
LE VINGT-QUATRIEME PROBLEME DE HILBERT

François APERY

1. JACOB STEINER DÉCOUVRE UNE MITRE À ROME

La théorie des *surfaces fermées* (connexes compactes sans bord) a montré au 19^e siècle qu'il était possible de les classer au sens de l'analysis situs, c'est-à-dire à une transformation bijective bicontinue près, par leur orientabilité et leur genre. Une surface est dite *non orientable* si elle contient un ruban de Möbius (Fig. 1). Quant à son genre, il correspond au nombre maximum de courbes fermées sans point double que l'on peut y découper sans la disconnecter. De telles surfaces peuvent être définies de façon abstraite à partir d'un polygone régulier à un nombre pair de côtés dont on identifie deux à deux les côtés choisis convenablement. Mais historiquement, les surfaces sont d'abord apparues comme des objets géométriques de l'espace \mathbb{R}^3 .

La représentation la plus intuitive est celle obtenue par *plongement dans \mathbb{R}^3* , c'est-à-dire par image continue injective. La surface fermée ainsi plongée n'a alors aucun point d'auto-intersection dans \mathbb{R}^3 . C'est le cas de la sphère, du tore et plus généralement du bretzel à g anses qui représente la surface orientable de genre g (Fig. 2).

Le plan projectif réel est un bon exemple de surface fermée non orientable. Il peut être construit à partir d'un plan affine auquel on adjoint une droite affine (droite à l'infini) et un point. Il est alors aisé de constater que toute droite projective est l'âme d'un ruban de Möbius. L'impossibilité de représenter une surface fermée non orientable comme surface plongée dans \mathbb{R}^3 est montrée par DARBOUX dans son cours sur la théorie des surfaces en 1882. Aussi pour en connaître la géométrie, on a recours à la notion d'*immersion en position générale*. Celle-ci est donnée par une application continuellement différentiable dont la dérivée définit en tout point un plan tangent, telle que les seules auto-intersections permises soient des courbes doubles le long desquelles la surface se recoupe transversalement, et un nombre fini de points

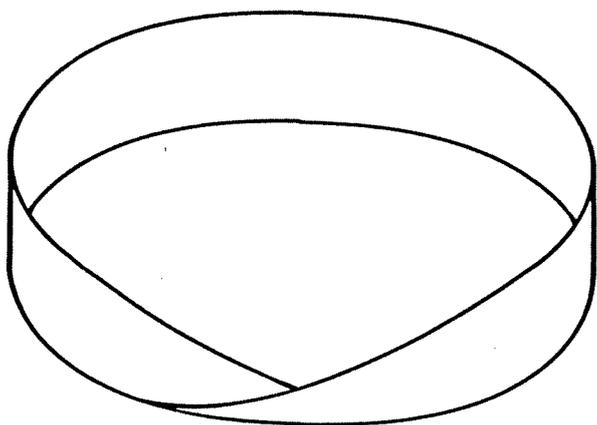


Fig. 1 : Ruban de Moëbius

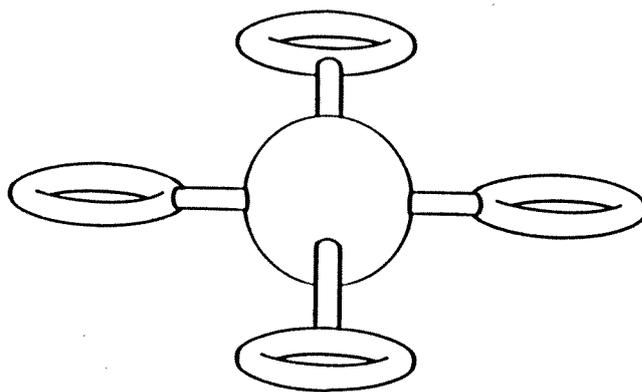


Fig. 2 : Surface de genre 4 (bretzel à quatre anses) vue comme somme connexe d'une sphère et de quatre tores

