UN LOGICIEL DE CALCUL SYMBOLIQUE : MU - MATH

Etienne MEYER

Mu-math est un logiciel de calcul symbolique qui permet d'obtenir entre autres, les résultats suivants, sans programmation, uniquement par interrogation, à l'aide d'un "langage" très simple :

. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$

. $\left[\left(\frac{17}{9}\right)^3 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \right] \times \frac{1}{\frac{51}{12} + \frac{35}{36}} = \frac{307871}{243648}$

. Le P.G.C.D. de 3621 et 2496 est 3

. $10! = 3628800$

. $250! = \ldots$ suivent 499 chiffres !!!

. $\sqrt{29952} = 48\sqrt{13}$

. $9X^4 - Y^4 + 2Y^2 = 1$ lorsque $X = 10864$ et $Y = 18817$
(se reporter à l'article de M. de Cointet dans "L'Ouvert" n° 38)

. Les solutions de l'équation en x, $x^2 - 3x + 2$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$

. Les solutions de l'équation en z, $z^5 = 1$, sont $z_1 = e^{8i\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = e^{6i\frac{\pi}{5}}$,
$z_3 = \ldots z_5 = 1$.

. $(x^2 - 3x + 1)(2x - 1) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$.

. La dérivée de $\ln(x^2 + 1)$ est $\frac{2x}{1 + x^2}$.

. Une primitive de $\cos^3 x$ est $\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x$.

. La limite en $+\infty$ de $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$ est $+\infty$.

. $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \frac{1}{4}(n^2 + 2n^3 + n^4)$.

. Le développement de Taylor à l'ordre 10 de $x\sin x$ en $x = 0$ est
$x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{5040}x^8 + \frac{1}{362880}x^{10}$.

. $\displaystyle\int_0^8 \frac{x}{1 + x}\, dx = 8 - \ln 9$

1. PRESENTATION GENERALE DE MU-MATH

Ce logiciel est écrit mu-SIMP (un dialecte de LISP, langage bien adapté à ce type de problème comme l'est certainement aussi PROLOG) et est complètement "ouvert" : il peut être utilisé tel quel, ou examiné, modifié et complété à la guise de l'utilisateur. Des leçons d'utilisation et des leçons de programmation (bien faites) sont disponibles avec le langage et le logiciel sur les disquettes. Il est adaptable sur les micros 8 bits fonctionnant sous CP/M et figure au catalogue des logiciels de l'opération I.P.T. pour les 16 bits (je l'ai utilisé sur Apple II + 64K avec la carte Z80 et sur LX549 ; il est transférable sur d'autres machines E.N.).

L'utilisation de mu-math en classe (2nde - 1ère T) demande une première préparation de l'ordre de 15mn avec les élèves pour leur expliquer l'essentiel du fonctionnement et leur donner la liste des principales "fonctions" disponibles. La mise en route en salle informatique demande quelques minutes. Vous ai-je sufisamment convaincu de la simplicité et de l'intérêt de ce logiciel pour que vous me suiviez dans une approche plus détaillée et plus honnête ?

La première difficulté rencontrée est celle de la lecture d'expressions mathématiques écrites sur une ligne avec quelques conventions spécifiques. C'est ainsi que vous ne verrez pas $e^{8i\frac{\pi}{5}}$ mais # E ↑ (8*# I*#PI/5). On s'y fait !

La deuxième difficulté est liée aux nombreuses formes possibles d'une même expression ; par exemple :

$$
\begin{aligned}
& 3x(1 - x)(1 + x) = x(1 - x)(3 + 3x) = \\
= \; & 3(x - x^2)(1 + x) = 3x(1 + x - x(1 + x)) = \\
= \; & \ldots \qquad\qquad = 3(x - x^3) =
\end{aligned}
$$

Et encore, dans cet exemple il n'y a pas de dénominateur ! Le logiciel met à la disposition de l'utilisateur des "variables de contrôle" ; suivant les valeurs affectées à ces variables, l'expression donnée sera écrite sous telle ou telle forme. C'est un peu complexe (mais pas surprenant). Heureusement, le logiciel gère lui-même ces variables dans certaines recherches (recherche de primitives par exemple) et dans un premier temps, il n'est pas nécessaire de pénétrer dans l'arbre des nombreuses possibilités.

Par ailleurs, mu-math met à la disposition de l'utilisateur, trois configurations standards de ces variables, accessibles par trois fonctions. On obtient ainsi, en posant

$$P = \left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right] \times \frac{1}{x^2+y^2}$$, les résultats suivants :

$$EXPD(P) = \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2+y^2}$$

FCTR(EXPD(P)) = 2 (tout de même !)

mais ... $EXPAND(P) = \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$

et $FCTR(P) = \dfrac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{x^2+y^2}$ (sans changement !)

