1, 2, 3, 4,...

par Jean LEFORT

Il est traditionnel d'utiliser le segment unité pour effectuer des mesures sur la droite ; le carré de côté unité pour effectuer des mesures dans le plan ; le cube d'arête unité pour effectuer des mesures dans l'espace. Segments, carrés, cubes ont des liens entre eux, liens plus souvent intuitifs qu'explicites.

Pour construire un carré, on part d'un segment qu'on translate de sa longueur dans la direction perpendiculaire à lui-même et on joint les extrémités homologues (Fig. 1).

Fig. 1

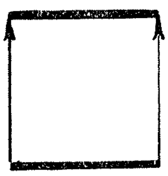


Fig. 2

Pour construire un cube, on part d'un carré qu'on translate de la longueur de son côté dans la direction perpendiculaire à lui-même (à son plan) et on joint les sommets homologues (Fig. 2).

§ 1. EN ROUTE POUR LA QUATRIEME DIMENSION

Et si nous recommencions avec un cube ? On le translate perpendiculairement à lui-même de la longueur de son arête et on joint les sommets homologues. Là, vous m'arrêteriez et j'imagine le dialogue suivant :

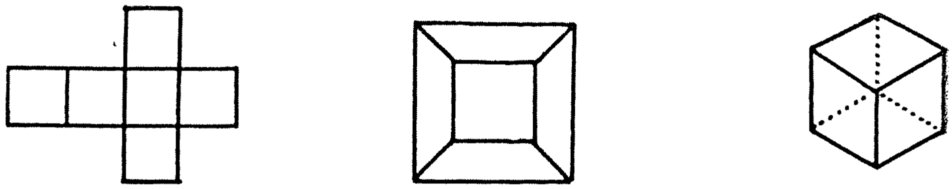
Vous : Perpendiculaire à un cube, ça n'a pas beaucoup de sens !

Moi : Il s'agit de la perpendiculaire à $\mathbb{R}^3$, le quatrième axe dans $\mathbb{R}^4$, bref, il faut faire une translation dans la quatrième dimension.

Vous : Mais la quatrième dimension, personne ne l'a jamais vue et on ne peut se l'imaginer.

Moi : Certes, personne ne l'a jamais vue, mais, justement, l'imagination est là pour suppléer la vision. Le dessin de la figure 2 n'est pas un cube mais un graphe planaire qu'on peut interpréter de bien des façons, mais je privilégie ici l'interprétation : "projection cavalière d'un cube". J'aurais pu choisir une autre représentation (Fig. 3).(*)

Fig. 3



etc...

Le développement — La projection perspective vue de face — La projection axonométrique

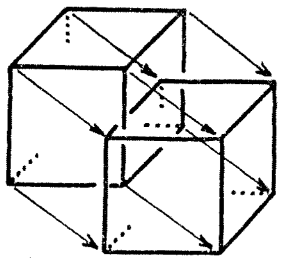
Vous : Je commence à comprendre (**) ; vous voulez me projeter un machin à quatre dimensions dans notre espace à trois dimensions pour voir l'allure que ça a ?

Moi : Exactement, sauf que je vais carrément effectuer projection et représentation sur le plan parce que votre périodique habituel ne s'est pas encore mis à l'holographie. Mais je fais confiance à votre habitude de la lecture des figures planes comme représentation de l'espace.

Vous : Eh bien, allez-y. Qu'est-ce que cela donne ?

Moi : Voici la figure 4. On peut appeler cela un 'hypercube" ; nous dirons un "4-cube" pour préciser que nous sommes en dimension quatre. Nous avons dupliqué un cube et relié les sommets homologues. Ceci en est la perspective cavalière sur un plan. On peut en imaginer bien d'autres.

Fig. 4



§ 2. L'HYPERCUBE OU 4-CUBE

Imaginons une perspective axonométrique, c'est-à-dire une perspective respectant

---

(*) On pensera au célèbre dessin de Magritte représentant une pipe et intitulé : "Ceci n'est pas une pipe".

