LE PENTAGONE DE DÜRER SOUS LA LOUPE INFORMATIQUE

Nicole VOGEL

On attribue à Albert Dürer la construction suivante (Fig. 1, extraite du Cahier de l'Abbaye de Boscodon, n° 4, qui a pour joli titre "L'Art des bâtisseurs romans").

Un très joli tracé... ? Pas de doute, il est joli et les cinq côtés du pentagone sont égaux, par construction.

Refaisons cette figure sur une table traçante, en y ajoutant le cercle passant par A, B et D' (Fig. 2).

Tiens ! Le cercle ne passe pas par E ! La très grande précision du tracé ne peut pas être mise en cause ici. Le pentagone obtenu ne semble donc pas régulier. Calculons les mesures en degrés des angles $\hat{B}$, $\hat{D}'$, $\hat{E}$ du pentagone, en utilisant un soupçon de géométrie analytique (dans les notations, nous ne distinguerons pas les angles de leur mesure en degré, les sinus et cosinus majuscules et minuscules n'étant plus très "blécas"). Prenons le repère (O, D, I).

On a :

$$AB = BD' = 1$$

donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'B} = \cos \hat{B}.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (1,0) donc $\cos \hat{B}$ = abscisse de $\overrightarrow{D'B}$. $D' \in (CI)$, donc D' a pour coordonnées $(x, x+1)$ et $\overrightarrow{D'B}\ (\frac{1}{2} - x,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - x)$. En résolvant l'équation en x ($BD'^2 = 1$ et $x > 0$), on trouve :

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

On en déduit :

$$\cos \hat{B} = \frac{1}{2} - x = \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

et

$$\hat{B} = \text{Arc}\cos\left(\frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\hat{B} \simeq 108° \, 21' \, 58''.}$$

