LE SCRUTIN PROPORTIONNEL : PLUS FORT RESTE OU PLUS FORTE MOYENNE?

Michel EMERY

J'ai été fort surpris, il y a quelques mois, d'apprendre l'instauration du scrutin de liste *à la proportionnelle à la plus forte moyenne* ([1]) pour les élections législatives et régionales : il ne m'était jamais venu à l'idée qu'il existât un autre type de scrutin proportionnel que celui dit *au plus fort reste*, qui me semblait *a priori* le seul équitable. Que pouvait bien être cette plus forte moyenne? En voici la recette, fournie par *Le Monde*. Une peréquation attribue à chaque liste un nombre d'élus égal au nombre total de sièges à pourvoir, multiplié par le rapport du nombre de voix pour cette liste au nombre total de voix exprimées; ou plutôt la partie entière de ce résultat. Cette opération d'arrondi laissant quelques sièges vacants, on les répartit entre les listes selon la règle suivante : pour chaque liste, ajouter fictivement 1 au nombre (éventuellement nul) d'élus de cette liste, puis diviser par le résultat obtenu le nombre de voix recueilli par la liste. Ce quotient est appelé moyenne de cette liste, et le premier des sièges vacants est attribué à la liste ayant la plus forte moyenne. Les autres sièges vacants, s'il y en a, sont attribués jusqu'à épuisement par le même procédé, les moyennes utilisées à chaque étape tenant compte de tous les sièges précédemmnt attribués.

La question que soulève tout ceci est évidente : que cache cet algorithme tortueux? En quoi cette technique est-elle plus équitable que l'attribution des sièges vacants selon l'ordre alphabétique, l'âge, la feuille d'impôts ou l'origine ethnique?

1. — Plus fort reste et plus forte moyenne.

Prenons le problème par l'autre bout et essayons d'imaginer les procédés raisonnables de répartition des sièges. Nous supposerons (c'est déjà assez compliqué comme ça!) que chaque liste est suffisamment longue pour ne pas se voir attribuer plus de sièges qu'elle n'en peut occuper, et que chaque électeur a voté pour une liste et une seule (autrement dit, nous ne nous occuperons que des suffrages exprimés, dans un scrutin sans panachage).

© L'OUVERT 44 (1986)

([1]) Le nom exact est scrutin de liste à un tour sans panachage avec répartition proportionnelle et attribution des sièges restant selon la règle de la plus forte moyenne.

Notations :
$E(x)$ = partie entière de x = plus grand entier au plus égal à x;
$F(x)$ = partie fractionnaire de $x = x - E(x)$.

Données :
k : nombre de listes en présence;
$p_1, p_2, \ldots, p_k$: proportions respectives de voix obtenues par les listes (vérifient $p_1 + \cdots + p_k = 1$);
n : nombre de sièges à pourvoir.

Une fois admis le principe de la représentation proportionnelle (qui mérite, bien sûr, discussion, mais ce n'est pas notre propos), la liste numéro i a droit en principe à $p_i n$ sièges; et bien entendu toute la difficulté vient du fait qu'en général $p_i n$ n'est pas entier. Un instant de réflexion fournit (sans prétention d'exhaustivité) quatre manières d'y remédier.

Solution 1.

Attribuer quand même exactement $p_i n$ sièges à la liste i, de la manière suivante : si $p_i n = 3,274$ par exemple, cette liste aura 4 élus, mais le quatrième ne disposera, dans les votes de l'assemblée, que de 0,274 voix [2].

Avantages : on atteint l'égalité proportionnelle rigoureuse; en outre les assemblées seraient encore plus rarement divisées à parts égales sur une question. Inconvénients : on assisterait à une multiplication des petites listes, qui auraient chacune 0,0001 élu ... Et puis ce serait dévalorisant d'être un élu à part non entière.

Solution 2.

Attribuer à la liste i la partie entière de $E(p_i n)$ et ne pas attribuer les sièges restants, diminuant ainsi un peu l'effectif de l'assemblée. Inconvénient : ça ne marche que si k est petit devant n; pour $k > n$, on risque de n'avoir aucun élu!

A ma connaissance (fort limitée en ce domaine), les solutions 1 et 2 ne sont pas pratiquées, et j'ignore même si elles portent un nom.

Solution 3 (Plus fort reste).

Après avoir attribué $E(p_i n)$ sièges à chaque liste i, calculer les restes $F(p_i n)$ et attribuer, dans l'ordre et jusqu'à épuisement, les sièges restants à celles des listes ayant les plus grands restes (donc à celles qui ont été le plus brimées dans l'arrondi en partie entière). Ceci est toujours possible puisque le nombre de sièges non attribués,

---

[2] Nous écartons, par souci humanitaire, les tentatives chirurgicales pour fabriquer 0,274 député ...

$$n - \Sigma_i E(p_i n) = \Sigma_i (p_i n - E(p_i n)) = \Sigma_i F(p_i n),$$

est toujours plus petit que le nombre k de listes (car $F(p_i n) < 1$).

Si par exemple pour 8 sièges à pourvoir, les 4 listes obtiennent respectivement 3,374; 0,325; 2,705 et 1,596 élu(s) avant arrondi, on prend d'abord les parties entières 3, 0, 2 et 1, soit 6 sièges, et les deux sièges restant vont aux listes 3 et 4, qui ont les plus grandes parties fractionnaires (0,705 et 0,596).

Solution 4 (Plus forte moyenne).

