SABLE ET MATHEMATIQUE

par Roger ISS

Au cours de l'année scolaire 1980-81, le Rallye Mathématique d'Alsace - dont j'étais à l'époque l'un des organisateurs - avait proposé aux élèves de Seconde et de Première le problème suivant :

> " Si on charge, à refus, avec du sable, une plateforme horizontale qui a des bords rectilignes, le tas de sable obtenu n'a que des faces planes dont l'angle avec le plan horizontal est constant. Le dessin ci-contre est le plan d'une plateforme rectangulaire, percée d'un trou carré (fig. 1a). Représenter à l'échelle 1/100e et vue d'en haut, cette plateforme supposée horizontale et chargée de sable."

Le corrigé qui en avait été donné conduisait au dessin de la figure 1b.

Un collègue m'ayant, par la suite, signalé son désaccord, je m'étais promis de revoir la question. Un séjour récent près d'une plage de sable fin m'a remis le problème en mémoire et j'en ai profité pour me livrer à quelques expériences sur le sable. J'ai pu constater ainsi que, si notre exercice de Rallye était irréprochable sur le plan mathématique, ses hypothèses étaient à revoir sur le plan de la physique. S'il est, en effet, exact qu'un tas de sable est limité par des faces planes lorsque sa base est un polygone convexe , les choses sont plus compliquées dans tous les autres cas. La petite étude mathématique à laquelle je me suis livré m'a conduit à des résultats dont j'ai pensé qu'ils pouvaient intéresser les lecteurs de "l'Ouvert".

UNE DEFINITION MATHEMATIQUE DES TAS DE SABLE

Les "tas de sable" dont il sera question sont obtenus en chargeant une plaque plane, horizontale et surélevée avec du sable. Celui-ci s'accumule jusqu'à un moment où tout le sable que l'on rajoute coule et tombe de la plaque. Le tas de sable a pris alors une forme invariable, indépendante de la manière dont on charge la plateforme.

On appelera "surface TS" toute surface délimitant un tel tas de sable. L'observation conduit à formuler deux hypothèses physiques :

1. Si un grain de sable roule ou glisse à la surface d'un tas de sable, il décrit une *ligne de pente* (1) de celle-ci.

2. Un grain de sable, posé sans vitesse initiale sur un tas de sable, roule et glisse si et seulement si la tangente à la ligne de pente fait avec le plan horizontal un angle au moins égal à une valeur constante α .

Cet angle α dépend de différents facteurs physiques : taille et forme des grains, degré d'humidité, etc. Pour simplifier les calculs et sans restreindre leur généralité, nous supposerons $\alpha = 45°$ dans toute cette étude (cet angle mesurait environ 32° pour le sable que j'ai utilisé).

Dans ces conditions, nous adopterons la définition suivante :

> Etant donné un plan fixe (dit horizontal) une surface TS est telle qu'en tout point la tangente à la ligne de pente, passant par ce point et relative au plan horizontal, fait avec celui-ci un angle de 45°.

Bien entendu, comme c'est souvent le cas en physique, nos hypothèses ne traduisent la réalité qu'avec une certaine approximation. La trajectoire d'un grain de sable, rectiligne en apparence, est, en réalité, fort sinueuse. Une étude plus précise nous amènerait sans doute dans le domaine des "fractals"... Mais, à l'échelle du décimètre - celle de nos manipulations - elles rendent parfaitement compte des phénomènes observés. Peut-être s'appliquent-elles aussi, à l'échelle de l'hectomètre, aux dunes du Sahara et aux grands pierriers alpins ?

PROPRIETES DES SURFACES TS

On supposera, pour la mise en équations, que le plan horizontal est le plan Oxy d'un repère orthonormé Oxyz et que les surfaces considérées sont deux fois continuement dérivables.

---

(1) *Ligne de pente* d'une surface par rapport à un plan horizontal : courbe tracée sur la surface, telle qu'en chacun de ses points, la tangente est droite de plus grande pente du plan tangent en ce point.

