MATHEMATIQUE ARABE AU LYCEE

C. KAHN et O. SCHLADENHAUFEN

Nous avons invité Monsieur A. DJEBBAR le mercredi 9 janvier 1985 au Lycée Marie Curie. Devant un public d'une centaine d'élèves des classes de 1ère S et de T.C., il a évoqué la naissance de l'algèbre et son développement dans les pays arabo-musulmans du VIIIe siècle au XIVe siècle.

Voici un résumé de sa conférence qui a enthousiasmé nos élèves ; certains d'entre eux sont même restés une heure de plus pour en savoir davantage.

De 622, date de l'Hégire (émigration de Mohamet vers Médine) à 750 se construit le nouvel état mulsuman avec ses institutions politiques, religieuses, économiques et culturelles. Le désir et le besoin de mieux connaître les Mathématiques conduisent les Arabes à lire les écrits des Grecs, des Indiens et des Babyloniens. Dans les manuscrits grecs et indiens dont ils disposaient alors, ils ne trouvent aucune étude particulière de l'Algèbre mais tout au plus des éléments de logistique (opérations arithmétiques sur les nombres : +, −, ×, :, $\sqrt{\ }$), plus développées chez les Indiens grâce au système décimal de position complète. Mais malgré l'absence de témoignages directs, il semble que les Arabes aient connu certaines traditions mathématiques des Babyloniens. Ces derniers ont utilisé en effet certains procédés de calcul algébrique : ils savaient résoudre $ax = c$ (sans utiliser cette écriture), des équations qui se ramènent au second degré comme $ax^2 + bx = c$, ainsi que le système d'équations $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$

Ils commencent par traduire les textes existants et c'est au début du IXe siècle, sous le règne du khalife al - Ma' mūn que paraît le premier traité d'algèbre. Il s'agit du "livre concis en Algèbre (de l'arabe al-jabr) et en Muqābala" (* voir encart) écrit par Al Khawarizmi (780 - 850). Le nom de ce savant est à l'origine de notre mot "algorithme". Cet ouvrage très mince en regard de tous les livres que nous trouvons dans nos bibliothèques, comprend deux parties :

A L'ORIGINE DU MOT ALGEBRE ...

... se trouve le Caliphat Abbassides (750-1280). Durant cette période, Bagdad sa capitale devint le centre intellectuel du monde musulman. Sous le règne des Caliphes Harum-al-Raschid (786-808) et Al-Mâmûn (809-833), la venue à Bagdad de savants indiens, arabes, persans, juifs et chrétiens fut fortement encouragée. Il en résulta divers travaux d'arithmétique, d'algèbre, d'astrologie et d'astronomie et surtout la traduction en arabe de nombreuses oeuvres grecques classiques.

Parmi ces savants se trouvait un mathématicien persan : Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî dont le nom signifie : Mohammed, fils de Moïse, du Kwarezm. Le Kwarezm était un petit royaume situé au nord de l'Iran actuel dans ce qui est maintenant le Turkestan Soviétique. Il fut détruit au 13e siècle par les Mongols.

Au 12e siècle, en Angleterre, les oeuvres d'al-Khowârizmî fûrent traduites en latin. C'est ainsi qu'apparurent en anglais les mots : *"algorism"* ou *"augrim"* qui finirent par donner le terme *"algorithme"*.

Al-Khowârizmî fut le premier à utiliser le terme algèbre dans un traité intitulé : *"'ilm al-jabr w'al-muqâbalah"* ce qui signifie : *"Science de la réduction et de l'annulation"*. Ces deux termes se réfèrent à des opérations effectuées sur des égalités algébriques. Ils signifient, pour le premier, faire passer d'un côté à l'autre du signe égal des termes précédés du signe - et pour le second, supprimer des termes identiques situés de part et d'autre du signe égal.