On fixe un nombre q, convenablement choisi, et on décide que chaque élu devra représenter au moins q électeurs. En notant v le nombre total des voix exprimées (donc $p_i v$ le nombre des voix qu'a obtenues la liste i), ceci équivaut à donner à la liste i le quotient entier $E(p_i v/q)$ sièges où q doit être tel que $\Sigma_i E(p_i v/q) = n$. En posant $v/q = m$, ceci revient à attribuer à la liste i $E(p_i m)$ sièges, où m est choisi tel que $\Sigma_i E(p_m) = n$; ainsi ce procédé se ramène à appliquer la solution 2, mais en partant, au lieu de n sièges au total, d'un nombre m (entier ou non) plus grand que n, calculé de telle sorte que le nombre final d'élus retombe précisément à n.

En toute rigueur, pour s'assurer que tout ceci a un sens, il faut vérifier que :
a) le choix d'un tel m (ou, ce qui revient au même, de q) est toujours possible;
b) si plusieurs valeurs de m conviennent, elles fournissent les mêmes nombres d'élus $E(p_1 m), \ldots, E(p_k m)$.

Pour répondre à ces questions, considérons, pour $m > 0$, la fonction

$$g(m) = \Sigma_i E(p_i m)$$

où les p_i sont fixées. C'est une somme de fonctions croissantes, à valeurs entières. Le point b) est évident : g étant croissante, l'ensemble des m qui résolvent $g(m) = n$ est un intervalle sur lequel g, et donc aussi chacune de ses composantes $E(p_i m)$, est constante. Le a) est moins clair : ne pourrait-il se faire que, deux ou plusieurs des fonctions $E(p_i m)$ sautant en même temps d'une unité, la fonction g effectue pour une valeur de m un saut d'amplitude 2 ou plus, évitant ainsi la valeur n? Ce cas peut se produire, mais nous avons le droit de le négliger : il correspond à uner situation exceptionnelle où deux ou plusieurs listes ne peuvent être départagées. Aucun mode de scrutin ne peut éviter cela : dans le cas du plus fort reste, il se peut aussi que plusieurs listes aient le même reste. De telles situations, que nous appellerons dans la suite *ambiguës*, nécessitent la prise en compte

d'un autre critère (âge, ...) ou un nouveau tour de scrutin. (Exemple type : deux sièges à pourvoir, trois listes rassemblant chacune le tiers des voix. Cet exemple est ambigu pour les modes de scrutin 3 et 4, mais pas pour 1 et 2 qui ne font que déplacer le problème!).

Ne serait-ce qu'à l'identité de leurs noms, le lecteur a déjà deviné que cette quatrième solution est la même que la recette donnée en introduction. En effet, pour un nombre positif arbitraire m_0, quand m croît à partir de m_0, le premier saut de la fonction $E(p_i m)$ intervient pour la valeur de m donnée par $p_i m = E(p_i m_0) + 1$, donc $m = (E(p_i m_0) + 1)/p_i$; ainsi le premier saut de $g(m) = \Sigma_i E(p_i m)$ provient du terme correspondant à l'indice i qui minimise $(E(p_i m_0) + 1)/p_i$, donc à la liste ayant la plus forte moyenne $p_i/(E(p_i m_0) + 1)$. Cette remarque justifie l'algorithme de répartition, et montre du même coup que, au lieu d'appliquer, comme l'indique la recette cet algorithme à partir de l'attribution initiale $E(p_i n)$, on obtiendrait le même résultat en partant de zéro (aucun siège à chaque liste), ou, plus généralement, de n'importe quelle attribution partielle $E(p_i r)$ (pourvu que r soit assez petit pour que $g(r) \leq n$; sinon, il faudrait compléter la règle et indiquer dans quel ordre on supprime des sièges aux listes en partant d'une répartition excédentaire – nous laissons cet exercice au lecteur). Avant de donner un exemple, une dernière remarque : nous avons utilisé ci-dessus des moyennes $p_i/(Ep_i m_0) + 1)$ qui ne sont pas tout à fait les $p_i v/(E(p_i m_0) + 1)$ qu'indique la recette; mais comme elles n'en diffèrent que par un facteur constant v et qu'il ne s'agit que de les comparer entre elles, ça n'a pas d'importance; de même, dans l'exemple que suit, nous utiliserons les $p_i n/(E(p_i m_0) + 1)$.

Reprenons le même exemple que pour le plus fort reste : huit sièges, quatre listes obtenant 3,374; 0,325; 2,705 et 1,596 élus. Une fois attribués les parties entières 3, 0, 2 et 1, on calcule les quatre moyennes :

$$\frac{3,374}{4} = 0,84 \qquad \frac{0,325}{1} = 0,32$$
$$\frac{2,705}{3} = 0,90 \qquad \frac{1,596}{2} = 0,80$$

le premier siège restant va à la liste 3, qui a la plus forte moyenne, et dont la nouvelle moyenne devient $2,705/4 = 0,68$; la plus forte moyenne étant maintenant celle de la liste 1, c'est elle qui obtient le dernier siège (alors qu'au plus fort reste, c'était la 4).

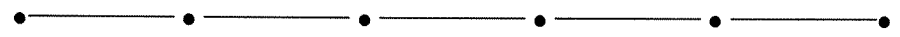
2. — Comparaison graphique des deux méthodes.

Toutes les figures qui suivent seront tracées pour un nombre de sièges $n = 5$ (mais le lecteur n'aura aucune difficulté à imaginer le cas général); nous nous restreindrons aux cas où le nombre k de listes est 2 ou 3, étudiés à

l'aide de diagrammes respectivement unidimensionnels et bidimensionnels (pour k quelconque, il faudrait une figure à $k-1$ dimensions; c'est largement au-delà des capacités de *L'Ouvert*, même pour $k=3$).

1°. $k=2$. Deux listes s'affrontent.