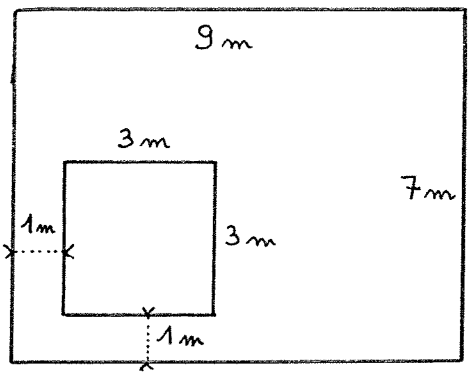

Fig. 1a

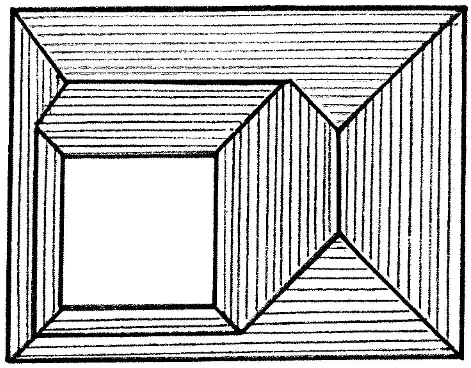

Fig. 1b

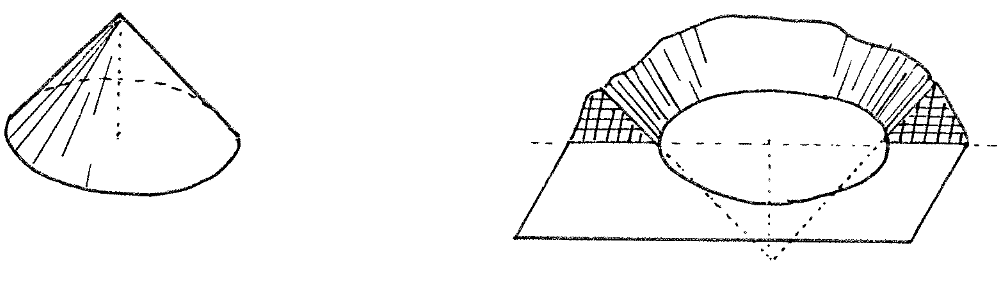

Fig. 2

<u>1ère proposition</u> : Une surface d'équation $z = f(x,y)$ est une surface TS si et seulement si elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

(1) $$f'^2_x + f'^2_y = 1$$

(ou, en d'autres termes $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\| = 1$).

En effet, dans le plan tangent d'équation

$$Z - z = f'_x\,(X - x) + f'_y\,(Y - y)$$

une droite de plus grande pente a pour paramètres

$$f'_x,\ f'_y,\ f'^2_x + f'^2_y.$$

En écrivant qu'elle fait un angle de 45° avec le plan Oxy (donc aussi avec Oz), on obtient la condition nécessaire et suffisante : (1) $f'^2_x + f'^2_y = 1$.

<u>2ème proposition</u> : Les lignes de pente d'une surface TS sont des droites.

Si on représente une ligne de pente par des équations de la forme :

$$X = t \qquad Y = \varphi\,(t) \qquad Z = f(t, \varphi\,(t))$$

avec $\varphi\,'(t) = \dfrac{f'_y}{f'_x}$, on constate que le vecteur $\vec{V}\,(f'_x,\ f'_y,\ 1)$

qui dirige la tangente à cette ligne de pente, est constant tout le long de celle-ci. (Calculer la dérivée de $\vec{V}$ en tenant compte des relations obtenues en dérivant l'équation (1)).

<u>3ème proposition</u> : Toute surface TS est une surface développable dont l'arête de rebroussement est une hélice.

Le vecteur $(f'_x,\ f'_y,\ -1)$ normal à la surface est, lui aussi, constant le long d'une ligne de pente. Le plan tangent ayant une direction fixe tout le long de cette droite et la contenant, il est le même en tout point de celle-ci. La surface TS est donc développable et ses génératrices sont tangentes à une même courbe, l'arête de rebroussement. Celle-ci est une hélice, puisque ses tangentes font un angle de 45° avec Oz.

<u>Corollaire</u> : Les projections sur le plan Oxy des courbes de niveau d'une surface TS sont des courbes parallèles ; leur développée commune est la projection sur Oxy de l'arête de rebroussement de la surface.