Par exemple :	donne (al-jabr) :	puis (al-muqâbalah) :
$az + 2p = z^2 + az - p$	$az + 3p = z^2 + az$	$3p = z^2$

Les traductions latines du 12e siècle introduisirent les termes suivants : *"Ludus Algebrae Almucgrabalaeque"* ,*"Gleba Mutabilia"*, *"Largibra"*. Au 16e siècle apparut en anglais : *"Algiebar and Almachabel"* et en allemand : *"Gebra und Almuttrabola"*. Le terme al-jabr finit par s'imposer alors que al-muqâbalah disparut.

Cependant al-jabr provenait d'un verbe arabe signifiant réunir ou consolider. Le mot passa avec ce sens en Espagne où il donna : *"algebrista"* signifiant rebouteux. Ainsi les barbiers se disaient : *"algebrista y sangrador"*, soit : celui qui remet les os en place et pratique des saignées. Au 16e siècle, le terme algèbre se répandit en Italie, en France et en Angleterre avec le sens de science de la réduction des fractures.

Que reste-t-il maintenant de ce terme ? Les cylindres peints en hélice (barber poles) qui servaient d'enseigne aux coiffeurs aux Etats-Unis autrefois, sont peut-être un lointain souvenir des attelles destinées à réduire les fractures ?

Dominique VIAUD

1° Dans la première partie il distingue trois sortes d'objets : les nombres simples qu'il désigne par **dirham** (du nom de l'unité monétaire grecque drachme) ; l'inconnu qu'il appelle **say'** (chose) ou gizr quand il s'agit plutôt de la racine d'une équation, et enfin il utilise **māl** pour le carré de l'inconnu.

Puis il définit les six équations canoniques :

. $ax = c$	. $ax^2 = bx$	. $ax^2 + c = bx$
. $ax^2 = c$	. $ax^2 + bx = c$	. $ax^2 = bx + c$

où a, b, c, appartiennent à $\mathbb{N}^*$ ou à $\mathbb{Q}^{*+}$, et il explicite pour chacune d'elles, l'algorithme de résolution qui fournit la ou les solutions (positives) cherchées. Il conclut cette partie en donnant des démonstrations géométriques de l'existence des solutions de ces six équations.

2° La seconde partie, plus longue que la première, concerne les applications. L'auteur y résout des problèmes posés par la vie quotidienne dans la cité musulmane : problèmes d'héritage dont les règles figurent dans le Coran, problèmes de transactions commerciales, problèmes d'arpentage pour l'établissement de l'assiette de l'impôt. Cette deuxième partie devait faciliter la vente du livre auprès des marchands, des juges, des fonctionnaires de l'administration.

Exemples

1. Problème d'arpentage :

Partager un champ triangulaire isocèle en trois rectangles et un carré inscrit dans le triangle.

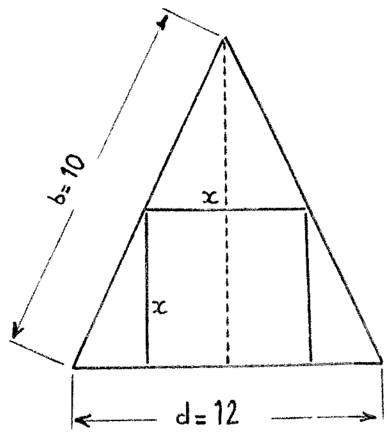
1. calcul de h : $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 8$

2. calcul de la surface totale : $S = \frac{1}{2} h \,.\, a = 48$

3. calcul de x :

$$x^2 + x\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) + (h - x)\ x \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} ab$$

$$\rightarrow \quad x = 4 + \frac{4}{5}.$$



2. Problème d'héritage :

Un homme (musulman) meurt et laisse 4 garçons. Il fait une première donation égale à la part d'un des garçons et une seconde donation égale au quart de la différence entre le tiers de l'héritage et la première donation.

Réponse : On résoudra l'équation :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}m - x\right) + x + 4x = m$$

(m = héritage, x = part d'un garçon).