(**) Là, franchement, je m'avance. Vous vous dites peut-être que vous ne comprenez décidément rien à la lecture de votre périodique habituel et que vous préférez aller cultiver votre jardin !

l'égalité des longueurs des arêtes. Dans le cas du cube, le contour apparent obtenu était un hexagone. Ici, c'est-à-dire dans le cas du 4-cube, si nous projetons sur le plan de la feuille nous pouvons obtenir la figure 5 ; si nous projetons dans l'espace puis que nous fassions une projection cavalière du résultat, nous obtenons la figure 6.

Fig. 5

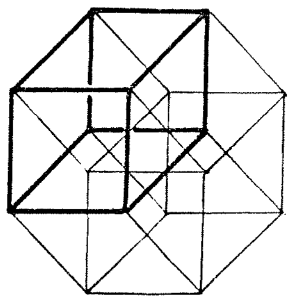
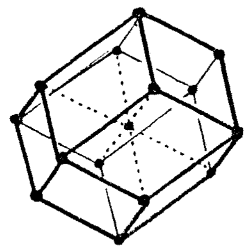


Fig. 6



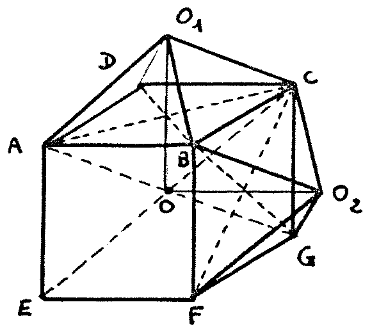
Dans le plan, la symétrie de la figure 5 met bien en évidence un certain nombre de "cubes" tels que celui dont le tracé est renforcé. On peut très exactement les compter et on en trouve... 8. On peut aussi essayer de voir de quelle façon ils sont accolés par les arêtes ou par les faces. Nous y reviendrons.

Dans l'espace, la figure 6 est peut-être moins probante. Il s'agit tout simplement d'un dodécaèdre rhombique (ben voyons !). Comme son nom est sensé l'indiquer, il s'agit d'un polyèdre à douze faces, chacune d'elles étant un losange. C'est un polyèdre archimédien, c'est-à-dire que toutes les faces sont identiques et font entre elles le même angle. Il y a deux types de sommets : ceux en lesquels se rencontrent 4 faces et donc 4 arêtes et ceux en lesquels ne s'en rencontrent que 3. Mais c'est seulement la projection du contour apparent de l'hypercube qui donne le dodécaèdre rhombique (de la même façon que le contour apparent du cube donne un hexagone). Certaines arêtes de l'hypercube se projettent à l'intérieur du dodécaèdre comme il est indiqué sur la figure 6 (et ces arêtes ont une extrémité commune : le centre du dodécaèdre qui est la projection de deux sommets du 4-cube). On voit bien alors que de chaque sommet de l'hypercube partent 4 arêtes dans les quatre directions perpendiculaires de $\mathbb{R}^4$.

Il est heureusement inutile de passer par la quatrième dimension pour construire un dodécaèdre rhombique. On prend un cube et on détermine le symétrique du centre O par rapport à chacune des faces. Soit O_i (i = 1 à 6). On met en place les six pyramides telles que O_1ABCD (Fig. 7). On démontre facilement à l'aide des angles dièdres que O_1BO_2C sont coplanaires ; ils forment un losange, face du dodécaèdre rhombique $ABCDEFGHO_1O_2O_3O_4O_5O_6$. Cette représentation appelle trois remarques :

1) Cette construction est à la base d'un puzzle qu'on peut (avec beaucoup de recherche) trouver dans le commerce. Elle permet d'autre part de calculer facilement le volume de ce dodécaèdre : c'est deux fois celui du cube soit d^3 où d est la longueur de la petite diagonale du losange.

