PRETENDUES ASYMPTOTES ET VRAIES EQUATIONS

Une enquête dans la Géométrie de Pascal

par Eric CHANEY

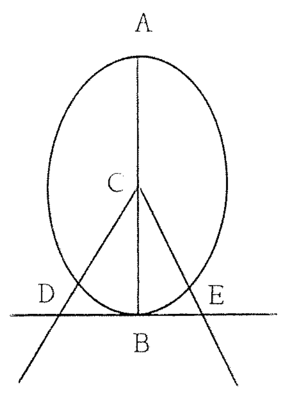
PASCAL A-T-IL TROUVE LES ASYMPTOTES DE L'ELLIPSE ?

L'indice qui sert d'amorce à l'enquête est un passage d'une lettre datée du 20 mai 1656, signée par Carcavy, et destinée à Huygens :

> "Monsieur Pascal ayant aussi donné les asymptotes de l'Ellipse, du cercle et de la parabole..."

Diable ! Pascal et ses contemporains avaient-ils déjà l'audace d'introduire les droites imaginaires dans le plan ? Si une telle hypothèse s'avérait, une petite bombe serait lâchée dans l'histoire des sciences : les nombres imaginaires circulaient sous le manteau à la fin du XVIe, on parlait sans complexes d'éventuels points imaginaires au XVIIIe, mais c'est avec Monge, et surtout Poncelet que les éléments isotropes, droites en particulier, font leur entrée sur scène.

Un mois plus tard, Carcavy reprend la plume à l'adresse de son collègue hollandais, et évite ainsi à l'enquêteur moderne de tomber dans le ridicule de l'hypothèse précédente :



> "... c'est aussi lui [Pascal] qui a remarqué les deux lignes qui ont les mêmes propriétés dans le cercle et dans l'Ellipse que les asymptotes dans l'hyperbole, dont la construction est toute semblable.
> Car soit l'Ellipse AEB, dont le diamètre soit ACB, et soit menée la touchante DBE, coupée en D et en E, en sorte que le rectangle DBE soit égal au quart de la figure, ayant mené les lignes CD, CE, du centre C, elles auront les mêmes propriétés dans ces deux sections que les asymptotes dans l'hyperbole."

Mieux qu'un mégot retrouvé sur les lieux du crime, le dessin qui illustre ce texte va fournir une piste sûre, sous réserve d'un décodage rigoureux :

. "touchante" se traduit sans difficulté,

. "rectangle" peut faire trébucher l'enquêteur inexpérimenté, surtout devant trois points alignés. Il ne s'agit pas d'un rectangle géométrique, mais du produit de deux nombres positifs non nécessairement égaux. En l'occurence, le produit DB . BE.

. "figure" est plus redoutable encore. Son emploi remonte à Apollonius de Perge (225 A.C.). Pour une conique à centre le terme désigne le couple formé d'une part par la longueur du diamètre focal, d'autre part par le "côté droit", ou "paramètre", c'est-à-dire la longueur de la corde passant par l'un des foyers, et perpendiculaire à l'axe focal (fig. 1). "Rectangle de la figure", ou par abréviation "figure", désigne alors le produit de ces deux longueurs. Le terme paramètre est encore parfois utilisé de nos jours, désignant la demi-longueur de la corde.

La partie constructive de la lettre de Carcavy s'interprète alors ainsi :

On mène deux rayons depuis le centre d'une ellipse, qui coupent la tangente perpendiculaire à l'axe focal AB en D et E, de façon que :

$$DB \cdot BE = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot 2p \quad \text{(2p désigne le "côté droit")}$$

Alors la même construction, opérée sur une hyperbole, fournit les asymptotes (fig. 1 et 2).

Pour que l'analogie ait un sens, il faut que les rayons soient symétriques par rapport à l'axe focal. Autrement dit que :

$$DB = BE$$

Les constructions étant éclaircies, il faut en venir au coeur de l'affaire : Pascal aurait affirmé que les droites CD et CE ont les "mêmes propriétés" pour l'ellipse et l'hyperbole. Il faut donc pousser la recherche dans son oeuvre géométrique. A propos des coniques, celle-ci consiste en :

* Un "Essai sur les coniques", rédigé à l'âge de seize ans, édité en 1640, qui valut à son auteur une précoce célébrité et l'inimitié de Descartes. Il comporte un joyau : la propriété des hexagones inscrit dans une "section conique propre", quelle que soit celle-ci.