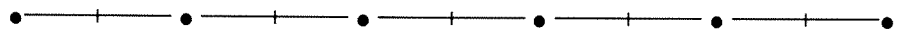
Les données sont p_1 et $p_2 = 1-p_1$; nous pouvons les visualiser par le point d'abscisse p_1 sur le segment $[0,1]$. Lorsque p_1 prend l'une des $n+1$ valeurs j/n (j entier de 0 à n), indiquées par un • , la peréquation fournit des résultats entiers et toutes les méthodes de scrutin proportionnel donnent le même résultat.



(Par exemple, le troisième • à partir de la gauche signifie $p_1 = 2/5$; résultat : 2 sièges pour la liste 1, 3 pour la liste 2). Sauf cas ambigu, chaque valeur de p_1 (chaque point du segment) conduit, pour un mode de scrutin donné, au même résultat qu'un certain • . Chaque • est donc entouré par une région (en fait un intervalle) de $[0,1]$ formée des scores que le mode de scrutin ne différencie pas du •; ces régions sont séparées par les points ambigus (figurés par des ———).

Plus fort reste :

Les valeurs ambiguës de p_1 sont telles que $p_1 n$ tombe juste à mi-chemin entre deux entiers :



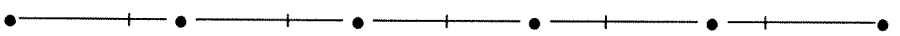
Chaque résultat • est au centre de sa région, sauf les deux extrêmes, dont la région est plus petite. L'interprétation graphique de la méthode du plus fort reste est claire : on remplace le résultat du vote par le • le plus proche.

Plus forte moyenne :

Cherchons la valeur ambigüe située entre deux • consécutifs, d'abscisses j/n et $(j+1)/n$. C'est la solution de l'équation obtenue en égalent les moyennes :

$$\frac{p_1}{j+1} = \frac{p_2}{(n-j-1)+1} = \frac{1-p_1}{n-j}$$

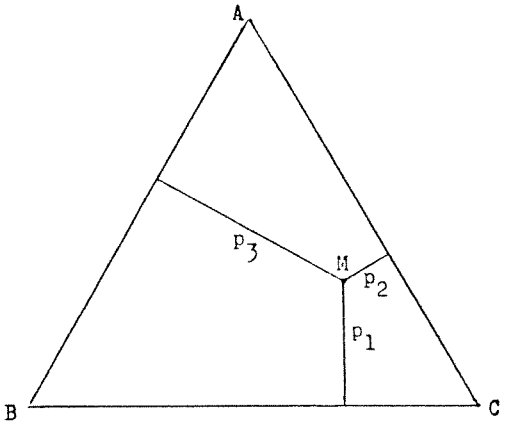
donc $p_1 = (j+1)/(n+1)$. Ainsi, les valeurs ambiguës divisent l'intervalle $[0,1]$ en $n+1$ régions de même longueur.



Les • ne sont plus au centre de leur région, les régions sont maintenant égales.

La différence entre les deux méthodes saute aux yeux : elle est peu marquée au centre, très nette aux bords, le plus fort reste étant plus favorable à la liste que a obtenu le moins de suffrages.

2°. $k = 3$. Trois listes sont en présence.
Pour représenter les données p_1, p_2, p_3 (trois nombres positifs de somme 1), nous allons utiliser un diagramme bidimensionnel familier aux chimistes et aux géologues ([3]) : les coordonnées barycentriques.



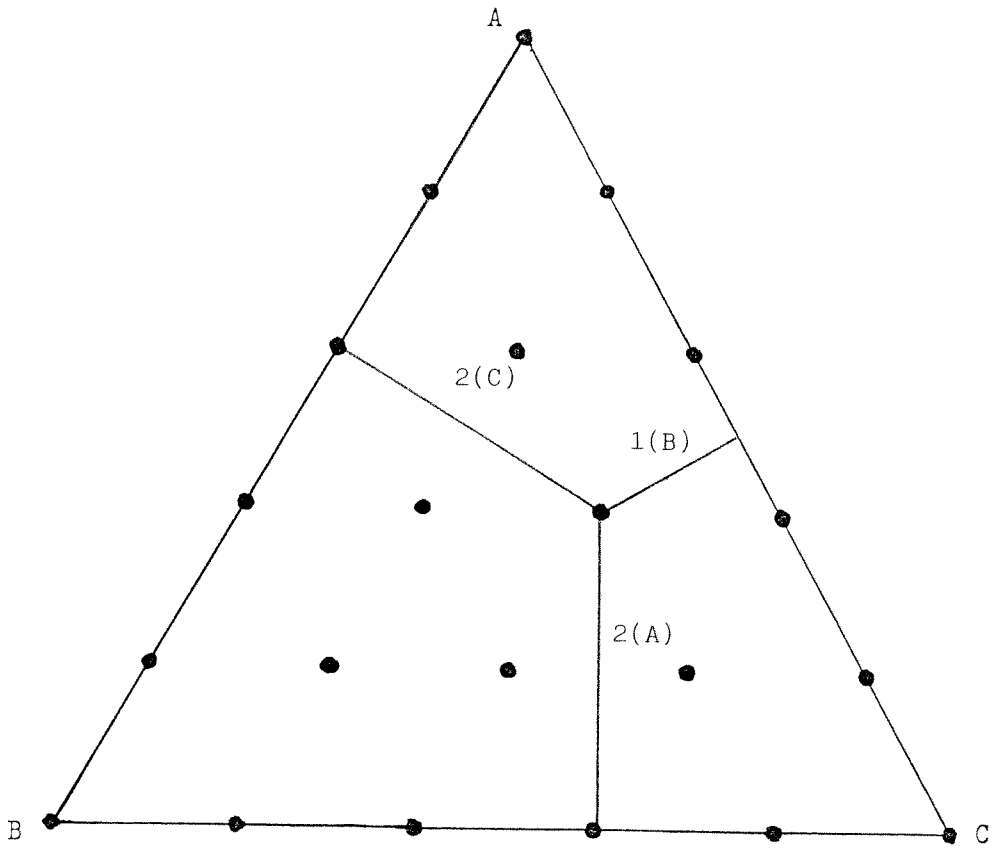
Dans un triangle équilatéral ABC, nous associons à (p_1, p_2, p_3) le barycentre M des points A, B, C pondérés par les poids respectifs p_1, p_2, p_3. Quand (p_1, p_2, p_3) décrit tous les scores possibles, le point M décrit tout le triangle. En prenant pour unité de longueur les hauteurs du triangle, p_1 est la distance de M au côté BC, p_2 sa distance à CA et p_3 à AB.