Fig. 7

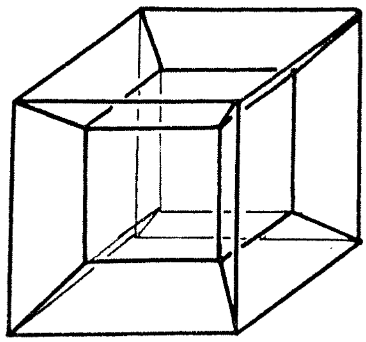


2) Les dodécaèdres rhombiques pavent l'espace, c'est-à-dire qu'on peut les empiler sans laisser de vide entre eux. Cela est manifeste d'après la construction précédente puisqu'à partir d'un empilement de cubes, on remplace un cube sur deux par six pyramides qu'on rattache aux six cubes voisins. C'est aussi une façon de voir que les 4-cubes pavent $\mathbb{R}^4$. C'est le même phénomène qui se produit avec la projection axonométrique du cube qui est un hexagone régulier (et les hexagones réguliers pavent le plan). On pourra généraliser cette remarque aux dimensions supérieures.

3) Le centre du dodécaèdre rhombique est l'image de deux sommets du 4-cube. Ceci résulte de la direction de projection adoptée. La même coïncidence se produit dans la perspective axonométrique du cube (Fig. 3).

On trouvera dans "L'Ouvert n° 37" (article de Coornaert, p. 16) un très grand nombre de représentations du 4-cube. Pour terminer ce paragraphe, la figure 8 donne une représentation en perspective d'un tel objet.

Fig. 8



§ 3. SIMPLEXES

Carrés, cubes, hypercubes, présentent une certaine simplicité mais ce ne sont pas les figures les plus simples que l'on puisse construire dans chacun des espaces $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$. On sait, en effet, qu'il faut deux points pour déterminer une droite, trois points pour déterminer un plan, quatre points pour avoir une figure qui ait du volume... D'une façon générale, il faut n+1 points pour déterminer un espace $\mathbb{R}^n$. Et on ne peut pas faire moins que n+1. D'où le nom de *simplexe* attribué à la figure minimale formée de n+1 points de $\mathbb{R}^n$. Les simplexes réguliers peuvent se construire de la façon suivante :

. Dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire sur la droite, c'est le segment de longueur a et ses deux extrémités qui en sont les sommets.

. Dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire dans le plan, c'est le triangle équilatéral de côté a. On l'obtient à partir du segment en construisant un troisième point équidistant des deux premiers (et à la distance a). Le triangle est formé de trois sommets et trois arêtes.

. Dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire dans l'espace ordinaire, c'est le tétraèdre régulier qui est obtenu à partir du triangle en ajoutant un quatrième point équidistant des trois premiers (sur une perpendiculaire au centre de gravité du triangle) et en joignant les quatre points de toutes les façons possibles. Le tétraèdre est formé de 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.

Continuons (la figure 9 permet de visualiser cela). Dans $\mathbb{R}^4$, on a un 4-simplexe formé de 5 points. Quatre quelconques d'entre-eux forment un tétraèdre régulier d'arête a et le cinquième est équidistant (sur une perpendiculaire à $\mathbb{R}^3$ (??) au centre de gravité du tétraèdre) et à la distance a des quatre premiers. Le 4-simplexe est formé de 5 sommets, 10 arêtes (comptez-les), 10 faces triangulaires (le décompte est un peu plus délicat) et de 5... "cellules" qui sont des tétraèdres réguliers.