3. Problème de transaction commerciale :

On veut acheter du froment et de l'orge, le prix d'une mesure du premier étant le double du prix de la même mesure du second. On suppose également que la dépense totale est égale à la différence des prix de chaque mesure augmentée de la différence des quantités achetées. Sachant qu'on a acheté 6 mesures de froment et 4 d'orge quel est le prix d'une mesure de froment ?

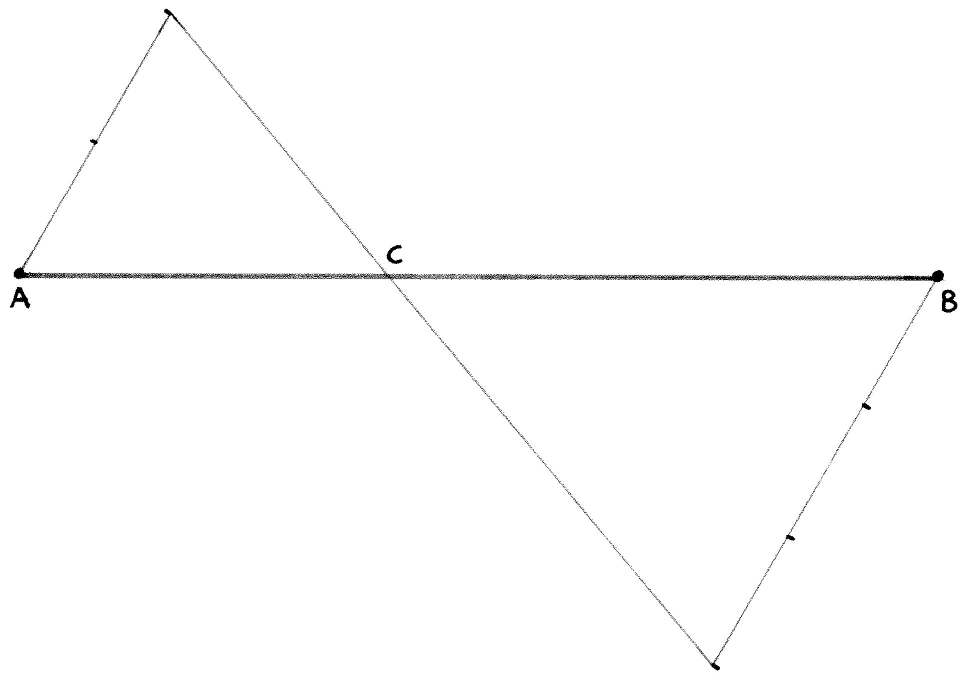
Réponse :

$$6x + 4\left(\frac{x}{2}\right) = \left(x - \frac{x}{2}\right) + (6 - 4)$$

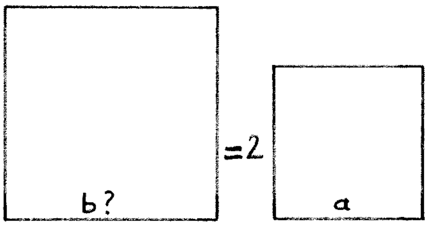
Cet ouvrage atteste l'apparition d'une nouvelle discipline scientifique : l'Algèbre. Les Arabes, conscients de posséder de nouveaux outils, ont essayé de résoudre algébriquement certains problèmes non résolus par les Grecs et même des problèmes déjà résolus mais à l'aide de méthodes géométriques. Parmi ces problèmes on peut citer quelques-uns concernant la construction à la règle et au compas.

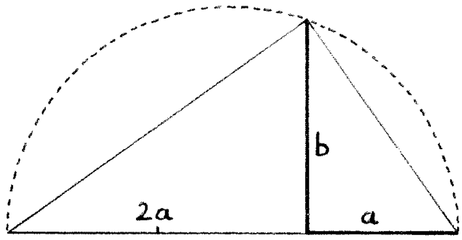
Par exemple :

. Pour trouver le point C qui partage un segment donné AB dans un rapport donné $\lambda = \frac{AC}{BC}$ on peut utiliser des parallèles.