Fig. 1

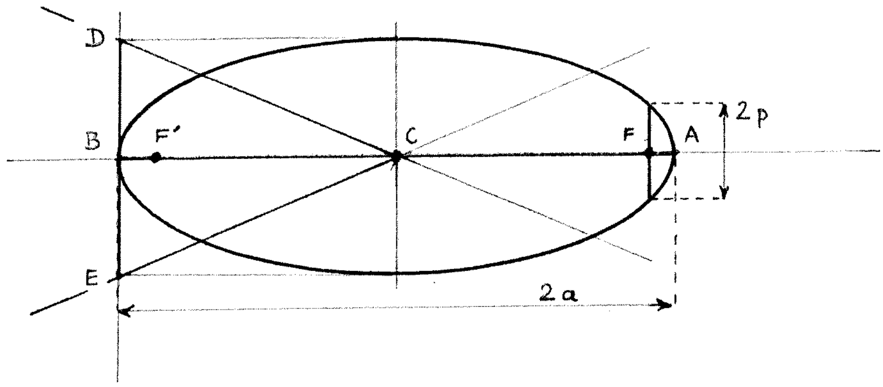


Fig. 2

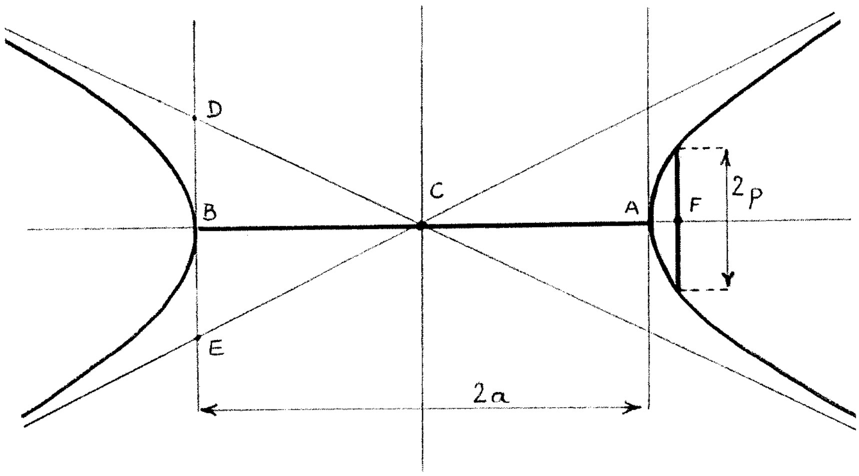
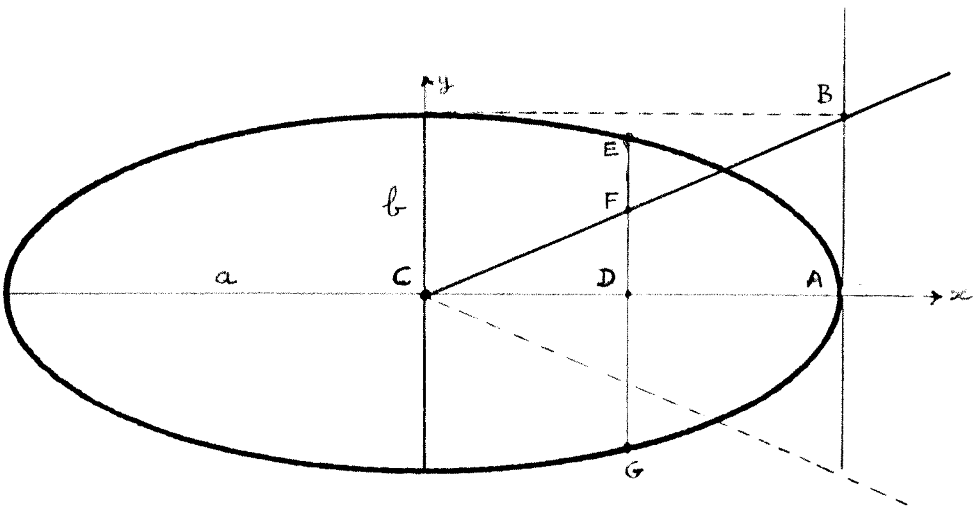


Fig. 3



* Plusieurs "Traités des coniques", bien plus substantiels, et qui ne nous sont pas parvenus. Une lettre de Leibniz, en donne le contenu, et le traité sur "la génération des sections coniques" nous est connu par la copie qu' en fit faire l'inventeur du triangle harmonique.