La réciproque de la proposition 3 se démontre aisément. On a donc, incidemment, établi le théorème suivant :

Les surfaces $z = f(x,y)$ intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$f'^2_x + f'^2_y = 1$$

sont les surfaces développables dont l'arête de rebroussement est une hélice pour la direction Oz et l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

EQUATIONS D'UNE SURFACE TS

<u>4ème proposition</u> : Une surface TS peut être représentée paramétriquement par des équations de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_o(\theta) + z \cos\theta \\ y = y_o(\theta) + z \sin\theta \end{cases}$$

avec la condition (3) $x'_o \cos\theta + y'_o \sin\theta = 0$.

Toute droite D faisant un angle de 45° avec l'axe Oz est susceptible d'une représentation de la forme

$$x = x_o + z\cos\theta \qquad y = y_o + z\sin\theta$$

θ étant l'angle polaire de sa projection sur Oxy.

En faisant varier x_o et y_o en fonction de θ , on obtient la représentation d'une surface réglée. La droite D en est une ligne de pente si et seulement si elle est orthogonale aux horizontales de la surface (dont les tangentes ont pour paramètres $x'_o - z\sin\theta$, $y'_o + z\cos\theta$, 0) c'est-à-dire si la condition (3) est vérifiée.

La courbe $x = x_o(\theta)$, $y = y_o(\theta)$, $z = 0$ est l'horizontale de cote 0 : c'est le bord de la plateforme portant le tas de sable. Nous l'appelerons *courbe directrice* de la surface TS. La relation (3) exprime que la droite D est orthogonale à cette directrice : cette condition, évidemment nécessaire, est donc aussi suffisante.

Nous voilà donc, désormais, en mesure non seulement de donner des équations de toute surface TS dès que l'on connaît celles de sa directrice, mais aussi de fournir une représentation *physique* de toute surface intégrale (ou tout au moins d'une partie de celle-ci) de l'équation aux dérivées partielles $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\| = 1$. Citons, pour mémoire, deux cas particuliers pour lesquels la solution est désormais évidente :

- si la directrice est rectiligne, la surface TS est plane ;
- si la directrice est circulaire, la surface TS est un cône de révolution à axe vertical.

DETERMINATION DU TAS DE SABLE CORRESPONDANT A UNE PLATEFORME DONNEE

Pour pouvoir passer des surfaces TS théoriques à la forme réelle des tas de sable, il nous reste deux problèmes à résoudre.

1er problème : Les équations (2) obtenues ci-dessus définissent en réalité deux nappes symétriques l'une de l'autre par rapport au plan Oxy (changer z en -z et θ en $\theta + \pi$) mais chacune d'elles correspond bien à un tas de sable. En effet une directrice détermine deux parties complémentaires du plan et chacune d'elles fournit une plateforme. Il y a donc deux tas de sable possibles qui correspondent à la même surface TS, à une symétrie près. Pensons par exemple aux tas de sable qui se forment respectivement sur un disque circulaire et autour du "trou" circulaire correspondant (fig. 2).

Signalons, cependant, que cette propriété de symétrie, vraie si la directrice est de classe C^1 , n'est pas toujours vérifiée (par exemple pour une directrice polygonale).

Pour que les équations (2) représentent la nappe qui nous intéresse, θ doit être l'angle polaire de la normale à la directrice, orientée positivement vers l' intérieur de la plaque.

Exemple : Supposons que la directrice soit la parabole $y_o = x_o^2$, la plateforme étant formée par la partie convexe qu'elle détermine dans le plan ($y \geqslant x^2$).

La condition (3) conduit à la représentation paramétrique de la surface TS :

$$x = z\cos\theta - \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} \qquad y = z\sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{4\sin^2\theta}$$

La normale à la parabole, orientée vers la concavité a pour angle polaire $\theta\ [2\pi]$. La nappe qui convient est obtenue pour $\theta \in]0,\pi[$.

2ème problème : Un tas de sable n'étant pas illimité, il nous faut déterminer sur chaque génératrice rectiligne de la surface TS la portion (que nous appellerons "partie utile") qui correspond effectivement au tas de sable. Pour cela, une nouvelle hypothèse, d'origine expérimentale, est nécessaire :

> La partie utile d'une génératrice est comprise entre le point M_o de cote 0, situé sur la directrice, et le point P de cote positive (ou celui de ces points qui a la plus petite cote, lorsqu'il y en a plusieurs) par lequel il passe au moins une autre génératrice de la surface (Fig. 3).