Hum ! Il est temps de revenir à des choses simples.

2. L'ARITHMETIQUE ET L'ALGEBRE

Mu-math manipule les entiers jusqu'à 661 chiffres, ce qui est assez spectaculaire ; en fait, il travaille sur des expressions, et les calculs qu'il fait sont nécessairement exacts (un exemple est donné, à la fin de l'article, de programme permettant le calcul d'une valeur approchée des racines des entiers). Grâce à l'application des règles de calcul sur les fractions, il permet donc tout calcul exact sur les rationnels. Mu-math dispose des constantes #E, #I, #PI (pour e, i, π) : il n'en connaît pas, bien sûr, la valeur, mais seulement quelques propriétés lui permettant la simplification d'expressions contenant ces constantes. C'est ainsi que ln(e) sera transformé en 1, i^2 en -1, $\cos(\pi)$ en -1. Par contre, tel qu'il est livré ce logiciel ne donne pas $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. (Il vous est possible de complèter le logiciel...). La manipulation d'expressions contenant des racines carrées procède de la même logique. $\sqrt{2}$ (en fait 2 ↑ (1/2)) n'est pas connu, mais grâce à l'application des règles sur le calcul avec exposants, on obtiendra $(\sqrt{2})^2 = 2$.

L'application de ces mêmes règles donnera également $(\sqrt{A})^2 = A$; $\sqrt{-1} = i$; $\sqrt{i} = \sqrt{i}$ (!) ; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{-16} = 4i$. Tout n'est pas conforme à nos habitudes et à nos exigences, mais tout cela procède "d'une certaine logique", celle choisie par l'auteur du programme : aucun contrôle sur A pour l'utilisation de $\sqrt{A}$, et choix de l'ordre d'application des règles de calcul (par exemple : on obtiendra $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i^2 = -1$ et non pas $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$).

Or, il n'y a pas de "bon choix" ! et certaines situations peuvent amener des "erreurs" : à l'utilisateur de rester prudent et attentif (ou de modifier les règles du jeu ! - problème analogue pour 0° -). Je reviendrai sur les conséquences pédagogiques de ces difficultés à la fin de l'article.

La résolution des équations

Une équation est d'abord considérée comme une expression particulière, (et pour mu-math, une équation sera écrite sous la forme E1 == E2 ; par exemple : $ax^2 + bx + a == a^2 + a$) et ces expressions sont manipulables : on peut les multiplier par un réel, les ajouter, les multiplier, les transformer par une fonction (sous-entendu : membre à membre).

Pour résoudre soi-même l'équation E : $3x + 4 ==10$, on pourra donc demander l'évaluation des expressions suivantes :

$$E1 : E - (4==4)$$
$$E2 : \frac{E1}{3}$$

Et on obtient l'équation suivante : $x==2$ qui représente en fait la solution.

Mu-math sait essentiellement résoudre (formellement) les équations du second degré et donner les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre. Il ramène également l'équation E1.E2 ==0 à E1 ==0 et E2==0 mais ne découvre pas par lui-même les factorisations (autres que la factorisation par x) permettant la résolution de certaines équations (c'est le contraire qui aurait été surprenant ! mais peut-être qu'un jour, lorsque l'intelligence artificielle aura réellement fait des progrès, pourrons-nous disposer de fonctions de mise en facteurs...).

Voici quelques exemples de résolution d'équations par mu-math :

. SOLVE $(t^3 + 2t^2 - 4t==t\ ,t)$ donne $t== -1 +\sqrt{6}$
$t== -1 -\sqrt{6}$
et $t== 0$

(t a pu être mis en facteur)

. SOLVE $(x^2 - kx + 2,\ x)$, c'est-à-dire, SOLVE $(x^2 - kx + 2==0,x)$
donne : $x== \frac{k}{2} + \sqrt{-2 + \frac{k^2}{4}}$ et $x== \frac{k}{2} - \sqrt{-2 + \frac{k^2}{4}}$

. SOLVE $(x^2 - kx + 2,k)$ donne $k==x + \frac{2}{x}$

(il faut, bien sûr, préciser le nom de l'inconnue ; par contre, ici, aucun "test" n'est prévu sur les paramètres - cas $x = 0$ -).

.SOLVE ($x^2 - 3x + 2$, k) donne $\{\ \}$ (pas de solution de k !)