Ce triangle a aussi une interprétation tridimensionnelle : dans l'espace muni de coordonnées orthonormées, plaçons le point (p_1, p_2, p_3). Il se trouve dans le plan d'équation $x + y + z = 1$, qui passe par les extrémités des trois vecteurs du repère, et les points A, B, C peuvent s'interpréter comme ces trois extrémités, la figure étant simplement une coupe plane de l'espace muni des coordonnées usuelles. Ceci a une conséquence qui va nous servir : en coordonnées barycentriques, si α, β et γ sont trois nombrees dont deux au moins sont différents, $\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = \delta$ est l'équation (non unique!) d'une droite.

Portons tout d'abord sur la figure, toujours avec des • , les points pour lesquels la péréquation donne des résultats entiers; ces points sont de la forme $p_1 = a/n, p_2 = b/n, p_3 = c/n$ avec a, b, c entiers et $a + b + c = n$; ils forment, dans le triangle ABC, les sommets d'un réseau triangulaire régulier.

Il reste à figurer les régions relatives, comme précédemment, à chaque • . Pour cela, nous allons chercher les points ambigus situés sur la

([3]) Pour représenter les mélanges, dans diverses proportions, de trois composants. Par exemple si les trois sommets signifient respectivement feldspath pur, quartz pur et mica pur, différentes zones du triangle représenteront les différents types de granite.



frontière entre deux régions correspondant à deux • voisins, que nous pouvons par exemple choisir sur une même horizontale. De tels • sont de la forme $(a/n, (b+1)/n, c/n)$ et $(a/n, b/n, (c+1)/n)$, avec a, b, c entiers, $a+b+c = n-1$.

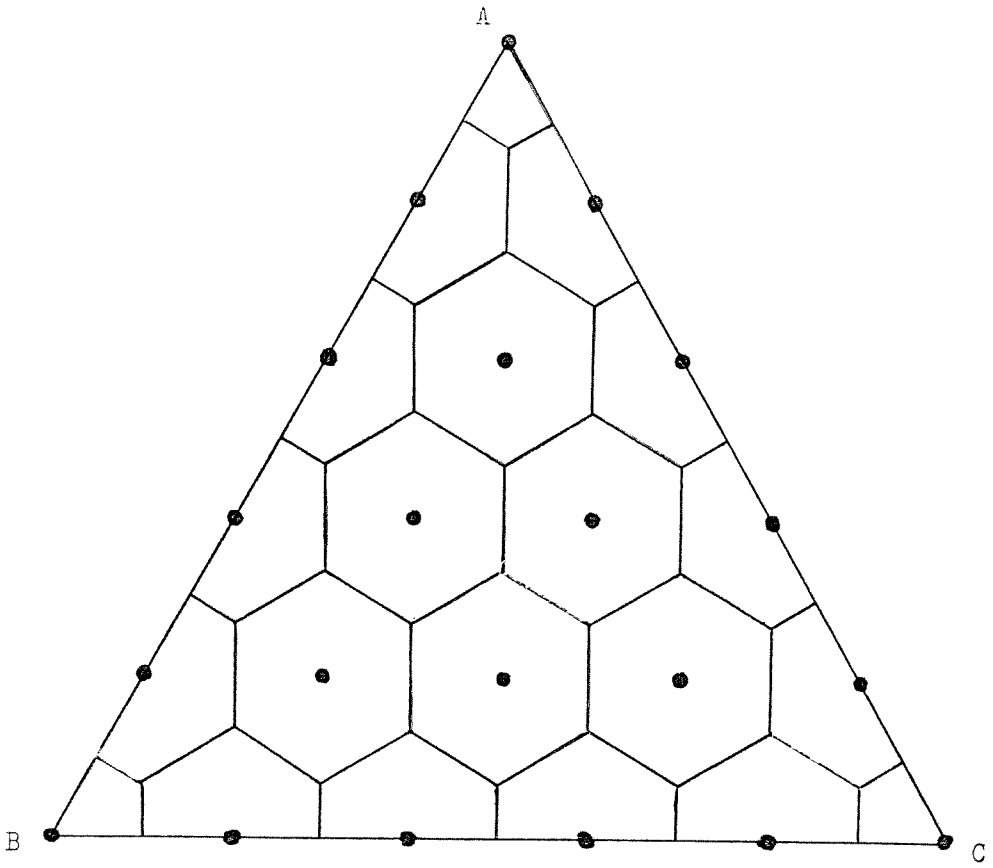
Plus fort reste :

L'équation donnant les points ambigus est dans ce cas l'égalité des restes

$$np_2 - b = np_3 - c,$$

donc $p_2 - p_3 = (b-c)/n$. C'est l'équation d'une droite verticale $(p_2 - p_3)$ = *constante* passant juste au milieu entre les deux • (car ce milieu est $(a/n, (b+1/2)/n, (c+1/2)/n)$. Si l'on ajoute la condition $E(p_1 n) = a$, on trouve pour l'ensemble ambigu cherché un segment de cette droite. En échangeant le rôle des trois sommets, il est maintenant facile de construire les régions entourant les •.

