DÉBAT

DE LA SIGNIFICATION MATHEMATIQUE D'HYPOTHESES EN PHYSIQUE, ET RECIPROQUEMENT, VOIRE AU DELA...

M. Olivier GEBUHRER, du Département de Mathématiques de l'U.L.P. nous a transmis les remarques qui suivent, à propos de l'article de C. COMTE intitulé "Leibnitz aurait-il pu découvrir la relativité ?", paru dans les OUVERT n° 36 et 37.

Le sectarisme, et ses jugements sans appels, parfois constatés chez les mathématiciens comme chez les physiciens, conduit à se féliciter de la qualité du débat suscité par l'article en question. Il n'existe pas de point de vue unifié - c'est heureux ! - pas plus d'un côté que de l'autre, mais cela n'exclut pas la discussion.

Les articles de C. Comte illustrent de façon particulièrement saisissante à quel point la relativité galiléenne et la relativité einsteinienne font partie d'un **même** ensemble d'idées * : il est impossible de réfléchir aux fondements de l'une d'elles sans opérer une réflexion de **même** nature sur l'autre. L'objet des remarques qui suivent a seulement pour but de poursuivre la réflexion (de façon très modeste) au plan **de la conceptualisation mathématique** (je ne saurais trop insister sur le fait qu'il ne sera pas question ici de technique mathématique). A l'issue de ces remarques, je me permettrai de relever quelques questions d'ordre philosophique (sans les développer) abordées de façon explicite par C. Comte.

---

* Voir par exemple à ce sujet : L. LANDAU et E. LIFSHITZ (T. 1 et T. 2) Editions du Progrès - Moscou

§ 1. INTÉGRABILITÉ LOCALE ET MESURABILITÉ

C. Comte exige dans ses axiomes définissant l'énergie cinétique (ou ses propriétés) :

1) L'énergie cinétique **e** d'un corps libre ne dépend que du **module de sa vitesse.**

2) "Pour une distribution de masse en fonction de la vitesse donnée par $dm = c(\vec{x})d^3x$ cette expression devient

(4) $$\iiint c(\vec{x})\, e(x)\, d^3x$$

et nous admettons que l'intégrale écrite a un sens quelle que soit la distribution $c(\vec{x})$, sous réserve que $\iiint c(\vec{x})\, d^3x$ converge. **Cela revient à admettre que la fonction e(x) est intégrable."**

Il s'agit en fait ici d'exiger **beaucoup moins** : C. Comte demande seulement à la fonction e **d'être intégrable** sur **tout compact** de $\mathbb{R}^3$ (ce qu'on peut encore affaiblir) ; mais l'important à mes yeux réside dans le fait, qu'avant d'exiger que certaines intégrales convergent, il faut pouvoir parler de la possibilité de les intégrer : autrement dit, il faut postuler **la mesurabilité** de la fonction e. **C'est là l'hypothèse mathématique.** Avant d'en donner une interprétation heuristique, disons d'emblée que toute tentative de PROUVER une telle propriété de la fonction **e**, à partir des considérations physiques exigées par les principes d'invariance est VAINE. Mais comme le dit très justement C. Comte, le fait remarquable est que la régularité de la fonction **e** est le sous produit
1) **de sa mesurabilité**
2) **de ses propriétés fonctionnelles** **déduites des principes d'invariance.** Cela ne démontre pas la perfection de la nature mais illustre l'acuité des outils conceptuels en notre possession pour accéder à des représentations non chétives du monde.
Il ne faut pas imaginer qu'il s'agit là de "raffinements mathématiques" inaccessibles au commun des mortels ; l'introduction du **concept** de mesurabilité des fonctions fut l'occasion d'un bouleversement d'idées en mathématiques aussi profond et radical que le fut en physique la relativité einsteinienne. D'ailleurs **ces mutations dans la pensée** sont contemporaines (début du XXe siècle).

Sans développer (on y reviendra peut-être ultérieurement) indiquons d'emblée un beau sujet de méditation : Quoi de plus "naturel" que la longueur d'un segment ? Comment ne pas demander à la mesure de la longueur l définie par exemple sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (ensemble des parties de $\mathbb{R}$) de réaliser la propriété "évidente" :
$l(A_1) + l(A_2) = l(A_1 \cup A_2)$ pour deux parties disjointes A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$?
Le "bon sens élémentaire" indique ainsi que l'égalité $l(A \cap B) + l(A \cap \complement B) = l(A)$ pour **toute** partie B de $\mathbb{R}$, sera vraie pour **toute** partie A de $\mathbb{R}$. Qu'il n'en soit

non seulement rien, mais qu'en outre, le **nombre** des parties A de ℝ qui sont **trop complexes pour vérifier cette propriété, soit incommensurablement plus grand que celui des parties qui la possèdent**, devrait permettre de réaliser qu'il s'agit bien ici **des fondements** conceptuels et non de "complications ésotériques dépourvues d'intérêt".