.SOLVE (x==x, x) donne x==ARB(1)

(c'est-à-dire : une première valeur ARBitraire pour x)

.Par contre, SOLVE (ax==0,x) donne x==0 sans précaution.

Mu-math possède également un ensemble très riche de fonctions permettant de manipuler les matrices (et par conséquent de résoudre des systèmes d'équations), mais vu le sort actuellement réservé aux matrices dans l'enseignement secondaire, je n'en dirai pas plus.

3. L'ANALYSE

On dispose, entre autres, des fonctions ln, sin, cos, exp avec des variables de contrôle (nombreuses pour les fonctions trigonométriques) permettant de préciser si l'on souhaite l'utilisation de telle règle de transformation ou non. Mais il n'est pas, fort heureusement, nécessaire dans un premier temps de rentrer dans ces considérations délicates pour utiliser avec profit les fonctions suivantes du logiciel :

LIM pour la recherche de limite,
DIF pour dériver,
INT et DEFINT pour la recherche d'une primitive et l'intégration
TAYLOR pour le développement en série de Taylor.

Recherche de limite

Il faudra préciser, non seulement l'expression de la fonction, mais également le nom de la variable, la valeur particulière x_0 de la variable en laquelle on désire la limite, et éventuellement s'il s'agit d'une limite à gauche (par défaut, c'est la limite à droite qui est recherchée). Les valeurs possibles pour x_0 sont : un nombre ou un symbole désignant un nombre, PINF, MINF ($+\infty$, $-\infty$), PZERO, MZERO (0 par valeurs positives ou par valeurs négatives). Pour les réponses, s'y ajoutent encore CINF ($\frac{1}{0}$), ? (limite n'existe pas) et il est possible que le logiciel demande à l'utilisateur des précisions sur des paramètres influençant la réponse :

.LIM ($\frac{x^2 + 1}{dx + 1}$, x, PINF) provoquera la question : quel est le signe de d ?
A la réponse + de l'utilisateur, mu-math répond PINF pour $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x^2 + 1}{dx + 1})$

.LIM ($\frac{1}{x}$, x, 0) donne PINF (limite à droite)

.LIM ($\frac{1}{x}$, x, O, TRUE) donne MINF (limite à gauche)

.LIM (sin x, x, PINF) donne ? (pas de limite)

Dérivation

Aucune difficulté pour dériver ne m'est apparue, et ce n'est guère surprenant : les règles de dérivation sont claires et permettent d'arriver au résultat. On sera parfois amené à transformer l'expression proposée par mu-math, à l'aide de FCTR ou EXPD, pour lui donner une forme plus agréable. Une remarque cependant : mu-math ne sera guère gêné si vous lui demandez la dérivée de ln $(-x^2)$; il travaille sur des expressions, à nous de lui poser de bonnes questions !

Recherches de primitives et intégration

C'est vraissemblablement la partie la plus formidable du logiciel. Bien sûr, il échoue sur de nombreux exemples (il donne alors comme réponse, la question posée ou une question équivalente), mais quelle assurance dans de nombreux cas où nous, nous savons qu'on peut y arriver, mais reculons devant l'ampleur des calculs.

.INT ($\cos^3$ x, x) donne $\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x$

.INT (INT(sin x,y),x) donne - y cos x

.INT ($\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$, x) donne $\ln(3 + 2x + x^2)$

.INT ($\frac{1}{x^2 + x}$, x) donne $\ln\left(\frac{-x}{1 + x}\right)$

(pourquoi ce signe - ? C'est dommage, mais tout de même, ça me donne une bonne idée, ça aide...)

.INT (x sin x, x) donne -x cos x + sin x

.INT ($\sin^6$ x + $\cos^6$ x, x) donne $\frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x$

.DEFINT ($\frac{1 - x}{1 + x}$, x, 0,1), c'est-à-dire $\int_0^1 \frac{1 - x}{1 + x}$, donne $2 \ln 2 - 1$

.INT ($\sqrt{1 + x^3}$, x) donne ..... INT ($\sqrt{1 + x^3}$, x).

4. LA FONCTION TRACE

En mu-SIMP, sauf ordre explicite d'impression, n'apparaît à l'écran que le résultat de la dernière évaluation. On dispose cependant d'une fonction aux possibilités très intéressantes : TRACE. Ainsi, si dans le programme d'une fonction F, on utilise les fonctions F1, F2, F3 et qu'on applique la fonction F après avoir demandé TRACE (F1, F2, F3), on obtiendra le résultat de l'évaluation de chacune des fonctions F1, F2 et F3 à chaque fois que le programme principal F les appellera. Ceci permet d'obtenir une trace de la manière dont mu-math cherche à résoudre le problème posé (mais nécessite de connaître les fonctions-clefs intéressantes : on peut trouver celles-ci en listant le programme mu-math).

