# LE PROBLÈME DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DANS L'ÉMERGENCE DU CONCEPT DE GROUPE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

L'atelier d'histoire des mathématiques (voir "*L'Ouvert*" n° 40, sept. 85) fonctionne régulièrement un mercredi par mois et étudie les textes marquants, ayant contribué à l'invention de concepts ou outils essentiels des mathématiques d'aujourd'hui. Voici une présentation du thème abordé cette année.

Depuis le milieu du XVI$^e$ siècle, on savait résoudre les équations polynôme de tous les degrés jusqu'au quatrième. Dans un livre publié en 1545 (Ars Magna) CARDAN et son élève FERRARI avaient fait connaître des méthodes et des formules déjà pratiquées plus ou moins secrètement par toute une école de mathématiciens italiens : TARTAGLIA, SCIPION del FERRO ... etc ...Il était dans la logique de l'activité mathématique de chercher une méthode, analogue ou différente, pour les équations de degré supérieur. EULER bien sûr s'y est attaqué, qui dans un mémoire intitulé :*De Resolutione Aequationum cuiusvis gradus* (Nouveaux commentaires de Petersbourg, 1764) propose toute une classe d'équations du cinquième degré à coefficients rationnels, résolubles par radicaux. Il donne entre autres cet exemple : $X^5 = 2625X + 61500$ qui admet la solution :

$$X = \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})}$$

De tels exemples ne pouvaient que conforter les mathématiciens du XVIII$^e$ siècle dans la certitude que des méthodes et des formules de résolution des équations du cinquième degré devaient bien exister, et, pourquoi pas, également des degrés supérieurs au cinquième. Seulement voilà, personne n'avait encore trouvé ni méthode ni formule, pour une équation à coefficients quelconques. EULER lui-même n'a réussi qu'à trouver un résultat *a contrario* : partant d'une certaine forme présumée de l'écriture des solutions, calquée sur celle des équations de degré trois ou quatre, il a déterminé les équations du cinquième degré, ayant des solutions qui s'écrivent sous cette forme.

C'est dans ce contexte théorique que LAGRANGE attaque le problème sous une forme tout à fait nouvelle dans un mémoire paru à l'Académie de Berlin en 1770-1771 sous le titre : *Mémoire sur la résolution des équations algébriques.*

A partir de l'examen systématique et approfondi de toutes les méthodes élaborées par ses prédécesseurs (CARDAN, FERRARI, HUDDE, TCHIRNHAUS, DESCARTES, EULER, BEZOUT) pour résoudre les équations générales des troisième et quatrième degré, LAGRANGE dégage deux idées fortes tout à fait décisives pour les recherches et les découvertes qu'elles provoqueront chez ses contemporains et au-delà, jusque chez GALOIS.—

**1.** — Toutes ces méthodes réussissent en ceci, qui représente en quelque sorte leur dénominateur commun : Si $n$ désigne le degré de l'équation, elles utilisent toutes — de façon plus ou moins implicite — une fonction rationnelle des $n$ racines, et cette fonction présente la particularité de prendre **moins de $n$ valeurs distinctes** lorsque l'on permute de toutes les façons possibles ces $n$ racines.

**Exemple** : pour $n = 3$, la fonction $f$ des 3 racines $x_1, x_2, x_3$ de l'équation $X^3 + mX^2 + nX + p = 0$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$, où $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ne prend que deux valeurs distinctes $\theta_1$ et $\theta_2$ par les six permutations des trois lettres $x_1, x_2, x_3$.