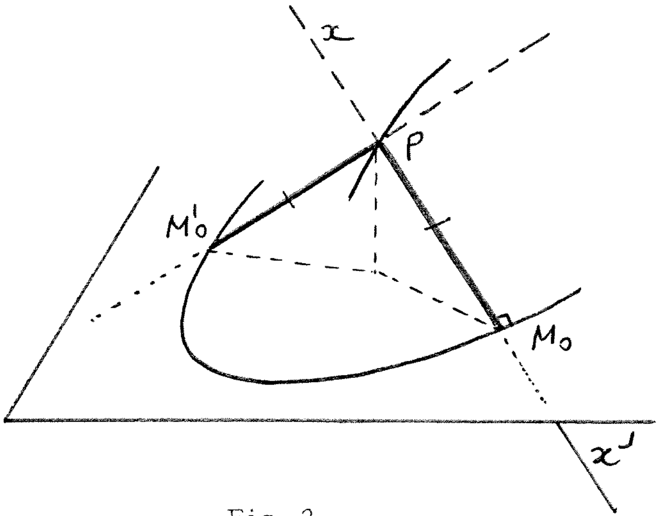

Fig. 3

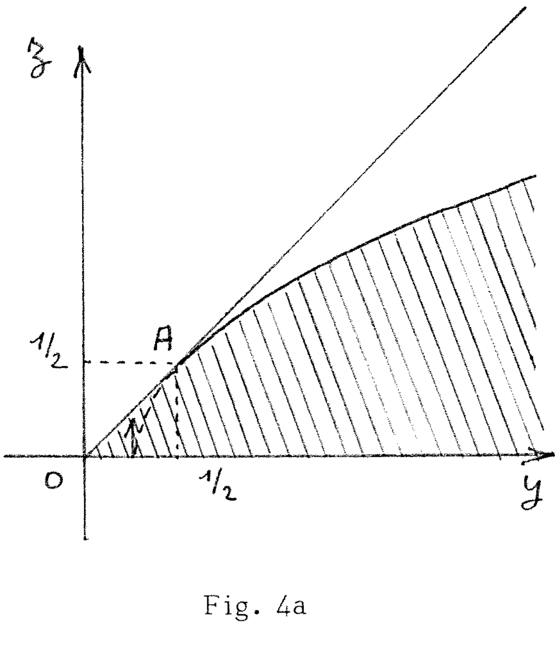

Fig. 4a

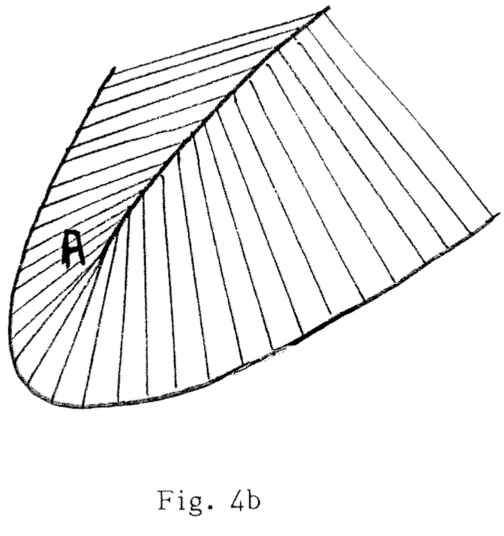

Fig. 4b

En d'autres termes, il faut supprimer sur chaque génératrice

- d'abord et de toute évidence la demi-droite M_0x' située sous la plateforme ;
- ensuite la demi-droite Px "en surplomb" dont l'origine P est le premier point singulier de la surface situé sur cette génératrice.

Nous appelerons "crête" du tas de sable l'ensemble de ces points P (c'est une courbe différente de l'arête).

Si la directrice possède un axe de symétrie, il est évident que cette crête se trouve dans le plan de symétrie correspondant de la surface.

Ainsi, si la plateforme est carrée, le tas de sable est une pyramide et la crête est formée des quatre arêtes obliques de celle-ci. Si la plateforme est un disque, la crête se réduit au sommet du cône.