On obtient un réseau hexagonal régulier, les centres des hexagones étant les • . Comme dans le cas $k = 2$, les régions sont définies par une



règle géométrique simple : l'approximation du plus fort reste conduit à remplacer chaque point par le • le plus proche. Ceci serait encore vrai pour k quelconque, si l'on pouvait dessiner un diagramme à $k-1$ dimensions.

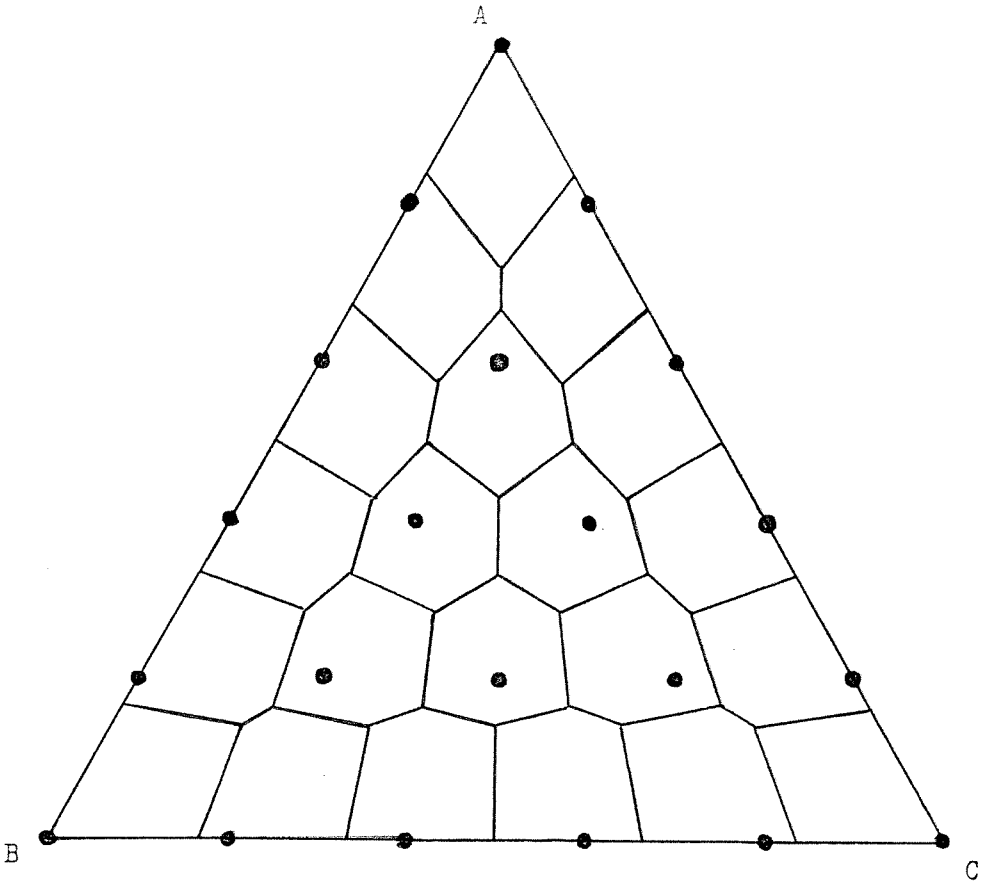
Plus forte moyenne :

Pour la frontière ambiguë entre nos deux • $(a/n,(b+1)/n,c/n)$ et $(a/n,b/n,(c+1)/n)$, l'égalité des moyennes s'écrit :

$$p_2/(b+1) = p_3/(c+1),$$

donc cette frontière est (un segment de) la droite d'équation $p_2/p_3 = (b+1)/(c+1)$. Cette droite est facile à construire : elle passe par le point A, et par le point $((a-1)/n,(b+1)/n,(c+1)/n)$ qui n'est autre que le • situé juste au dessous du milieu du segment qui joint nos deux • . Le tracé ne présente pas de difficultés et fournit la figure suivante.

On observe encore un réseau hexagonal, mais il n'est pas régulier, et semble malaisé à caractériser géométriquement. Regardons de plus près l'un de ces hexagones :

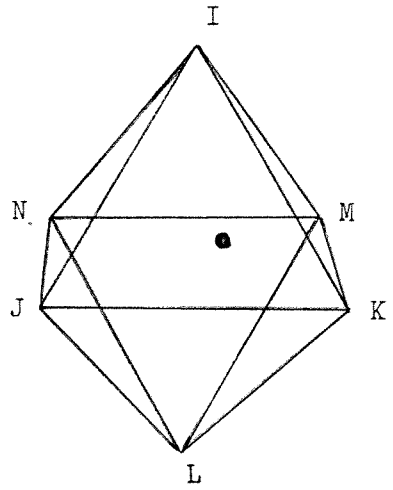


Si le • qu'il contient a pour coordonnées $(a/n, b/n, c/n)$, on trouve facilement, à l'aide des équations des droites ambiguës, les coordonnées de ses six sommets, qui valent

$$I : \left(\frac{a+1}{n+1}, \frac{b}{n+1}, \frac{c}{n+1}\right) \qquad L : \left(\frac{a}{n+2}, \frac{b+1}{n+2}, \frac{c+1}{n+2}\right)$$
$$J : \left(\frac{a}{n+1}, \frac{b+1}{n+1}, \frac{c}{n+1}\right) \qquad M : \left(\frac{a+1}{n+2}, \frac{b}{n+2}, \frac{c+1}{n+2}\right)$$
$$K : \left(\frac{a}{n+1}, \frac{b}{n+1}, \frac{c+1}{n+1}\right) \qquad N : \left(\frac{a+1}{n+2}, \frac{b+1}{n+2}, \frac{c}{n+2}\right).$$

Si le • est sur un côté du triangle ABC, trois sommets de l'*hexagone* y sont aussi, et la région est en réalité pentagonale .

