
NOS ENFANTS S'INTERESSENT ENCORE...

ou :

DIFFERENTES CONSTRUCTIONS D'UN PENTAGONE REGULIER A L'AIDE DE LA REGLE ET DU COMPAS

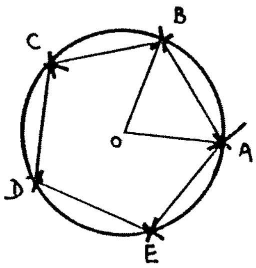
par Jean-Paul BOMANS

Dans une classe de 1ère S, à propos d'exercices portant sur les relations métriques dans le triangle, j'ai demandé à mes élèves de calculer le côté et l'apothème d'un octogone régulier puis d'un octogone étoilé régulier. Je me suis alors aperçu que la notion de polygone régulier constructible à l'aide de la règle et du compas leur était totalement étrangère et constituait donc pour tous un énorme champ d'investigation.

Les cas du triangle équilatéral, du carré, de l'hexagone, des octogones et des dodécagones ont été rapidement résolus. Restait alors, pour nous, les cas des pentagones et des décagones. Et là, j'ai osé !

J'ai osé leur demander, pour la fois suivante, de trouver une construction du côté d'un pentagone régulier à l'aide de la règle et du compas, ce qui constituait une question de cours voici encore quelques années (voir annexe 1). Quelle ne fut pas ma surprise en confrontant les résultats : pas moins de quatre constructions différentes furent proposées. Il ne restait plus qu'à vérifier qu'elles convenaient. Voici ce que cela a donné :

1. CALCUL DU COTÉ C_5 DU PENTAGONE RÉGULIER INSCRIT DANS UN CERCLE DE RAYON R



On suppose le pentagone ABCDE construit.

1) Calcul de $\cos \frac{2\pi}{5}$

O est l'isobarycentre de A, B, C, D, E ; donc :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.
Projetons sur (OA) ; on obtient :
$R(1 + pr\,(\overrightarrow{OB}) + pr\,(\overrightarrow{OC}) + pr\,(\overrightarrow{OD}) + pr\,(\overrightarrow{OE})) = 0$

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0\,.$$

Et en posant $x = \cos\frac{2\pi}{5}$:

$4x^2 + 2x - 1 = 0$

d'où : $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Or, $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

donc : $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\,.}$

2) Calcul de c_5

Dans OAB : $BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos\widehat{OA,OB}$

donc : $AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\frac{2\pi}{5}$

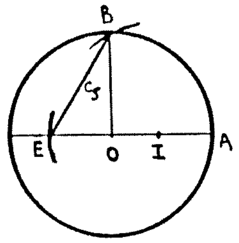
$= 2R^2 - 2R^2\,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$= R\,\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

ainsi : $\boxed{c_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,.}$

2. CONSTRUCTIONS ET JUSTIFICATIONS

Construction 1



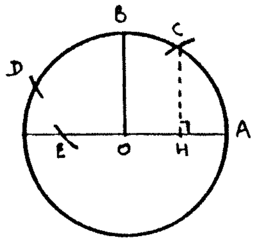
I est le milieu de (O,A)

IB = IE

C_5 = BE

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

Construction 2



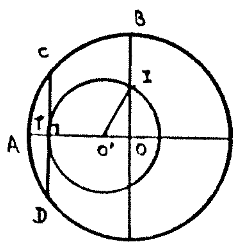
AC = BD = R

CD = CE

BE = C_5

L'arc CD vaut $\frac{\pi}{2}$ donc CD = CE = R $\sqrt{2}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (OA). Alors, en utilisant Pythagore : EH = $\frac{R}{2}\sqrt{5}$. Il est ensuite facile de calculer OE puis BE et de vérifier ainsi la construction.

Construction 3



I est le milieu de (O,B)

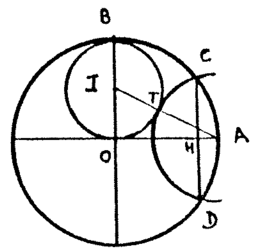
OO' = $\frac{1}{4}$ OA

CD est tangente au cercle (O',O'I) et parallèle à BO

CD = C_5

Le calcul permettant de démontrer ce résultat est laissé au soin du lecteur.