L'intérêt pédagogique de cette fonction TRACE est évident : elle permet de montrer la méthode utilisée pour résoudre les problèmes ; celle-ci est systématique, déterministe. Par exemple, dans la recherche d'une primitive de $\frac{1 + x}{3 + 2x + x^2}$ (où nous reconnaissons immédiatement $u'u^{-1}$) la fonction INT, reconnaissant un produit ($(1 + x) \times \frac{1}{3 + 2x + x^2}$) essaye d'abord une intégration par parties, abandonne rapidement cette voie, puis décompose la fonction en $\frac{1}{3 + 2x + x^2}$ et $\frac{x}{3 + 2x + x^2}$. La recherche d'une primitive de chacune de ces fonctions aboutissant à un résultat, le programme ne cherche pas de voies plus simples. C'est ainsi que le résultat est obtenu ici par un chemin assez complexe (passage par ATAN ($\frac{x + 1}{\sqrt{2}}$)). Dans d'autres cas, la "trace" de la recherche peut apporter des idées intéressantes.

5. DERNIER PARAGRAPHE

Quel est l'avenir d'un tel logiciel ? Quelle est son utilité ? Voici quelques réflexions faisant suite à une modeste utilisation en classes (2nde, 1ère, Term.).

- La mise en oeuvre est très simple et les élèves aiment bien.
- Pour certaines pages d'exercices, la réussite de mu-math est de l'ordre de trois exercices sur quatre. Moralité dégagée de cette observation : si mu-math y arrive, vous (les élèves) devriez y arriver aussi en suivant les bons conseils de votre professeur ; si mu-math n'y arrive pas, il doit y avoir une "astuce" à appliquer avant de mettre en oeuvre les méthodes classiques.
- Les quelques "ennuis" rencontrés ont donné une bonne occasion pour approfondir des points délicats.
- L'utilisation de la fonction TRACE a permis une bonne réflexion chez certains élèves sur les méthodes de recherche de primitives.

Sans rentrer dans les détails, je voudrais signaler tout de même qu'il est possible de compléter mu-math par des programmes écrits en mu-SIMP (mais ceci n'a pas été fait entièrement avec les élèves, impérialisme BASIC oblige !) Voici l'exemple du calcul de la racine carrée d'un rationnel positif à une précision donnée : RAC(A, B, C) donne, sous forme décimale ("troncature" après écriture sous forme $n \cdot 10^{-p}$) et sous forme rationnelle, une valeur approchée de $\sqrt{A}$ à 10^{-B} près, en prenant C comme première valeur de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n + a^2}{2a}$. Par défaut, C vaut 1 et B vaut 5.

```
?       FUNCTION VAP(E,N),
    POINT:N,
    NEWLINE(1),
    PRTMATH(E,0,0,TRUE),
    POINT:FALSE,E,
ENDFUN$


? FUNCTION RAC(X,N,A),
    WHEN ABS(A↑2-X)<10↑( -N),A,EXIT,
    RAC(X,N,(A+X/A)/2),
ENDFUN$


? FUNCTION RACINE(X,N,A),
    WHEN NOT NUMBER(X),X↑(1/2),EXIT,
    WHEN NUMBER(A↑(1/2)),X↑(1/2)),X↑(1/2) EXIT,
    BLOCK
          WHEN N=FALSE,N:5 EXIT,
    ENDBLOCK,
    BLOCK
          WHEN A=FALSE,A:1 EXIT,
    ENDBLOCK,

    VAP(RAC(X,N,A),N),
ENDFUN$


? RACINE(2,4,2);

@:
1.4142
 577 / 408


? RACINE(19);

@:
4.35899
 5331463645914715901021239526856398081 / 1223121644931491741401139604654015680


? RACINE(3,1);

@:
1.7
 7 / 4


? RACINE(3,2);

@:
1.73
 97 / 56
```

```
? RACINE(3,3);

@:
1.732
 97 / 56


? RACINE(3,4);

@:
1.7320
 18817 / 10864
```

Ce logiciel, sans être parfait, est merveilleux. D'autres, du même genre, vont certainement arriver, par voies scolaires ou non ; ils vont influencer petit à petit notre enseignement, modifier exercices et "problèmes" à poser aux élèves. Je crois qu'il serait intéressant que nous échangions nos expériences, nos essais, notre réflexion...
Si cela vous intéresse, écrivez à "L'Ouvert" qui transmettra et nous examinerons la suite à donner.