Si le • est l'un des trois sommets, cette dégénérescence se produit deux fois, et on obtient un quadrilatère (ce qui suit n'en reste pas moins vrai). Ces coordonnées montrent que IJK est un triangle équilatéral, se déduisant de ABC par l'homothétie de centre • et de rapport $1/(n+1)$.



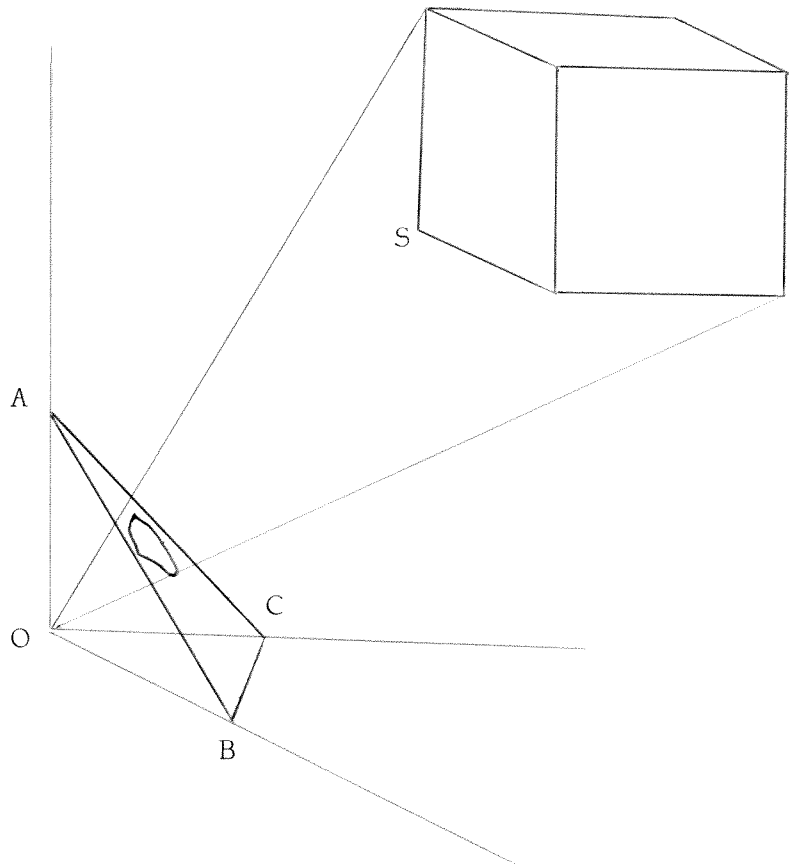
De même, LMN est lui aussi équilatéral, et se déduit de ABC par une homothétie de rapport $-(1/(n+2))$. Ainsi ces hexagoes, apparemment si dissemblables, sont tous formés de deux triangles équilatéraux de tailles et d'orientation fixes; seule diffère leur position relative. Outre le fait que les trois diagonales IL, JM et KN sont concourantes, ceci a une conséquence amusante : toutes ces régions ont même aire.

Ces hexagones, dans un cas comme dans l'autre (plus fort reste ou plus forte moyenne) ont aussi une interprétation tridimensionnelle.

Dans le repère orthonormé $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ plaçons le point S de coordonnées (a, b, c) et le cube $a \leq x \leq a+1$, $b \leq x \leq b+1$, $c \leq x \leq c+1$.

La projection perspective de ce cube sur le plan ABC n'est autre que l'un des hexagones irréguliers du réseau (pour la plus forte moyenne), tandis que sa projection orthogonale - à un changement d'échelle près - est l'un des hexagones réguliers correspondant au réseau illustrant le plus fort reste. Dans les deux cas, la projection de S est le • de l'hexagone.

Les résultats de cette étude graphique de la plus forte moyenne se généraliseraient à k quelconque si l'on pouvait dessiner dans les espaces à $k-1$ dimensions : la figure pourrait encore être interprétée comme une vue perspective d'une famille d'*hypercubes* à k dimensions (une dimension



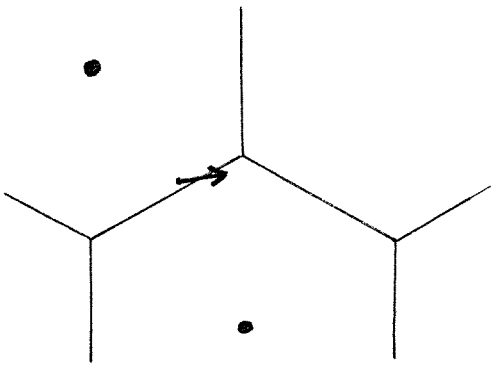
de plus) ; et les *hypervolumes* des régions entre lesquelles serait partagé l'*hypertriangle* seraient encore égaux (mais pour ce dernier point, la démonstration qui se généralise bien n'est pas celle donnée plus haut).

Pour conclure cette étude graphique des deux méthodes, la comparaison entre plus fort reste et plus forte moyenne pourrait reprendre ici mot pour mot ce qui a été dit pour $k = 2$: peu de différence au centre, différence plus sensible aux bords (et plus encore près des coins), le plus fort reste étant plus généreux envers les listes ayant recueilli le moins de voix.

3. — Imperfection des modes de scrutin.

Il est bien connu depuis CONDORCET que les systèmes électoraux donnent lieu à des phénomènes curieux, voire paradoxaux. Nous allons donner, pour les deux types de scrutin étudiés ici, trois telles propriétés.