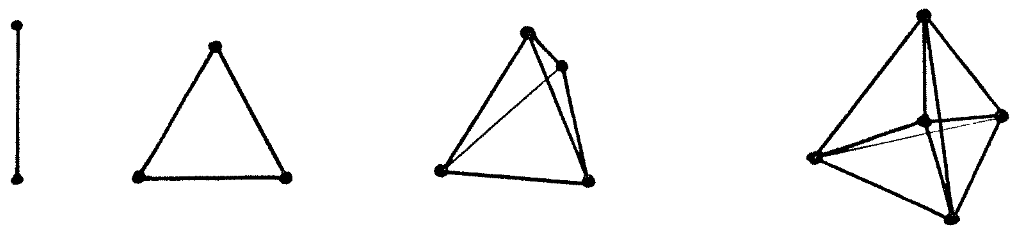


Fig. 9

dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$

Passons à $\mathbb{R}^5$. On obtiendra un simplexe (un 5-simplexe) formé de 6 sommets chacun d'eux étant relié aux cinq autres. Il y aura donc $C_6^2 = 15$ arêtes. Trois sommets quelconques formeront une face. Il y en aura donc $C_6^3 = 20$. Quatre sommets quelconques (ou quatre faces quelconques) formeront une cellule tétraédrique. Il y en aura ainsi C_6^4, soit 15. Cinq sommets quelconques formeront un .??. au nombre de $C_6^5 = 6$. On voit que quand on multiplie le nombre de dimensions, le vocabulaire doit se multiplier de la même façon. Donnons alors les définitions suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{sommet} & = 0\text{-face} \\ \text{arête} & = 1\text{-face} \\ \text{face} & = 2\text{-face} \\ \text{cellule} & = 3\text{-face} \\ \dots\dots & = 4\text{-face} \end{array}\right\}$$

Le nombre indique la dimension de l'objet (2 pour le plan, 3 pour l'espace, c'est-à-dire un volume, etc...).

Le raisonnement fait sur le 5-simplexe se généralise sans peine au n-simplexe et on montre que celui-ci possède C_{n+1}^{p+1} p-faces.

En appliquant plusieurs fois de suite le théorème de Pythagore, on peut évaluer l'hyper-volume (c'est-à-dire l'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ de l'aire pour le plan ou du volume pour l'espace) du n-simplexe régulier. On trouve :

$$\frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$$ si la longueur de l'arête vaut a.

§ 4. RETOUR AU N-CUBE

Profitant de la mise en place d'un vocabulaire adéquat, nous allons compter le nombre de p-faces d'un n-cube. Cela est relativement facile si on fait le calcul par récurrence sur n. A chaque étape, nous l'avons vu, on dédouble le (n-1)-cube précédent et on joint les sommets homologues. Le nombre de sommets, c'est-à-dire de 0-faces, est donc tout simplement 2^n.

Pour les arêtes, on trouve deux fois celles de l'étape précédente (deux fois celles du (n-1)-cube qui a été dédoublé) plus les arêtes joignant les sommets homologues (il y en a autant que de sommets du (n-1)-cube). Commençons donc à remplir le tableau de la figure 10 où l'on donne le nombre de sommets qui, comme nous l'avons vu, est 2^n. La colonne p=1, donne le nombre d'arêtes (de 1-faces). C'est, d'après ce qui précède le double du nombre au dessus augmenté du nombre au dessus à gauche (deux fois le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets du (n-1)-cube).

	n \ p	0	1	2	3	4	5
	1	2	(1)				
	2	4	4	(1)			
	3	8	12	6	(1)		
	4	16	32	24	8	(1)	
5-cube →	5	32	80	80	40	10	(1)
	6	64	192	240	160	60	12

Fig. 10

Pour trouver le nombre de faces (de 2-faces), le processus est le même. En effet, une 2-face d'un n-cube est soit l'une des 2-faces du (n-1)-cube dédoublé, soit est formée par deux arêtes parallèles homologues de chacun des (n-1)-cube (fig. 11).

Le raisonnement se généralise (sans peine pour ceux qui m'ont suivi jusqu'ici !!). Chaque terme du tableau, notons-le N_n^p, vérifie la relation :

$$N_n^p = 2\,N_{n-1}^p + N_{n-1}^{p-1}$$

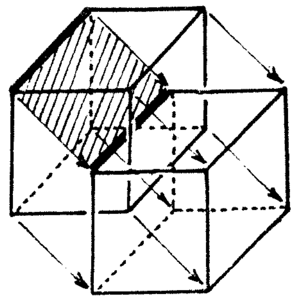


Fig. 11

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$N_n^p = 2^{n-p}\,C_n^p\,.$$

Sur la diagonale du tableau apparaissent les nombres pairs successifs. Ils répondent à la règle précédente si on imagine juste au-dessus d'eux un "1". Ceci est assez logique dans la mesure où un n-cube formera l'une des n-faces du (n+1)-cube de la dimension supérieure. Toutes les autres cases vides peuvent être complétées par des zéros.