Reprenons l'exemple de la plaque parabolique :

L'intersection avec le plan de symétrie Oyz est formée de 2 arcs analytiquement distincts (fig. 4a)

- une génératrice contenue dans le plan Oyz :

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = z$$

- un arc de parabole :

$$z = \frac{1}{2\sin\theta} \Longrightarrow y = z^2 + \frac{1}{4} \text{ avec } z \geqslant \frac{1}{2}.$$

La recherche de la partie utile, facilitée par la symétrie, montre que la crête est constituée par cet arc de parabole. La zone hachurée sur la figure (4a) représente donc le tas de sable vu de profil. En perspective, on a l'allure de la figure (4b). L'extrémité de la crête est un point A, situé sur l'arête de rebroussement et se projetant horizontalement au centre de courbure de la parabole directrice en son sommet. En "avant" de ce point A ($y < \frac{1}{2}$), la surface du tas de sable est sans point singulier.

L'accord entre la théorie et la réalité physique est remarquable. En accumulant du sable sur une plaque convexe à contour parabolique, on voit très bien apparaître cette crête. On obtient d'ailleurs une configuration analogue en remplaçant la parabole par toute autre courbe convexe, pourvu qu'elle n'ait qu'un seul point où le rayon de courbure passe par un minimum (sinon on peut voir apparaître d'autres arcs de crête...). Lorsque le rayon de courbure minimum diminue, ou, si on préfère, lorsqu'on utilise une plateforme de plus en plus pointue, on voit diminuer la cote du point A, extrémité de la crête. Celui-ci se situe finalement sur la directrice elle-même lorsqu'elle présente un point de rebroussement.

PERTURBATIONS DUES AUX ANGLES RENTRANTS

La théorie précédente est en défaut lorsque les hypothèses de dérivabilité, faites au départ, ne sont plus satisfaites. Examinons par exemple le cas où la directrice possède un point anguleux et, pour simplifier, nous supposerons que cette directrice est un polygone.

Au sommet d'un angle saillant (fig. 5a), la solution évidente a déjà été signalée à propos du carré : il se forme une crête rectiligne dans le plan de symétrie.

Considérons, par contre, le cas d'un angle rentrant (fig. 5b) : aux côtés Cx et Cy correspondent des faces planes, mais la théorie ne donne pas de réponse pour le secteur x'Cy'. Il nous faut revenir à la réalité physique : le grain de sable qui tombe dans ce secteur ne peut pas terminer sa course en traversant un des côtés Cx ou Cy. Il doit donc passer par le point C et par conséquent, la partie manquante de la surface est une portion de cône de révolution de sommet C qui se raccorde avec les deux faces planes. C'est bien ce que l'on observe dans la réalité.

Nous pouvons, enfin, représenter le "vrai" tas de sable correspondant à l'énoncé du Rallye Mathématique 1981. Nous laissons au lecteur le soin de faire le dessin...

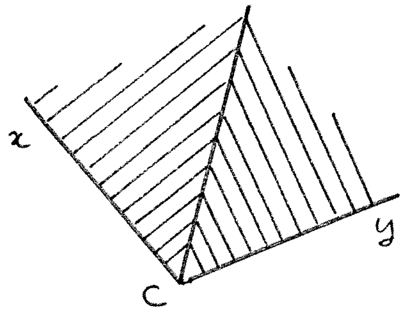

Fig. 5a

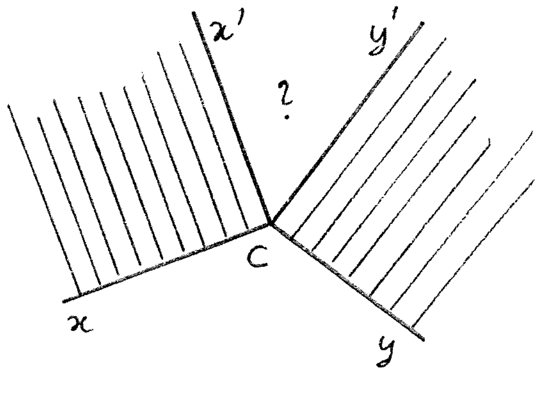

Fig. 5b

N.B. : Pour obtenir le tas de sable représenté en couverture, il suffit d'utiliser une plaque conforme au dessin (4 cercles de même rayon et tangents). On y observe bien la "perturbation" due aux points de rebroussement : pour chacun d'eux, le tas se creuse suivant un demi-cône de révolution.