Puisqu'il est VAIN d'espérer prouver la mesurabilité des fonctions utilisées à partir des autres propriétés et encore plus VAIN d'espérer le faire à partir de considérations physiques, faut-il se résoudre à ce que les mathématiques introduisent le mystère dans le compréhensible ? Il en est pour le penser. Je crois pour ma part, qu'il n'est pas ridicule de chercher à interprêter cette hypothèse (en évitant les stupidités du style : "Un physicien ignore les fonctions non mesurables").

Voici mon point de vue :
L'hypothèse de mesurabilité des fonctions est un **reflet** de l'idée naturelle selon laquelle **un corps non quantique** (certains diraient macroscopique mais ce serait plus qu'un abus de langage) se voit attribuer des grandeurs non quantiques observables **qui sont le "produit" de découpages hyperfins** (donc de passages à la limite) dont le degré de finesse et le nombre d'opérations des découpages sont limités seulement par le "seuil" de la physique **non quantique**. Autrement dit, les grandeurs observables de la physique non quantique résultent des attributs "des parties constitutives" pour autant que l'on s'interdise des interactions quantiques. **Il ne s'agit pas non plus de raffinements des découpages de Riemann** ; le changement de point de vue est profond et n'est pas réductible à point de vue antérieur, même en première approximation. (Il faut mettre un certain nombre de termites à l'oeuvre sur une table en chêne avant "d'observer" la "nature" ondulatoire de la table ; quand on observe la dite"nature ondulatoire" de la "table", il est déconseillé d'inviter ses amis pour y déguster une fondue).

Autrement dit, la mesurabilité des fonctions utilisées reflète (mais ne prouve évidemment rien) la conformité et la COHERENCE interne de la physique non quantique : une mesure effectuée sur un corps non quantique ne perturbe pas se nature de corps non quantique (en revanche, elle ne révèle pas sa structure).

§ 2. RÉGULARITÉ DES FONCTIONS

C. Comte note très justement qu'en réduisant "a minima" les hypothèses mathématiques, **on peut déduire** les autres propriétés et tout particulièrement celles qui intéressent les physiciens, autrement dit la différentiabilité. Incidemment cela amènerait de nouveaux développements à propos **des distributions** et des relations entre solutions faibles et fortes des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Mais dans le cas qui nous occupe, je voudrais souligner que la régularité des fonctions introduites n'est pas le fait du "hasard" : c'est un phénomène profond et général. Le couple "mesurabilité - équation fonctionnelle" suffit à entraîner la continuité et la différentiabilité dans une très vaste gamme de situations. Commençons par l'exemple qui sert de prototype.

Considérons un **caractère mesurable** de $\mathbb{R}$. C'est une fonction mesurable χ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ telle que

$$\chi(s+t) = \chi(s) \,.\, \chi(t),$$

la fonction χ est alors **nécessairement** de la forme

$$t \longmapsto \exp(it) \;!$$

De plus, **si on enlève la mesurabilité**, on peut trouver des fonctions $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\Psi(s+t) = \Psi(s) \,.\, \Psi(t)$ et qui **ne sont bornées** sur aucun intervalle non réduit à un point !

(Il n'est hélas pas question de montrer au public de pareils Gremlins... ; des énoncés tels que : on prend une base quelconque de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel... sont bien sûr des mystifications.)

Cette situation est en fait celle que l'on rencontre de façon générique dans l'étude des **caractères des algèbres de Banach commutatives** où la mesurabilité des caractères implique leur continuité. Plus particulièrement, dans les paires de Gel'fand, la mesurabilité des caractères implique alors leur continuité et leur C^{∞} différentiabilité.