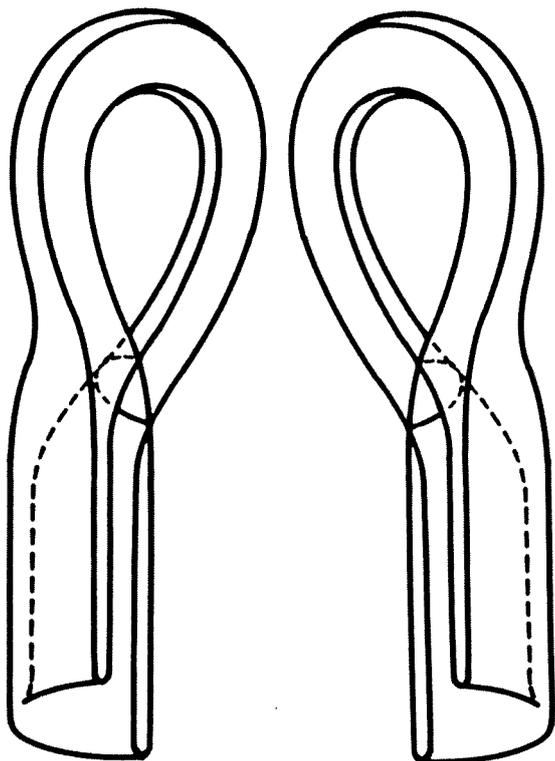


Fig. 3 : Deux rubans de Moëbius immergés donnent une bouteille de Klein, par recollement le long de leurs bords

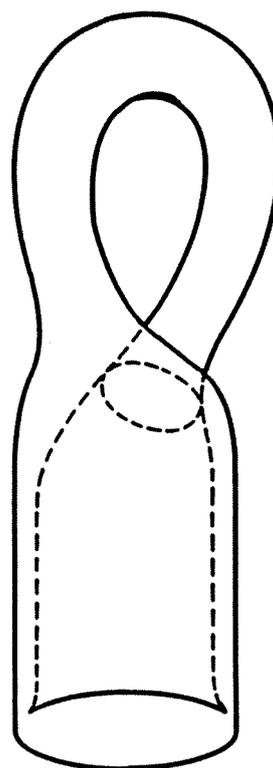


Fig. 4 : Bouteille de Klein

triples en lesquels la surface admet trois plans tangents indépendants.

La première immersion en position générale d'une surface fermée non orientable dans \mathbb{R}^3 à avoir été construite est celle de la surface de genre 2 qui fut obtenue par Félix KLEIN en 1882 par recollement de deux rubans de Möbius le long de leur bord ; c'est la célèbre *bouteille de Klein* (Fig. 3 et 4). Réussir une telle construction pour le plan projectif réel, c'était en fait résoudre la question pour toute surface fermée non orientable puisqu'une telle surface est somme connexe d'un certain nombre de plans projectifs réels. Rappelons que l'opération de somme connexe de deux surfaces consiste à ôter un petit disque sur chacune d'entre elles et à les recoller le long de leurs cercles bords ainsi fermés.

L'existence d'une immersion en position générale du plan projectif réel paraissait néanmoins suffisamment improbable pour que David HILBERT, à l'époque où il dressait une liste de vingt-trois problèmes devant guider les recherches des mathématiciens pour les années à venir, en confie un vingt-quatrième à son élève Werner BOY : **prouver l'impossibilité d'immerger le plan projectif réel dans l'espace à trois dimensions.**

En 1901 Werner BOY résolvait *négativement* le problème de HILBERT et construisait une immersion en position générale du plan projectif réel dans \mathbb{R}^3 baptisée depuis **surface de BOY**.

Notons que l'on connaissait bien avant BOY des représentations du plan projectif réel dans l'espace sous la forme de surfaces admettant des singularités, c'est-à-dire ne pouvant être les images d'immersions.