Construction 4



I est le milieu de (O, B).

On trace le cercle de centre I et de rayon R/2.

On trace le cercle de centre A tangent en T au précédent.

CD = C_5.

Le calcul est ici un peu plus long mais repose toujours sur une application répétée du théorème de Pythagore.

N.D.L.R. : Il y a deux cercles de centre A, tangents au cercle (I,R/2). On peut construire outre C et D, deux autres points C' et D'. Soit A' le point diamétralement opposé à A, on démontre que CC'A'D'D est un pentagone régulier.

3. EPILOGUE

Une fois la construction du pentagone réalisée, celle du pentagone étoilé, du décagone et du décagone étoilé en découlent immédiatement ainsi que les calculs de leurs côtés et de leurs apothèmes.

Plusieurs élèves se sont alors lancés dans le cas de l'heptagone régulier (un essai figure en annexe 2). Il a fallu démolir leurs tentatives et, une fois n'est pas coutume, les décourager dans leur impossible entreprise (voir aussi l'annexe 3).

4. ANNEXES

Annexe 1 : Emile Borel, Géométrie 1er et 2ème cycle, Armand Colin, 1921.

Pentagone et décagone. — Divisons une circonférence en 10 parties égales (fig. 361) et joignons le premier point A au second B et au quatrième D; soit M le point d'intersection de AD avec le rayon OB; je dis que les triangles AMB et OMD sont isoscèles et semblables. Il suffit d'évaluer leurs angles au moyen des arcs qu'ils interceptent sur la circonférence. Celle-ci ayant été divisée en 10 parties égales chacun des arcs AB, BC, ..., LA vaut $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ de quadrant; on en conclut

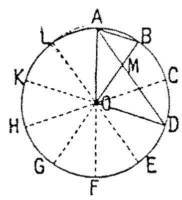


Fig. 361.

$$\widehat{MAB} = \widehat{MDK} = \frac{2}{5} \text{ dr.}$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{BMA} = \widehat{DMO} = \widehat{MOD} = \frac{4}{5} \text{ dr.}$$

On a donc :

$$AM = AB \qquad MD = OD = R.$$

De même les triangles OMA et OAD sont isoscèles et semblables ; on en conclut

$$\frac{AM}{OA} = \frac{OA}{AD}.$$

Posons $AM = x$, $AD = AB = y$; cette dernière équation donne

$$xy = R^2$$

et l'on a d'autre part

$$y - x = AD - AM = MD = R.$$

Il est donc aisé de calculer y et x; les quantités y et $-x$ ont pour somme R et pour produit $-R^2$; ce sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - RX - R^2 = 0$$

équation qui donne

$$X = R\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La racine positive est égale à y et la racine négative à $-x$; on a donc

$$y = R\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad x = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La valeur de x est le côté du décagone régulier inscrit; y est le côté du *décagone étoilé*, que nous figurons ci-contre (fig. 362) sans insister sur sa construction et ses propriétés.

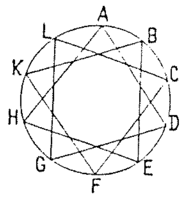


Fig. 362.

Le côté du pentagone régulier inscrit est DF et l'on a

$$\overline{DF}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{AD}^2 = 4R^2 - R^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