L'exemple traité par C. Comte entre dans ce cadre et il est intéressant de noter qu'il induit des idées réciproques : (déjà investiguées) "toute" équation fonctionnelle doit s'interpréter comme représentant la manifestation d'un caractère d'une algèbre de Banach commutative convenable (donc moralement d'une sorte de groupe). Notons qu'en outre, C. Comte pourrait exhiber à la fois des caractères (si on autorisait γ^2 à être **imaginaire**) (donc des fonctions **bornées** comme tout caractère) et des "exponentielles" **non bornées**, qui ne sont pas des caractères mais qui, sont encore des fonctions de type positif (en un certain sens). Ces solutions non bornées, sont cependant **bornées sur tout intervalle borné**. Cela indique que l'on ne pourra se passer d'une hypothèse supplémentaire :

L'existence **d'une** fonction C, à support compact, $\geqslant 0$, mesurable, bornée, d'intégrale > 0, telle que :

$$0 < \int_{\mathbb{R}^3} C(\vec{X}).e(\vec{X}).d^3X < +\infty$$

qui élimine - non pas les gremlins (déjà éliminés par la mesurabilité), mais les solutions triviales (absurdes physiquement)

$$e \equiv 0 \text{ ou } e \equiv +\infty$$

§ 3. LES HYPOTHÈSES D'ISOTROPIE DE L'ESPACE ET D'UNIFORMITÉ DU TEMPS

1) Admettre que la fonction e ne dépend que du module de la vitesse et **s'autoriser la convolution** n'est-ce pas admettre l'isotropie... de l'espace des vitesses ? Et si l'espace des vitesses est isotrope, on ne peut pas raisonnablement supposer que l'espace des coordonnées ne l'est pas...,j'ajoute que l'on peut très bien admettre l'idée d'isotropie **locale**: une particule n'est pas **"libre"** mais éloignée éventuellement de tout champ.

2) Il n'y a pas de différence mathématique entre le paramètre rapidité et **le temps propre** d'une particule libre. C. Comte suggère un moyen physique d'accéder à la MESURE de la rapidité mais ne s'agit-il pas plutôt d'une **expérience mentale** ? ; l'analogie entre la "rapidité" et le temps propre serait alors plus profonde ; il est en effet impossible d'accéder par observation au référentiel d'inertie **lié** à la particule, donc on ne peut synchroniser les horloges entre l'observateur et la particule mais on a parfaitement le droit de se représenter l'horloge du référentiel d'inertie lié à la particule. Alors le temps propre, sans être accessible à la mesure, n'en a pas moins une **existence réelle**. Celà étant, le passage par le temps propre supprime toute idée d'uniformité du temps **mais** au prix de l'inaccessibilité des horloges.

Au terme de ces remarques, je souhaite remercier C. Comte de sa compréhension ainsi que "l'OUVERT" et ajouter à la liste des problèmes précédents plusieurs autres questions :

1) Ne faut-il pas accepter comme une **donnée** l'existence d'une dimension spécifiquement PHILOSOPHIQUE aux questions concernant l'appropriation par nos moyens de connaissance de la structure de l'univers, dimension **non réductible** aux démonstrations mathématiques, quelle que soit par ailleurs leur nécessité ?

2) En particulier, est-il possible de prouver une quelconque connaissance positive concernant l'univers par la seule médiation mathématique ? Quelle est la nature des relations entre connaissance et preuve mathématique ?

Olivier GEBUHRER

Voici la réponse de Claude Comte :

On ne peut qu'approuver la remarque d'Olivier Gebuhrer, selon laquelle la relativité galiléenne et la relativité einsteinienne relèvent d'un même ensemble d'idées ; leur pleine compréhension exige en effet que l'on considère dans toute son ampleur le rôle que jouent les **principes de symétrie en physique** *. La prise de conscience du rôle de premier plan que jouent ces principes a nécessité une longue maturation dans l'histoire des sciences. Jusqu'au début de ce siècle, on ne s'est intéressé qu'à la recherche du groupe d'invariance d'un ensemble de lois de la physique supposées bien établies : ainsi, les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes par la transformation de Galilée, tandis que les équations de Maxwell du champ électromagnétique sont invariantes par la transformation de Lorentz-Poincaré. L'étude réciproque qui consiste à rechercher la forme des lois compatibles avec des principes de symétrie, est plus récente.

Einstein, dans l'article de 1905 intitulé "Sur l'electrodynamique des corps en mouvement" utilise explicitement le principe d'équivalence des référentiels galiléens (appelé également "principe de relativité"), pour trouver la forme des lois de transformation des coordonnées d'espace-temps d'un référentiel galiléen à un autre ; pour cela, il utilise en plus le principe d'invariance de la vitesse de la lumière.