§ 5. LA FORMULE D'EULER-POINCARE

Tout le monde connaît la formule d'Euler pour les polyèdres : nombre de sommets - nombre d'arêtes + nombre de faces = 2. Présentée comme ceci, cette formule est fausse (on exhibe facilement des polyèdres à trous qui ne satisfont pas à cette formule). Mais elle est valable pour une grande classe de polyèdres (*). Essayons de la généraliser ; nous écrirons :

Nombre de 0-faces - Nombre de 1-faces + Nombre de 2-faces - Nombre de 3-faces +...

en alternant les signes (+ devant un (2p)-face ; - devant un (2p+1)-face). Appliquons cela aux n-cubes : on trouve pour chaque ligne 0 ou 2. 0 si n est pair, 2 si n est impair. Ce que l'on peut écrire : $1 + (-1)^{n+1}$ dans tous les cas. Dans le cas du n-cube on peut faire la démonstration directement. Mais nous allons en donner une démonstration heuristique qui a le mérite de se généraliser à une figure quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Remarquons que cette formule est immédiate pour les simplexes ; en effet :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, C_n^p = (1-1)^n = 0$$

donc :

$$1 + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p\, C_n^p + (-1)^n = 0$$

soit :

$$-\sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p\, C_n^p = (-1)^n + 1$$

et par suite, en remplaçant n par n+1 et p par p+1, il vient :

(*) Par exemple, mais ce n'est pas nécessaire, les polyèdres convexes.

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \; C_{n+1}^{p+1} = 1 + (-1)^{n+1}$$

Ce qui est bien la formule annoncée puisque C_{n+1}^{p+1} est le nombre de p-faces du n-simplexe.

Maintenant, on sait qu'un polygône peut être obtenu par juxtaposition de triangles, un polyèdre par juxtaposition de tétraèdres et plus généralement un... polytope (c'est le terme consacré) résultera de l'assemblage de n-simplexes.

Quand on assemble deux triangles le long de l'un de leurs côtés, le côté commun et deux sommets coïncident. Sur le total du nombre de sommets et du nombre de côtés des deux triangles il faut supprimer deux côtés et deux sommets (Fig. 12). Ajouter de la même manière un triangle à un polygône revient à ajouter un sommet et un côté.

Quand on assemble deux tétraèdres le long d'une face commune, on doit supprimer cette face commune et il y a coïncidence de trois arêtes et de trois sommets.

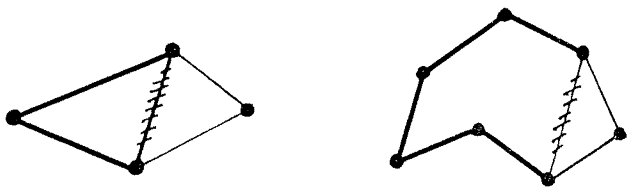


Fig. 12

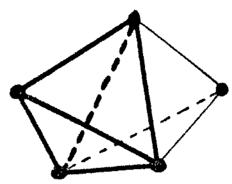


Fig. 13

Sur le total du nombre de sommets, d'arêtes et de faces des deux tétraèdres, il faut supprimer 3 sommets, 3 arêtes et deux faces (Fig. 13). Cela revient à ajouter seulement 1 sommet (au lieu de 4), 3 arêtes (au lieu de 6), et 2 faces (au lieu de 4). La relation d'Euler n'a pas changé puisqu'il faut ajouter 1-3+2 = 0 au premier membre.

