right)$	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha\right)$

Edges	$T_0$		$T_1$		$T_2$		$T_3$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$
$ac$	$\sqrt{2}$	$\pi/2$	$1/\tau$	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$ad$	2	$\pi/4$	1	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$	2	$\pi/2$
$bc$	1	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$
$bd$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3}/\tau$	$\pi/3$
$cd$	$\sqrt{2}$	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	2	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau^3}$	$2\pi/5$

Edges	$T_4$		$T_5$		$T_6$		$T_7$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau^3}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$4\pi/5$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$3\pi/5$
$ac$	$\sqrt{3} \tau$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$ad$	2	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
$bc$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
$bd$	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$cd$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$	$2/\tau$	$\pi/2$	$2\tau$	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$3\pi/5$

Edges	$T_8$		$T_9$		$T_{10}$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$3\pi/10$
$ac$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
$ad$	$\sqrt{7}/2$	$\alpha_1 = \arctan \sqrt{7/5}$	$\sqrt[4]{5}/(2\sqrt{\tau})$	$\pi/5$	$\sqrt{7-3}/\tau/2$	$\alpha_3 = \arctan \sqrt{9+2\sqrt{5}}$
$bc$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/10$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
$bd$	$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\sqrt{7+3\tau}/2$	$\alpha_2 = \arctan \sqrt{9-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{7-3}/\tau/2$	$\pi - \alpha_3$
$cd$	$\sqrt{7}/2$	$\pi - \alpha_1$	$\sqrt{7+3\tau}/2$	$\pi - \alpha_2$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}/2$	$3\pi/5$

Edges	$T_{11}$		$T_{12}$		$T_{13}$		$T_{14}$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$\sqrt[4]{5} \sqrt{\tau}$	$3\pi/10$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$
$ac$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$2\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$
$ad$	1	$\alpha_4 = \pi - \arctan 2\tau^2$	$\sqrt{5}/2$	$\alpha_7 = \pi - \arccos 2/3$	$2/\tau$	$\pi/2$	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$
$bc$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/10$	2	$\pi/4$	$2/\tau$	$\pi/2$	$\sqrt{7+3\tau/\tau^2}$	$\pi - \alpha_2$
$bd$	1	$\alpha_5 = \pi - \arctan 2$	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \alpha_7/2$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{7+3\tau/\tau^2}$	$\alpha_2$
$cd$	1	$\alpha_6 = 2\pi - \alpha_4 - \alpha_5$	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \alpha_7/2$	$\sqrt{18-11\tau}$	$3\pi/5$	$2\sqrt{18-11\tau}$	$3\pi/10$

Edges	$T_{15}$		$T_{16}$		$T_{17}$		$T_{18}$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$2\sqrt{2+\tau}$	$\pi/10$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}$	$\pi/5$
$ac$	$2\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\tau\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\tau\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$
$ad$	$\sqrt{10-3\tau}$	$\pi - \alpha_3$	$2\tau$	$\pi/2$	2	$\pi/2$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3$
$bc$	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3$
$bd$	$\sqrt{10-3\tau}$	$\alpha_3$	$\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3$	$\sqrt{3/\tau^2}$	$\pi/3$
$cd$	$\sqrt{18-11\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}$	$\pi/5$

Edges	$T_{19}$		$T_{20}$		$T_{21}$		$T_{22}$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$2\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/6$	$2\sqrt{2+\tau}$	$\pi/10$	$\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$\tau\sqrt{3}$	$\pi/3$
$ac$	$2\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$2\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$2\sqrt{3}$	$\pi/3$
$ad$	$\sqrt{10-3\tau}$	$\pi - \alpha_8$	$\sqrt{6+\tau}$	$\pi - \alpha_9$	$\sqrt{3-\tau}$	$3\pi/5$	$2\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$
$bc$	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{7-\tau}$	$\pi - \alpha_{10}$
$bd$	$\sqrt{10-3\tau}$	$\alpha_8 = \arccos u,$ $u = \tau^2/(2\sqrt{3})$	$\sqrt{6+\tau}$	$\alpha_9 = \arccos v,$ $v = \tau^{3/2}/(2\sqrt{5})$	$\sqrt{5}-1$	$\pi/2$	$\sqrt{7-\tau}$	$\alpha_{10} = \arctan w,$ $w = \sqrt{11+16\tau}$
$cd$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/3$	$\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/3$	$2\sqrt{3-\tau}$	$3\pi/10$

Edges	$T_{23}$		$T_{24}$		$T_{25}$		$T_{26}$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
$ab$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\alpha_{12}$	$\sqrt{3}$	$\pi/3 - \alpha_{12}$
$ac$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\alpha_{12} = \arctan \sqrt{3/5}$
$ad$	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{11-4\tau}/2$	$\pi - \alpha_{11}$	$2\sqrt{4-2\tau}$	$\pi/2$	$\sqrt{3-\tau}$	$4\pi/5$
$bc$	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$3\pi/5$	$2\sqrt{2}$	$\pi/2$
$bd$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{11-4\tau}/2$	$\alpha_{11} = \arccos z,$ $z = 1/(2\sqrt{3\tau^2})$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3 - \alpha'_{12}$	$\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$
$cd$	$\sqrt{7-4\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}/2$	$3\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/3$