A propos des lois de conservation en mécanique, Emmy Noether (mathématicienne allemande, 1882-1935, fille du mathématicien Max Noether ; elle avait donné en 1907 un thèse importante sur les invariants algébriques) établit un théorème qui stipule ceci : à toute transformation qui laisse invariante l'action lagrangienne ou les équations d'Hamilton, correspond une quantité qui est une constante du mouvement ; l'invariance sous un groupe de Lie à n dimensions entraîne n lois de conser-

---

* Pour une vue d'ensemble, on pourra lire :
Michel Paty, Symétries et groupes de transformation dans les théories contemporaines de la matière : jalons épistémologiques (Cahiers du Centre de Recherches Nucléaires de Strasbourg : CRN/HE 84-12).

vation : ainsi l'invariance par translation spatiale entraîne la conservation de la quantité de mouvement p, et l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie E. Ce théorème est actuellement d'une importance capitale en physique théorique, tant par son application à la mécanique quantique qu'à la théorie quantique des champs et aux théories d'invariance de jauge **. Il permet également de présenter la théorie de la mécanique avec le plus d'unité et de simplicité, comme le font L. Landau et E. Lifshitz, dans leur célèbre cours de physique théorique dont on ne saurait trop conseiller la lecture.

Cependant, les travaux ci-dessus font appel à d'autres principes que les seuls principes de symétrie : le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans l'article d'Einstein, et le principe de moindre action de Maupertuis - Euler - Lagrange - Hamilton dans l'énoncé du théorème de Noether. La question surgit de savoir si ces principes supplémentaires sont vraiment indispensables : **les principes de symétrie n'auraient-ils pas une portée encore plus grande** ? Une telle question n'est pas académique : si nos théories se trouvaient un jour prises en défaut, on aurait évidemment tort d'incriminer des principes superflus. Il est crucial de poursuivre l'objectif de ramener les théories existantes au **minimum de principes**, en ajoutant, d'un point de vue de physicien, que ces principes doivent être contrôlables expérimentalement.

Il est aujourd'hui bien établi que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière n'est pas indispensable pour fonder la théorie de la relativité : cela a été vu dès 1911 par Ignatowski et Rothe. En ce qui concerne la mécanique, le principe de moindre action fournit à ce jour le maximum de cohérence ; son efficacité le fait régner sans partage sur la théorie de la mécanique constituée en un corps de doctrine autour de lui. Cependant, cette efficacité semble bien redoutable d'un point de vue de physicien, car il n'est pas susceptible d'une vérification expérimentale directe. Dans mon travail, j'ai délibérément pris le parti de m'en passer. Lorsqu'il s'est agi d'établir l'expression de la vitesse en fonction de l'énergie et de l'impulsion, j'aurais pu aveuglément utiliser la première équation d'Hamilton $V = \frac{\partial E}{\partial p}$, qui aurait immédiatement fourni le résultat $V = \mathrm{th}\chi$ (à partir de $E = \mathrm{ch}\chi$ et $p = \mathrm{sh}\chi$) ; il était beaucoup plus gratifiant d'établir ce résultat par l'argument que j'ai exposé, qui fait seulement appel à un principe de symétrie : l'isotropie de l'espace ! Le succès de cette tentative laisse présumer que le principe de moindre action n'est pas si indispensable

** J. Leite Lopes, Gauge field theories, an introduction, Pergamon Press qu'il paraît ; encore faut-il parvenir à comprendre autrement l'existence de lois de conservation en mécanique, que par le théorème de Noether, où le principe de moindre action joue le rôle primordial, et les principes de symétrie sont subordonnés à celui-ci.

Je n'ai pas traité ce problème d'existence des lois de conservation dans l'article publié dans l'Ouvert, mais je l'ai abordé d'une manière inédite dans ma thèse de doctorat. Pour résumer, il existe une autre manière de comprendre l'origine de lois de conservation dans un système dont les constituants interagissent, par exemple les molécules d'un gaz qui subissent de multiples collisions élastiques. Pour cela, faisons une étude phénoméno-logique d'une expérience de collision de deux particules : si les vitesses initiales sont fixées en grandeur et en direction, l'issue de la collision sera très variable selon les conditions du choc (selon la valeur du paramètre d'impact), mais l'expérience montre qu'**il existe des restrictions sur les valeurs que peuvent prendre les vitesses de sortie.**

Posons donc simplement comme principe que l'issue de la collision n'est pas ... n'importe quoi ! Ensuite, il n'est pas très difficile de trouver la forme de ces restrictions si l'on impose que les symétries galiléennes soient respectées : elles prennent effectivement la forme de lois de conservation, celle d'une grandeur invariante par rotation, l'énergie, et d'une grandeur vectorielle, l'impulsion ; de plus, on démontre que ces grandeurs s'additionnent, comme je l'ai admis au début de l'article dans l'Ouvert : elles sont de la forme $\sum_i m_i f(x_i)$, et on démontre aussi que les masses m sont **toutes de même signe.**