Notre première remarque concerne aussi bien les deux modes de scrutin. Nous cherchons l'effet, sur le résultat de l'élection, du déplacement, dans le triangle ABC, du point représentant les suffrages obtenus. Le plus souvent, ça ne change rien : le point restant dans la même région, le résultat du scrutin n'en est pas affecté.



Cependant, il peut parfois se faire que le point, franchissant une ligne d'ambiguïté, change de région. Dans la majorité des cas, on assistera alors au transfert d'un siège d'une liste ayant perdu des voix à une liste qui en a gagné. Mais pas toujours! Si par exemple le déplacement se fait comme l'indique cette figure, le point s'éloigne de la base BC horizontale, mais le • de la région d'arrivée est plus proche de BC que le • de départ.

Ainsi, bien que gagnant des voix, la liste 1 a perdu un siège! Pour les lecteurs qui prèfèrent les nombres à la géométrie, un tel exemple peut être donné par :

Situation initiale :	*Situation finale* :
liste 1 : 1,622 élu	liste 1 : 1,624 élu
liste 2 : 1,757 élu	liste 2 : 1,751 élu
liste 3 : 1,621 élu	liste 3 : 1,625 élu

(Comme la ligne franchie est ambiguë pour chacun des deux types de scrutin, cet exemple convient aussi bien pour le plus fort reste que pour la plus forte moyenne.) Ici, la liste 2 ayant perdu quelques voix au profit de 1 et surtout de 3, le résultat net est un tranfert d'un siège de 1 à 3. Bien entendu, en intervertissant les situations initiale et finale, il est possible de gagner un siège en perdant des voix.

La deuxième remarque ne s'applique qu'au scrutin à la plus forte moyenne. En regardant la figure (la partition du triangle en hexagones irréguliers), on voit que la région contenant A descend loin vers le bas, entre les deux • qui sont dessous. Le calcul montre que, pour tout n, cette propriété a lieu dans toute la zone située au dessus de la ligne joignant les milieux de AB et AC. Ceci signifie que, après attribution des parties entières $E(p_i n)$, une même liste peut encore recevoir plusieurs des sièges vacants, obtenant

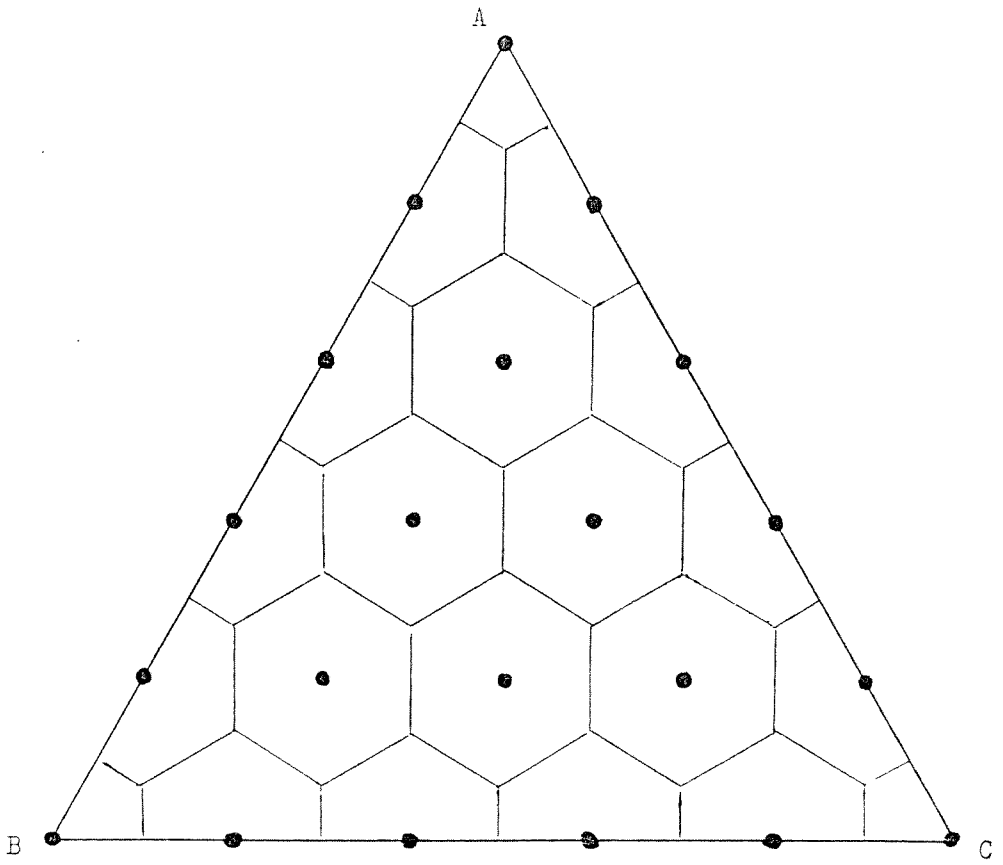
ainsi un nombre d'élèves strictement plus grand que la valeur approchée par excès $E(p_i n) + 1$. Ce phénomène est d'autant plus marqué que k est plus grand (mais on tombe malheureusement dans les cas où l'on ne peut plus faire de figure). S'il y a par exemple trois sièges à pourvoir et onze listes en présence, la liste 1 recueillant 24 % des voix et chacune des dix autres environ 7,6 %, la méthode de la plus forte moyenne donnera tous les sièges à la liste 1, bien qu'elle n'ait droit, avant arrondi, qu'à 0,72 élu. Sur cet exemple, on remarque aussi un autre effet de la méthode de plus forte moyenne : si les dix autres listes, au lieu de se présenter séparément, avaient formé une coalition contre la liste 1, réunissant 76 % des suffrages, elles auraient obtenu les trois sièges, et c'est la liste 1 qui, cette fois-ci, n'en aurait eu aucun! Ce fait est général : à la plus forte moyenne, les regroupements de listes sont toujours avantageux, et l'éclatement d'une liste en plusieurs, toujours désavantageux (au sens large : ils peuvent être sans effet; en outre, nous sommes ici sous l'hypothèse, toute théorique, où ces divisions ou ralliements se font sans perte ni gain d'électorat). Au plus fort reste, en revanche, tout est possible : les regroupements peuvent, suivant les situations, se révéler bénéfiques, neutres ou nuisibles; mais de manière moins marquée.