Passons en dimension 4. Si nous accolons deux 4-simplexes le long d'un tétraèdre commun (formant une de leurs 3-faces ou cellules), il faudra supprimer cette cellule commune. Il y aura alors coïncidence des sommets, arêtes et faces de ce tétraèdre. Sur le total des sommets, arêtes, faces et cellules, il faudra ôter 4 sommets, 6 arêtes, 4 faces et 2 cellules (celle qui est commune aux deux tétraèdres, et qui est comptée une fois pour chacun d'eux, donc deux fois en tout). Cela revient à ajouter seulement 5-4 = 1 sommet, $C_5^2 - C_4^2 = C_4^1 = 4$ arêtes, $C_5^3 - C_4^3 = C_4^2 = 6$ faces, et enfin $C_5^4 - 2 = 3$ cellules. La relation d'Euler n'a pas changé puisqu'il faut ajouter $1 - 4 + 6 - 3 = 0$ au premier membre.

La généralisation à une dimension quelconque ne pose plus de difficulté . Je rappelle seulement au lecteur qu'il ne s'agit pas d'une démonstration mais d'une argumentation heuristique. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que le polyèdre auquel on ajoute successivement des tétraèdres peut avoir une forme telle que le nouveau tétraèdre entre en contact par deux ou trois faces. Il faudrait donc étudier à chaque fois ces nouveaux cas qui se multiplient avec la dimension.

§ 6. POLYTOPES REGULIERS

On sait qu'il y a une infinité de polygônes réguliers, mais seulement 5 polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, l'octaèdre régulier, le cube, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier (bien qu'on puisse augmenter ce nombre en construisant des polyèdres non convexes - il y a 4 étoilés réguliers - ou seulement semi-réguliers). Que se passe-t-il en dimension supérieure ? On trouve exactement six polytopes réguliers en dimension 4. En voici la liste (Fig. 14) :

sommets	5	16	8	24	120	600
arêtes	10	32	24	96	720	1200
faces	10	24	32	96	1200	720
cellules	5	8	16	24	600	120
	A	B	C	D	E	F

Fig. 14

A est le 4-simplexe et B est le 4-cube. On peut ajouter à cette liste 10 polytopes étoilés à 4 dimensions.

Mais dès que l'on passe en dimension 5 ou plus, il n'y a plus que 3 polytopes réguliers (correspondant à A, B et C) qui sont le n-simplexe, le n-cube et son dual,équivalent de l'octaèdre. Précisons un peu ce qu'on entend par dualité : pour un polyèdre, on prend le centre de chaque face et on le joint au centre des faces contiguës. Le polyèdre ainsi obtenu a autant de sommets que le précédent avait de faces et les arêtes des deux polyèdres sont en nombre égal. On dit alors que les deux polyèdres sont duaux l'un de l'autre : le tétraèdre est son propre dual, le cube et l'octaèdre sont duaux l'un de l'autre ainsi, par ailleurs, que le dodécaèdre et l'icosaèdre. Pour un polytope régulier de dimension n, on prend le centre de gravité de chacune des (n-1)-faces et on le joint au centre de gravité des (n-1)-faces contiguës. On obtient ainsi un nouveau polytope qui a un nombre de sommets égal au nombre des (n-1)-faces du premier polytope et on voit sans trop de peine (!?) que son nombre d'arêtes (de 1-faces) est égale au nombre de (n-2)-faces du premier, son nombre de 2-faces à celui de (n-3)-faces du premier, etc... Ces deux polytopes sont dit duaux l'un de l'autre. En dimension 4, B et C sont duaux ainsi que E et F ; A et D sont leur propre dual.