Comme $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta_1\theta_2$ sont des fonctions symétriques des racines, on sait calculer leurs valeurs en fonction des coefficients $m, n, p$, et ainsi avec la relation supplémentaire $x_1 + x_2 + x_3 = -m$, on pourra déduire les valeurs de $x_1, x_2$ et $x_3$ à partir d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Tout le problème consiste donc à trouver de telles fonctions des racines pour les degrés supérieurs à quatre. Et LAGRANGE démontre un premier résultat important :

> *Si p désigne le nombre de valeurs distinctes que prend une fonction rationnelle de n quantités, alors p divise n!*

premier énoncé du théorème dit de LAGRANGE, connu aujourd'hui sous la forme

> *Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G, l'ordre de H divise l'ordre de G.*

**2.** — L'idée de groupe (de permutations) n'est en effet pas loin. LAGRANGE est tout naturellement amené à s'intéresser aux relations existant entre deux fonctions de $n$ quantités, se comportant identiquement lorsqu'on effectue sur elles les $n!$ permutations de ces $n$ quantités. LAGRANGE appelle *semblables* de telles fonctions et démontre que si une fonction $Y$ est semblable à une fonction $t$, alors $Y$ s'exprime rationnellement en fonction de $t$ et des coefficients de l'équation ayant les $n$ quantités pour racines.

Cette idée aura une grande fortune, et GALOIS, par exemple, l'utilisera explicitement dans son mémoire sur les équations résolubles par radicaux, de même qu'il utilisera – après GAUSS et ABEL – les fonctions

$$(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n)^n$$

appelées résolvantes de LAGRANGE , dont l'intérêt réside en ce qu'elles sont invariantes par permutation circulaire (où $\alpha$ est racine n-ième de l'unité).

Au total, le mémoire de LAGRANGE a eu une énorme influence sur ses contemporains et continuateurs. Par son caractère complet, et bien qu'il n'aboutisse pas, il situe **le lieu où l'on peut progresser, il fixe les tâches à accomplir, il donne les outils pour les réaliser.** Après LAGRANGE on peut schématiquement suivre deux directions de recherche.

a. — Chercher à mieux connaître les lois qui règlent la possibilité de résoudre les équations, en s'attaquant à des classes particulières de celles-ci. C'est ce que fait GAUSS, qui montre que l'équation

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0 \quad (n \textit{ premier})$$

est toujours résoluble par radicaux, et donne une méthode précise de résolution.

De même, dans un *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, ABEL généralise la méthode de GAUSS aux équations dont les racines s'expriment toutes, rationnellement, à l'aide de l'une d'entre elles. Chez GAUSS, l'idée de groupe cyclique était à l'oeuvre implicitement, chez ABEL, c'était celle de groupe commutatif (abélien).

b. — Dans le même temps, on continuait à travailler sur l'équation générale du cinquième degré pour laquelle LAGRANGE avait donné une direction de recherche : chercher des fonctions de cinq variables prenant *peu* de valeurs distinctes par les 120 permutations possibles. Un premier résultat fut donné par l'italien RUFFINI qui, par l'examen systématique de ces permutations, arrive à la conclusion que le nombre $p$ de valeurs que peut prendre une fonction rationnelle de 5 variables ne peut être égal ni à 8, ni à 4, ni à 3. (Rappelons que LAGRANGE avait démontré que ce nombre devait diviser 120.)

CAUCHY s'appuiera sur ce résultat pour créer sa théorie des substitutions, première ébauche d'une étude des groupes de permutations. Il généralisera le résultat de RUFFINI en démontrant que

> *Le nombre de valeurs différentes d'une fonction non symétrique de n quantités ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier p contenu dans n, sans devenir égal à 2.*

Ainsi, peu à peu, les outils se mettent en place, qui permettront à GALOIS de franchir les étapes décisives. En réalité le contexte du problème s'est beaucoup modifié. La question n'est plus de résoudre les équations de degré cinq ou plus, elle est devenue beaucoup plus vaste :

> *Etant donnée une équation algébrique à coefficients quelconques, numériques ou littéraux, reconnaître si les racines ne peuvent s'exprimer en radicaux, telle est la question dont nous offrons une solution complète*

(GALOIS , premier mémoire).

Nous vous présenterons dans les prochains numéros de "*L'Ouvert*", une analyse plus détaillée de chacune des oeuvres marquantes évoquées dans cet article.