Il s'agissait essentiellement de la *mitre* (Fig. 5) et de la *surface romaine* (Fig. 6) qui sont dues à Jacob STEINER. Les singularités que l'on y observe sont toutes du même type, dite *singularité du bonnet croisé* (Fig. 10) au voisinage de laquelle on ne peut définir de plan tangent de façon continue.

Pour ces deux surfaces, comme nous le verrons, on dispose d'équations polynômiales du quatrième degré. Le problème qui s'est posé immédiatement après la découverte de BOY a été de représenter sa surface par une équation polynômiale. Il subsistait encore à l'époque l'idée que l'existence d'un être géométrique se trouvait renforcée par la donnée d'équations éventuelles.

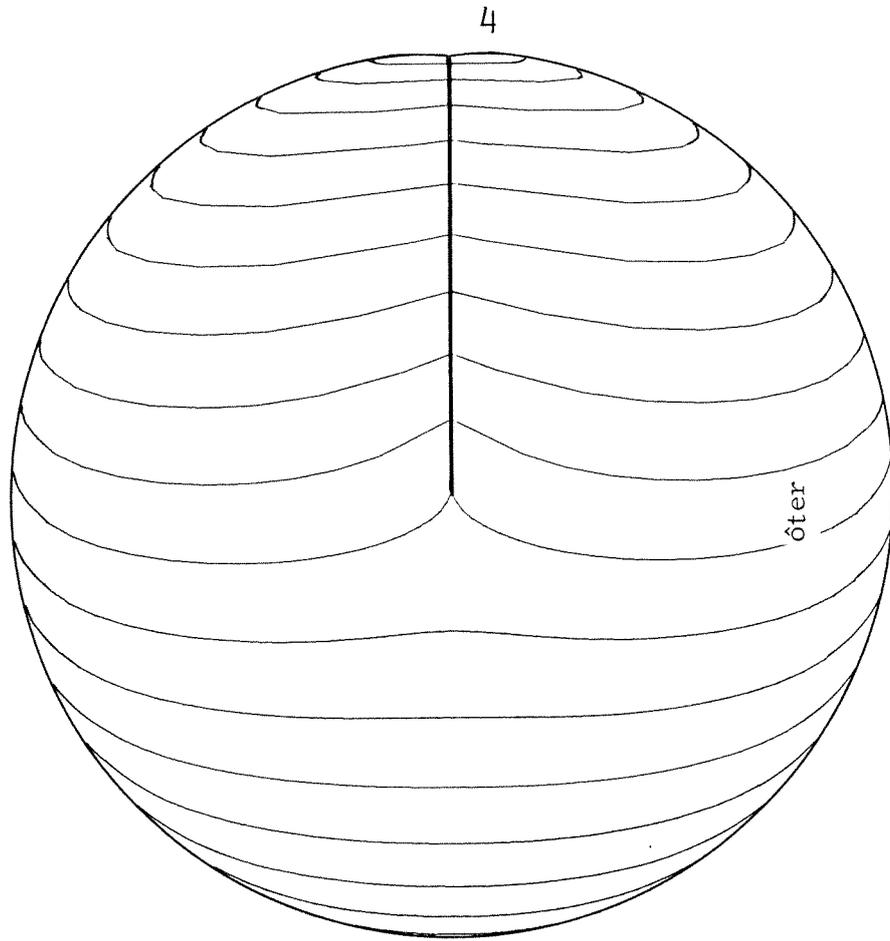


Fig. 5 : Mitre

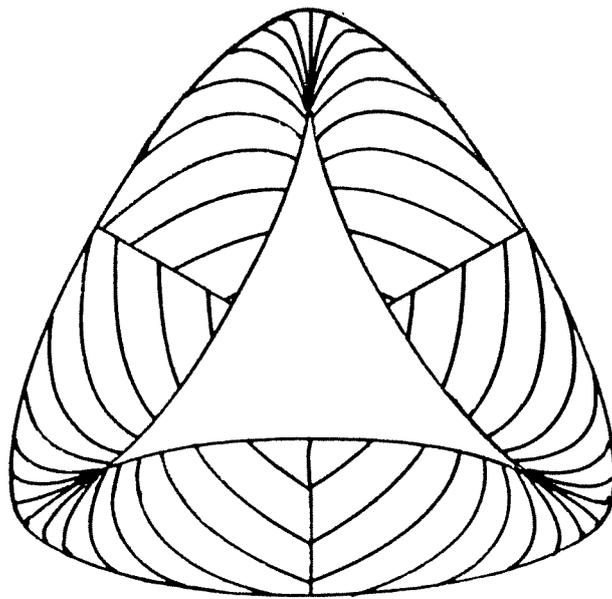


Fig. 6 : Surface romaine

Nous nous proposons dans le présent article de montrer la démarche historique qui a conduit J. STEINER à définir ses surfaces à partir d'une propriété de M. FREGIER et ensuite à utiliser la géométrie des coniques mise ainsi en oeuvre pour les étudier, et s'inspirer de leurs propriétés pour donner à la surface de BOY une équation du sixième degré.

2. FRÉGIER DÉCOUVRE UN POINT

Pour construire ses surfaces le géomètre suisse Jacob STEINER avait pris comme point de départ une propriété démontrée en 1816 dans les annales de Gergonne par M. FREGIER : on se donne une quadrique propre (q) de l'espace projectif, un point O sur cette quadrique, une conique propre (c) contenue dans un plan (π) ne passant pas par O ; on construit ensuite un tétraèdre (τ) de sommet O inscrit dans (q) dont les trois arêtes issues de O coupent (π) suivant un triangle autopolaire relativement à (c) ; alors la face de (τ) opposée à O passe par un point fixe F indépendant du tétraèdre choisi (Fig. 8).