Ainsi, j'ai pu retrouver les conclusions du théorème de Noether en substitant au principe de moindre action un autre principe beaucoup plus facile à contrôler expérimentalement : tout le monde sait bien que l'état final n'est pas arbitraire ; autrement, on verrait par exemple un corps libre au repos se mettre spontanément en mouvement sans changement de son état interne. On n'a aucune peine à concevoir qu'en dehors du "principe d'existence de restrictions", le monde serait un chaos total, car l'issue de toute interaction serait absolument arbitraire et imprévisible. Il est sans doute préférable de fonder la mécanique sur un "principe d'existence de restrictions", qui ne préjuge nullement de la forme de ces restrictions, et qui, à l'opposé du principe de moindre action, ne présuppose aucun schéma particulier d'organisation de la nature. En effet, au lieu de prétendre que les mouvements des corps ont toujours lieu de telle sorte qu'une certaine quantité - l'action - soit minimale, on pose un principe au contenu beaucoup plus modeste, car il dit seulement ce que le monde n'est pas : le chaos total. Et il est ensuite tout à fait satisfaisant de constater que les lois de la mécanique découlent logiquement des principes de symétrie, dès lors qu'on admet que le monde n'est pas un chaos total.

Ces éclaircissements ne sont sans doute pas inutiles pour donner une perspective des recherches que je poursuis et dont je n'ai publié qu'une partie dans l'Ouvert. Je voudrais faire remarquer également que, dans l'optique de ramener la théorie à un minimum de principes bien contrôlables expérimentalement, j'ai renoncé à postuler la continuité-dérivabilité de l'énergie. Je me suis rendu compte qu'on pouvait exiger beaucoup moins ; en effet, il suffit d'admettre (ce que tout le monde fait sans le dire) que tout système physique est doué d'une certaine énergie ; que l'énergie d'un système est la somme de celles de ses parties (non interagissantes), qui peuvent être infiniment petites, mais que la valeur de l'énergie pour le système entier ne peut dépendre du mode de découpage du système en parties. Je suis reconnaissant à Olivier Gebuhrer d'avoir relevé une certaine imprécision dans les termes mathématiques que j'ai employés pour exprimer mon idée ; lorsque j'ai écrit "cela revient à admettre que la fonction $e(\chi)$ est intégrable", c'est en fait d'intégrabilité locale qu'il s'agissait, ou mieux encore : de **mesurabilité.** Je suis bien d'accord aussi avec lui qu'il est vain d'espérer prouver ce caractère de mesurabilité de l'énergie à partir de considérations physiques ; dans ma thèse de doctorat, j'ai prouvé certaines propriétés de la fonction énergie : l'additivité, le caractère défini positif, mais j'ai admis sa continuité ; depuis ce travail, je suis parvenu à affaiblir l'hypothèse de régularité sur l'énergie : il suffit d'admettre que $e(\chi)$ est une fonction mesurable.

En ce qui concerne la rapidité et le temps propre, je voudrais préciser que ces grandeurs sont de nature physique différente : la rapidité est une grandeur sans dimension (c'est "l'angle" de la transformation de Lorentz) tandis que le temps propre a la dimension ... du temps. On peut établir la relation suivante entre la rapidité , l'accélération γ_0 mesurée dans le référentiel propre du véhicule, et le temps propre τ (le temps indiqué par une horloge à bord du véhicule) :

$$\chi - \chi_0 = \frac{1}{C} \int_0^\tau \gamma_0 \, dt.$$

L'expérience que je propose pour mesurer la rapidité n'est pas plus "mentale" que ne le serait la description d'une horloge. Tout comme la mesure du temps, la mesure de la rapidité requiert la mise en oeuvre d'un mécanisme à répétition : au lieu de compter le nombre de périodes effectuées par un quelconque mécanisme d'horlogerie, on compte le nombre de "ravitaillements en vol" d'une fusée. On peut d'ailleurs remarquer que si la fusée fonctionne de manière identique, elle brûle chaque fois son carburant durant un temps propre fixe τ_0 , subit une accélération moyenne fixe $\overline{\gamma_0}$, dans son référentiel propre et acquiert une rapidité supplémentaire fixe $\Delta \chi = \frac{1}{C} \overline{\gamma_0} \tau$ conformément à la formule précédente. Avec notre fusée, nous disposons donc d'un moyen simple d'étalonner à la fois le temps propre et la rapidité !