On sait que le dual du cube est l'octaèdre. En dimension n, le dual du n-cube est un polytope dont les coordonnées des sommets sont très simples puisqu'il s'agit des points dont une seule coordonnée vaut $\pm$ a et toutes les autres 0. (Ce sont les points d'intersections des axes avec l'hypersphère (*) de rayon a). En voilà le dessin en dimension 4 (Fig. 15). Chaque sommet est joint à tous ceux qui ne sont pas diamétralement opposés. Les cellules de ce polytope sont des octaèdres dont l'un est mis en évidence sur le dessin. On peut facilement calculer l'hypervolume de ce type de polytope et on trouve :

$$\frac{(2\,a)^n}{n!}$$

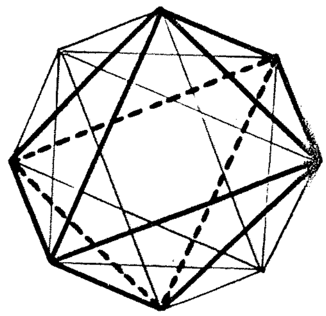


Fig. 15

§ 7. CA TOURNE ROND

On a parlé l'une ou l'autre fois d'hypersphère. Le lecteur aura compris ce dont il s'agit sans que j'aie besoin de lui faire un dessin fort peu utile en l'occurence car les projections d'une sphère ou d'une hypersphère sur le plan sont des cercles et si la projection est oblique on verra une ellipse ce qui n'avance pas beaucoup dans la compréhension du problème.

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sont les n coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, l'équation de l'hypersphère centrée à l'origine et de rayon R est :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2.$$

On peut calculer l'hypervolume de cette hypersphère et même l'hypersurface, l'hyperpérimètre,... en descendant d'une dimension à chaque étape. Contentons-nous des deux premières mesures. Un calcul pas trop difficile pour ceux qui savent utiliser les intégrales multiples conduit à :

$$\left.\begin{aligned} V_{2p} &= \frac{2^p \;\pi^p\; 1.3.5.\;\ldots\;(2p-1)}{2.4.6.\;\ldots\;5(2p)}\; R^{2p} \\ V_{2p+1} &= \frac{2^{p+1}\;.\;\pi^p}{1.3.5.\;\ldots\;(2p+1)}\; R^{2p+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour l'hypervolume ;}$$

$$S_n = n\;.\;V_n\;.\;(1/R) \qquad \text{pour l'hypersurface.}$$

On peut facilement inscrire une hypersphère de rayon R dans un hypercube d'arête 2R. Le rapport des volumes, des hypervolumes plus exactement, de l'hypersphère à l'hyper-

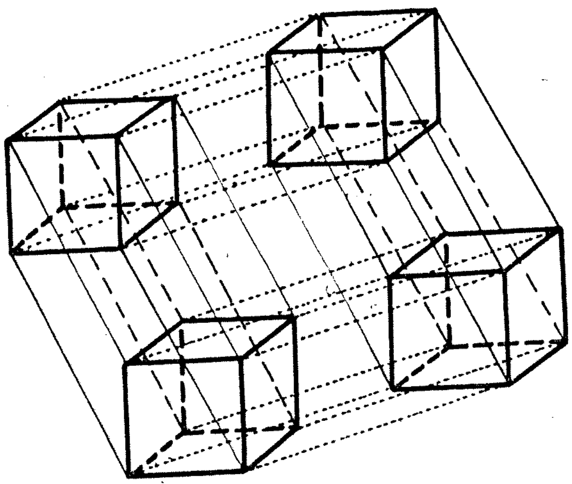
(*) Le lecteur aura compris que le préfixe "hyper" signifie seulement qu'on se trouve en dimension supérieure à 3.

cube tend vers 0 quand le nombre de la dimension augmente. Ceci peut s'expliquer par le fait que le nombre de sommets de l'hypercube augmentant avec la dimension, il faut raboter d'autant plus de coins pour tailler une hypersphère à partir de l'hypercube. Il ne reste finalement pas beaucoup de matière !