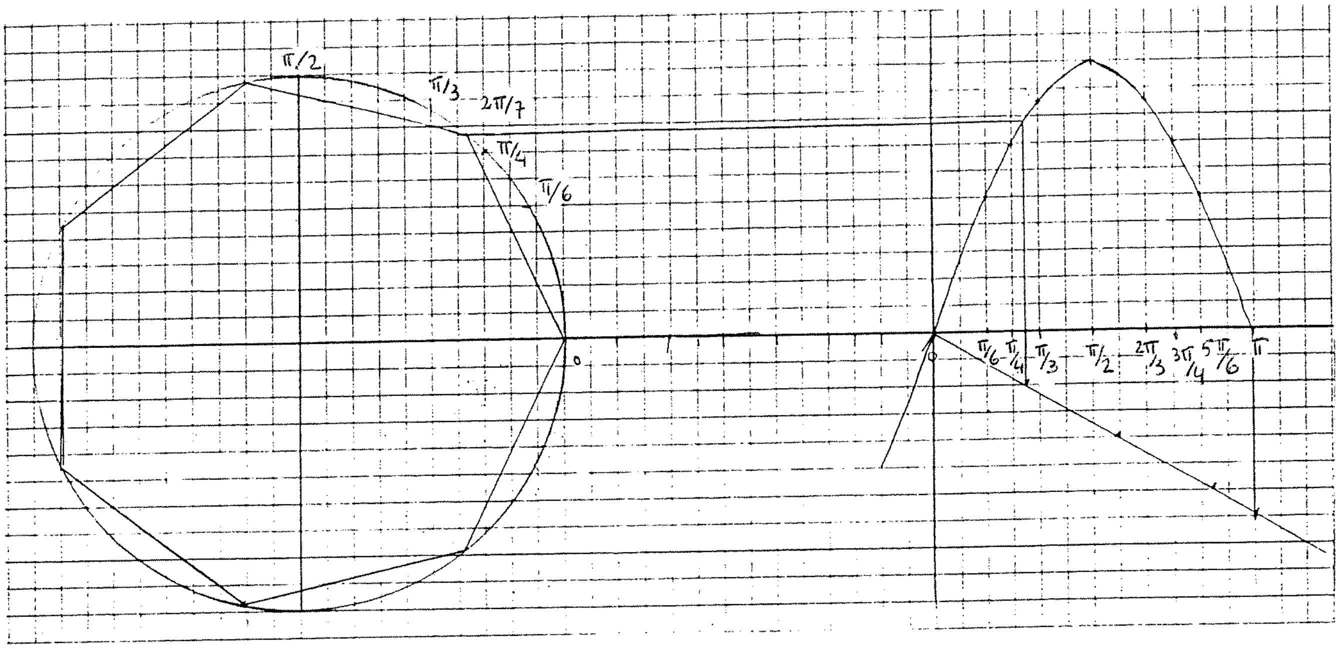
$$= R^2\frac{8-3-\sqrt{5}}{2} = R^2\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

c'est-à-dire

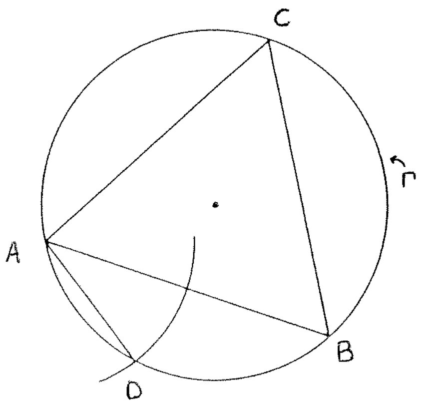
$$DF = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

On calculerait de même le côté BF du *pentagone étoilé.*

Annexe 2 : Tentative de construction de l'heptagone régulier à l'aide de la règle et du compas par un élève de 1ère S.



Annexe 3 : Sujet proposé au Rallye Mathématique d'Alsace, en classe de 1ère, en 1977 (Voir : L'Ouvert n° 16, p. 41).



2ème sujet (Cette question concerne le plan affine euclidien usuel).

Un disciple de Pythagore vint un jour, tout heureux, lui annoncer une découverte :

"Je viens, lui dit-il, d'inventer une construction à la règle et au compas de l'heptagone régulier convexe (polygone régulier convexe à sept côtés). Voici mon procédé :

Je trace un cercle Γ, et un triangle équilatéral ABC inscrit dans Γ, puis à partir de A comme centre, je mène un arc de cercle de rayon égal à la moitié de la longueur AB : cet arc vient couper Γ en D. Je dis que $[A,D]$ est le côté d'un heptagone régulier convexe inscrit dans Γ " (voir figure).

Que pensez-vous de la valeur scientifique de la découverte de l'élève de Pythagore ? Justifiez votre réponse par une démonstration.