L'essai de jeunesse fournit une suite sérieuse à la piste suivie depuis Carcavy. On y lit en effet :

"... si, dans le plan de l'hyperbole ou de l'ellipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mène la droite AB, touchante au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre CA, on prenne la droite AB dont le carré soit égal au quart du rectangle de la figure, et qu'on mène CB, alors, quelque droite qu'on mène, comme DE, parallèle à la droite AB, coupante la section en E, et les droites AC, CB, les points D, F, si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB ; et dans l'hyperbole, la différence des mêmes carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB."

On retrouve le "quart du rectangle de la figure", et si l'on veut bien remplacer le produit DB . BE de Carcavy par AB^2 (notation de Pascal), la droite CB n'est autre que "l'asymptote" de l'ellipse selon Carcavy.

CHERCHER DERRIERE L'ASYMPTOTE

Une difficulté de taille subsiste : il n'est nulle part question d'asymptote chez Pascal. La piste serait-elle un "holsweg" ?

Un parallèle est pourtant établi dans le texte de Pascal, entre ellipse et hyperbole :

$DE^2 + DF^2 = AB^2$ pour l'ellipse

$DE^2 - DF^2 = AB^2$ pour l'hyperbole.

Que signifieraient ces relations, valables pour un point E quelconque de la conique, si on étudiait celle-ci dans un repère constitué des diamètres principaux, le demi-diamètre focal valant a, et l'autre b ? (Fig. 3).

Le "rectangle de la figure" s'évalue ainsi :

$$AA' \,.\, 2p = 2a \,.\, 2\frac{b^2}{a} = 4b^2$$

D'où :

$$AB^2 = \frac{1}{4}(AA' \,.\, 2p) \Longleftrightarrow AB = b.$$

La droite CB a donc pour équation $y = \frac{b}{a} x$

Si E, point courant de l'ellipse a pour coordonnées (x,y), on obtient :

$$DE^2 = y^2 \quad \text{et} \quad DF^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$$

D'où :

$$\boxed{DE^2 + DF^2 = AB^2 \Longleftrightarrow y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

L'enquête méritait d'être menée !

Car si l'on n'a pas aperçu la queue d'une asymptote, on vient de constater que, grâce à la droite auxiliaire CB, Pascal a établi (le premier semble-t-il) les équations générales de l'ellipse et de l'hyperbole.

Une morale et deux remarques concluront cette petite enquête :

Morale : Celà vaut la peine de chercher, au risque de trouver autre chose que le but escompté.

Remarque 1 : Une idée communément reçue estici bien mise à mal : à l'époque de Descartes, et après la publication de son traité de géométrie (1637), l'usage de "coordonnées cartésiennes" n'a aucun sens : c'est dans le plus orthodoxe style d'Apollonius que Pascal donne l'équation de l'ellipse.

Remarque 2 : Au facteur imaginaire i près, la droite CB est bien une asymptote de l'ellipse, et certaines propriétés de cette droite (et du diamètre conjugué) évoquent des propriétés des asymptotes de l'hyperbole. Mais en l'absence de tout texte de Pascal, il n'est pas possible d'en dire plus sur ce que cet esprit subtil et tourmenté entendait éventuellement par "asymptote" de l'ellipse.

Bibliographie

. Pascal	Oeuvres complètes. Ed. de la Pléïade
. Kokiti Hara	L'oeuvre mathématique de Pascal Osaka University. Vol. XXI Mars 1981
. Georges Glaeser	Cours de 3e cycle. Chap. V (nouvelle version, à paraître)