. Pour obtenir le côté d'un carré double (au sens de la surface) d'un carré donné, on peut se servir d'une propriété connue dans le triangle rectangle.





Par contre, la duplication du cube, l'inscription de certains polygones réguliers dans un cercle (n = 7, n = 9, n = 11 etc...), la trisection de l'angle restaient sans solution géométrique (et pour cause).
- duplication du cube : construire un cube ayant pour volume le double de celui d'un cube donné,
- inscription d'un polygone régulier dans un cercle : le problème est simple pour un triangle équilatéral, un carré, un pentagone et un hexagone, mais pour l'heptagone on ne trouve pas de solution,
- trisection de l'angle : diviser un angle quelconque en trois parties égales. Les Grecs savaient réaliser la construction, à la règle et au compas, pour un angle droit ou pour un angle de 108° (lié au pentagone).

Pour le cas général et pour la duplication du cube, les Grecs avaient obtenu la solution par intersections de courbes coniques (cercles, paraboles, ellipses, hyperboles) ou par construction de courbes dites mécaniques (par exemple la conchoïde de Nicomède). Les problèmes dont les solutions ne sont pas constructibles à la règle et au compas, comme Wantzel devait le démontrer au XIXe siècle, conduisent à des résolutions d'équations du 3e degré - traduction algébrique que les Arabes donnent au Xe siècle.

Par exemple, effectuer la duplication d'un cube de côté a donné revient à trouver x tel que $x^3 = 2a^3$. Ils résolvent cette équation par extraction de racines. La seconde équation qu'ils ont cherché à résoudre était de la forme : $x^3 + c = ax^2$ avec a et c des coefficients numériques donnés ; cette équation est liée au problème d'Archimède exposé dans "le traité sur la Sphère et le Cylindre" (proposition 4, livre II) : il s'agit de déterminer la section d'une sphère par un plan de manière que le rapport des volumes des deux calottes sphériques soit égal à un rapport donné.

C'est al-Māhānī (mort en 888) qui fut le premier à ramener ce problème géométrique à la résolution de l'équation $x^3 + c = ax^2$. Mais, après avoir tenté vainement de la résoudre, il dit qu'elle était impossible. Elle sera résolue par al-Kuhī (Xe siècle). Après eux, d'autres mathématiciens ont résolu, à l'aide des coniques, d'autres équations du 3e degré, et au XIe siècle, Omar al-Khayyām (1048 - 1131) écrira un livre de synthèse sur tous ces travaux. Il donnera une classification des équations de degré $\leqslant 3$ et exposera les démonstrations géométriques, reposant sur les intersections de coniques, qui permettent de déterminer le nombre de racines positives de chaque équation.

D'autres travaux seront faits dans ce domaine et concerneront la recherche de ces mêmes solutions par des méthodes d'approximation . Ces recherches de solutions approchées d'un problème seront d'ailleurs développées dans d'autres domaines (calcul d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre, calcul approché de π, etc...).

Un des grands savants qui s'illustra dans ce domaine fut al Kāshī (mort en 1437 environ) qui travailla à Samarcande dans le grand observatoire construit par Ulugh Beg (qui était à la fois souverain et homme de Science).

Le meurtre de ce souverain éclairé amènera le déclin des activités scientifiques dans les régions qu'il gouvernait. Mais ces activités se poursuivront en Egypte et au Maghreb, même si elles n'avaient plus le dynamisme et la fécondité de celles des IX - XIIe siècles.

C'est à partir du XIIe siècle que les mathématiques arabes vont être partiellement traduites en Latin puis en Hébreu et vont ainsi se diffuser en Europe ; elles seront à la base de la réactivation scientifique européenne dont les effets commenceront à se manifester au XIIIe siècle en Italie et dans le midi de la France et plus tard dans le reste de l'Europe.