Cette dernière remarque a trait à l'influence sur le résultat du scrutin du nombre n de sièges, à suffrages p_i constants. Pour la plus forte moyenne, tout se passe comme on s'y attend : si l'on remplace n par $n+1$, l'une des listes — précisément celle qui a la plus forte moyenne — se verra attribuer un siège de plus (ceci résulte de la remarque faite plus haut selon laquelle la répartition peut être effectuée à partir de $E(p_i r)$, r quelconque). Mais pour le plus fort reste les choses ne sont pas si simples. Reportons-nous à la figure en nid d'abeilles. La réunion des régions dont les • sont sur le côté BC est limitée au dessus par une ligne brisée L_n dont les sommets sont alternativement à la distance $1/(3n) et 2/(3n)$ de BC (l'unité étant la hauteur $BC((\sqrt{3})/2)$. Lorsqu'on augmente n de 1, ces valeurs varient peu; la nouvelle ligne L_{n+1} est à peu près dans la même bande. Mais, au voisinage du milieu de BC, elle a été décalée d'une demi-période (elle est donc en opposition de phase par rapport à L_n), puisque le milieu est un maximum pour n pair et un minimum pour n impair. Les deux lignes se croisent donc plusieurs fois, et on peut trouver des points qui sont à la fois au dessous de L_{n+1} et au dessus de L_n. Ces points représentent les cas où, en passant de n à $n+1$ sièges à pourvoir, on fait passer la liste 1 de un élu à zéro! Exemple :

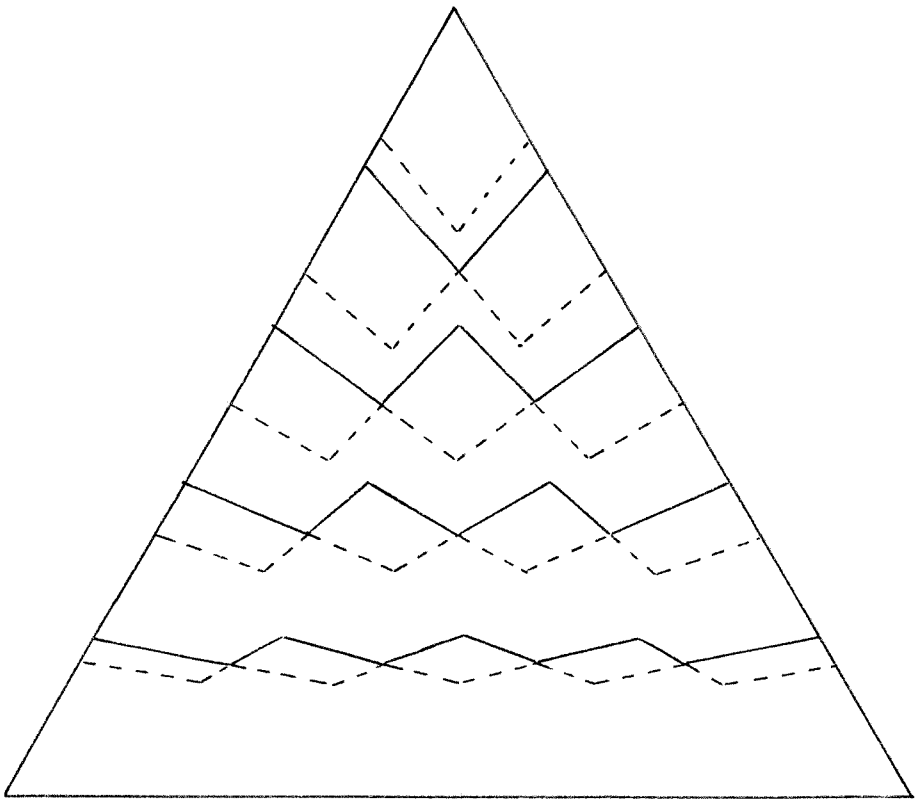
% des voix	liste 1 : 12 %	liste 2: 34 %	liste 3 : 54 %
4 sièges	0,48 →1 élu	1,36 →1 élu	2,16 →2 élus
5 sièges	0,60 →0 élu	1,70 →2 élu	2,70 →3 élus

La liste 1 a un élu s'il y a quatre sièges à pourvoir, et aucun s'il y en a cinq.

Ceci peut se représenter en superposant les deux figures obtenues pour $n = 5$ (en pointillés) et $n = 4$ (traits pleins), dans lesquelles on n'a conservé que l'information relative au nombre d'élus obtenu par la liste 1, faisant ainsi apparaître des bandes horizontales aux bords en zig-zag. Dans le bas du triangle, la ligne L_4 (en traits pleins) croise plusieurs fois L_5 (pointillés).



Pour la plus forte moyenne, au contraire, ces mêmes lignes ne se croisent plus :



En conclusion, je ne chercherai pas à choisir entre les deux méthodes; je laisse ce soin au lecteur, qui imaginera probablement d'autres arguments à mettre dans la balance. Retenons simplement que, par rapport au plus fort reste, la plus forte moyenne a une définition *a priori* tout aussi raisonnable; qu'elle rend plus difficile d'obtenir un élu et plus facile d'en obtenir beaucoup; et qu'elle souffre tout autant d'imperfections (même si ce ne sont pas les mêmes).