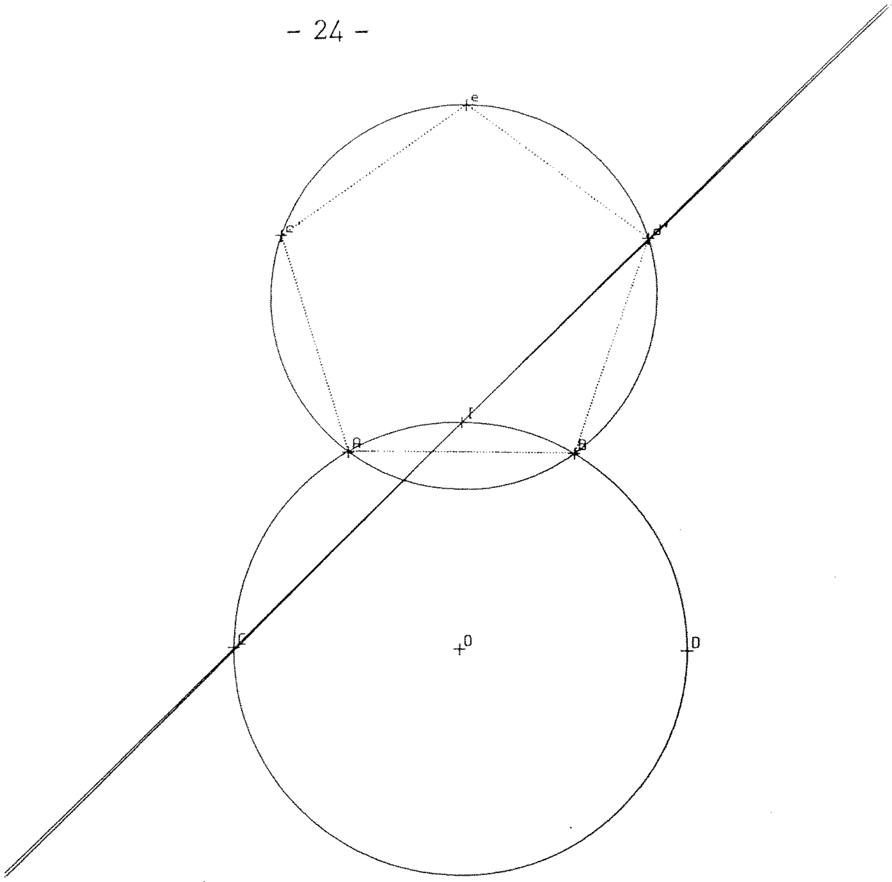

Fig. 3

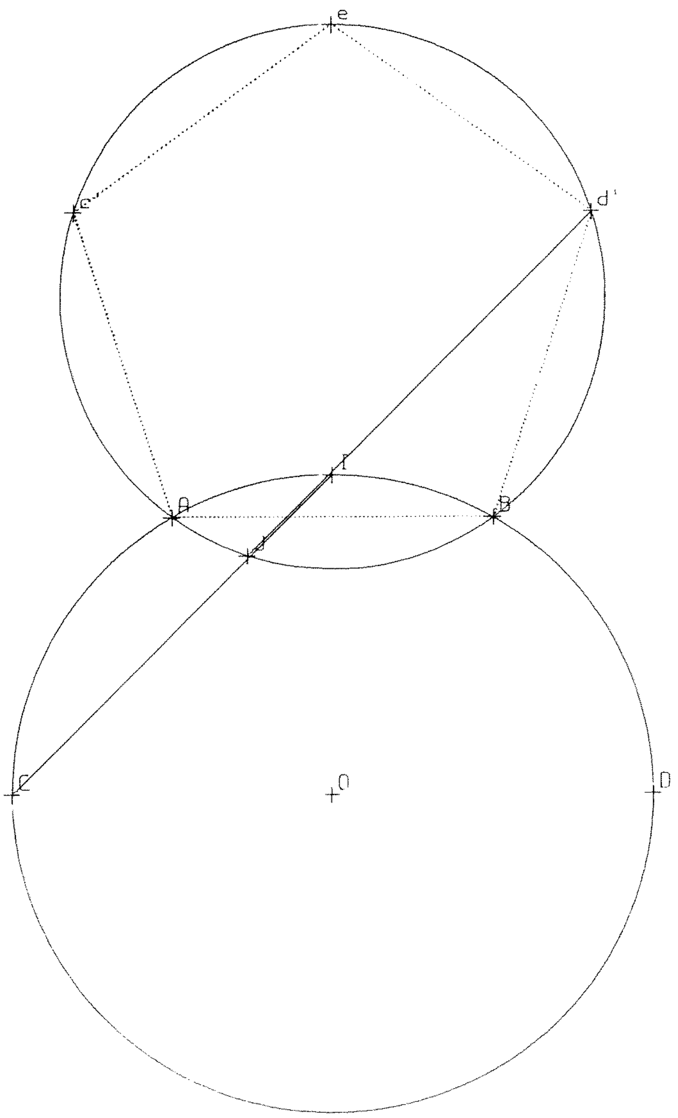

Fig. 4

Soit α l'angle $\widehat{OED'}$

$$\sin \alpha = x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

d'où

$$\hat{E} = 2\alpha = 2 \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4} \right)$$

c'est-à-dire

$$\hat{E} \simeq 109° \ 11' \ 32''.$$

$\hat{E} + \hat{C}' + \hat{D}' + \hat{A} + \hat{B} = 540°$, donc $\hat{D}' = 270° - \hat{B} - \frac{\hat{E}}{2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\hat{D}' \simeq 107° \ 2' \ 16''.}$$

Le pentagone de Dürer n'est donc pas régulier. Essayons de traduire l'erreur commise en mesures encore plus frappantes.

Avec la table traçante, construisons un pentagone ABd'ec' régulier à partir d'un segment $[AB]$ donné, les points C, D, I, O définis comme dans les figures 1 et 2, le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au pentagone ABd'ec' et le cercle de centre O passant par A. Complétons avec les droites (CI) et (Id') (Fig. 3).

On constate que les deux droites sont distinctes, alors que la construction de Dürer les supposait confondues. Faisons encore quelques calculs pour trouver leur angle :

Toujours dans le repère (O, D, I), les coordonnées de d' sont

$$\left(\frac{1}{2} + \cos 72°, \ \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 72°\right)$$

d'où

$$\overrightarrow{Id'} \left(\frac{1}{2} + \cos 72°, \ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sin 72°\right).$$

De plus, on a

$$\overrightarrow{CI} \ (1,1) \text{ et } CI = \sqrt{2}.$$

Soit ε l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{Id'}})$, on a

$$\cos \varepsilon = \frac{\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{Id'}}{CI \cdot Id'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \cos 72° + \sin 72°}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3} + \cos 72° + (\sqrt{3} - 2) \sin 72°}}$$

donc

$$\boxed{\varepsilon \simeq 0° \ 17' \ 3''.}$$

Il s'agit donc d'un angle minuscule, qu'un tracé à la main ne pouvait pas mettre en évidence.