§ 8. QUELQUES FIGURES OUBLIEES

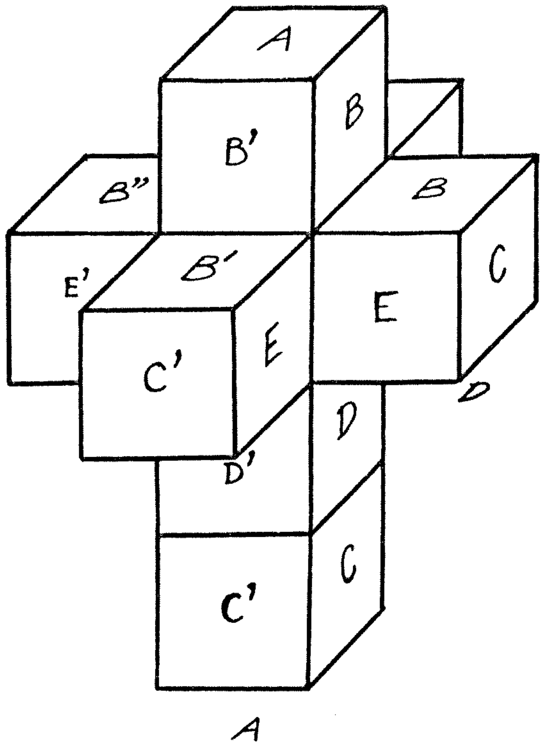
On ne peut pas continuer indéfiniment un article sur la quatrième dimension. Seulement, nombreux sont les points qu'on laisse ainsi dans l'ombre, points facilement abordables à ce niveau : les analogues des cylindres ; les développements des polytopes ; les pavages... Tous sujets qui mènent à la réalisation de magnifiques figures mais pas toujours très lisibles. Qu'on songe aux polytopes réguliers à 600 sommets ou à 720 arêtes ! Je ne donne donc ici que trois figures supplémentaires :

Fig. 16



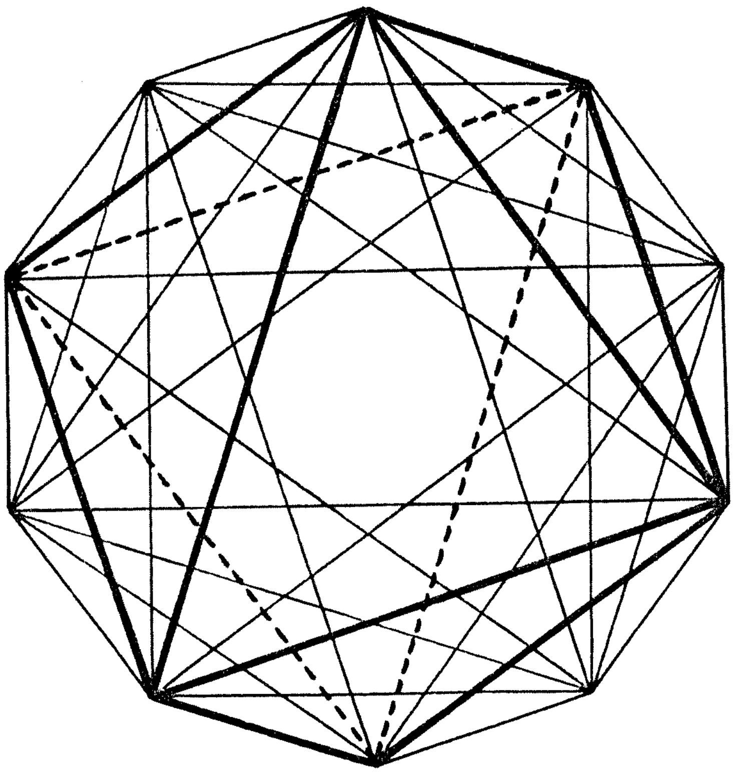
Projection plane d'un 5-cube où l'on a privilégié la lecture des arêtes au détriment de la justesse de la projection. De tels schémas interviennent dans les architectures d'ordinateurs.

Fig. 17



Projection sur le plan du développement dans R^3 d'un 4-cube. Les faces correspondantes sont affectées de la même lettre. On pourra comparer avec le développement plan d'un cube (Fig. 3).

Fig. 18



Projection plane du dual du 5-cube. Honnêtement, on commence à ne plus voir grand chose !