Recommençons la figure 3 sans les droites (CI) et (Id'). Sur cette nouvelle figure, nous traçons le segment [CI]. D'autre part, nous appelons J l'intersection de la parallèle à (CI) passant par d' avec le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au pentagone, et nous traçons [d'J] (Fig. 4).

Nous constatons que les parallèles (CI) et (d'J) sont distinctes, ce qui était prévisible, puisque C, I, d' ne sont pas alignés. Par contre, la construction de Dürer suppose ces deux droites confondues.

Précisons d'abord la position du point J sur le cercle $\mathscr{C}$. $\widehat{ICO} = 45°$, et puisque (d'J) // (CI) et (d'c') // (CI), on a aussi : $\widehat{c'd'J} = 45°$.

En raisonnant dans le triangle ec'd', on trouve $\widehat{ed'c'} = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$.

Donc $\widehat{Jd'B} = \widehat{ed'B} - \widehat{ed'c'} - \widehat{c'd'J} = 108° - 81° = 27°$.

Sur le cercle $\mathscr{C}$, appelons J' le point qui se trouve au quart du petit arc $\overset{\frown}{AB}$, à partir de A. On a $\overset{\frown}{AB} = 72°$, donc $\overset{\frown}{BJ'} = \frac{3}{4} \cdot 72° = 54°$. Or, l'angle inscrit $\widehat{Jd'B}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BJ}$, donc $\overset{\frown}{BJ} = 2 \cdot 27° = 54° = \overset{\frown}{BJ'}$. On en déduit que J et J' sont confondus.

Conclusion : J se trouve au quart du petit arc $\overset{\frown}{AB}$ à partir de A.

Calculons maintenant la distance entre (CI) et (d'J) :

(d'I) passe par d' $(\frac{1}{2} + \cos 72°, \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 72°)$ et a la direction de $\overrightarrow{CI}(1,1)$. Donc l'équation de (d'I) est : $x - y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 72° + \sin 72° = 0$, ou encore $x - y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \sin 27° = 0$.

Soit $K(x_k, y_k)$ la projection de I sur (Jd'). Les coordonnées de $\overrightarrow{IK}$ sont $(x_k, y_k - 1)$ avec $y_k - 1 = -x_k$ car $\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{CI}$.

En traduisant $K \in$ (Jd') avec $y_k = 1 - x_k$, on trouve $x_k = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 27°$.

$IK^2 = 2x_k^2$ donc $IK = \sqrt{2} \cdot x_k = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} - \sin 27°$.

$$\boxed{IK \simeq 0{,}0057 \text{ unités.}}$$

L'unité de longueur est AB. Sur la figure 4, $AB = 3\sqrt{2}$ cm, donc $IK \simeq 0{,}25$ mm.

Ici aussi, il s'agit d'une distance très petite, qui dépasse largement la précision d'un tracé à la main et même l'épaisseur d'un trait de crayon !

Quelques remarques pour conclure :

Les figures 2, 3 et 4 ont été réalisées avec un logiciel que j'ai écrit pour faire les constructions géométriques planes à l'aide d'une table traçante. On peut se servir de ce logiciel même si l'on ne sait pas programmer. On peut l'utiliser à l'IREM où l'on trouvera aussi le matériel nécessaire.

On vient de voir qu'avec cet outil, on peut faire de la géométrie expérimentale beaucoup plus fiable qu'avec le dessin à la main.

On peut aussi réaliser un certain nombre de figures quasiment irréalisables à la main (exemples : problèmes de points cocycliques - cercle d'Euler, problèmes d'alignement - droite de Simson, de Steiner, etc...)

Cela peut intéresser tous ceux qui ont déjà torturé des droites qui s'obstinent à ne pas passer par des points où pourtant il est prouvé qu'elles doivent passer, et tous ceux qui se sont déjà épuisés à démontrer que des points non alignés sont alignés parce qu'ils le sont tellement bien sur le dessin. N'est-ce pas le cas de la construction de Dürer ?