Cette propriété était déjà une généralisation d'une propriété analogue dans le plan projectif, mais la méconnaissance à l'époque du calcul matriciel avait interdit à FREGIER de la généraliser en dimension quelconque. Voici la forme générale que l'on peut en donner sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.

Propriété 1. Soit (q) une hyperquadrique propre de l'espace projectif de dimension n, O un point de (q), (c) une hyperconique propre (hyperquadrique de codimension 2) située dans un hyperplan (π) ne passant pas par O, et (τ) un (n+1) - simplexe de sommet O inscrit dans (q) dont les n arêtes issues de O coupent (π) suivant un n-simplexe autopolaire relativement à (c) ; alors la face hyperplane de (τ) opposée à O passe par un point fixe F appelé *point de Frégier*.

Preuve. Soit $M = (u_1 | \dots | u_n)$ une matrice $n \times n$ dont les colonnes u_1, \dots, u_n représentent les systèmes de coordonnées homogènes en (x^1, \dots, x^n) des sommets d'un n-simplexe autopolaire relativement à (c). Si C désigne la matrice de (c) on a $\det C \neq 0$ et on peut supposer, quitte à multiplier les coordonnées homogènes des sommets du n-simplexe par une constante non nulle, que

$${}^t M \cdot C \cdot M = I \cdot \det C \quad \text{où } I \text{ est la matrice unité } n \times n.$$

Après une éventuelle permutation des colonnes de M on a $\det M = 1$.

Or on sait que

$$\tilde{M} M = M \tilde{M} = I \cdot \det M \quad \text{où } \tilde{M} \text{ est la transposée de la matrice des cofacteurs de } M.$$

On en déduit la relation :

$${}^t \tilde{M} \cdot \det C = C \cdot M.$$

La matrice de (q) s'écrit

$$\begin{pmatrix} Q & | & v^t \\ \hline v^t - v^n & & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\begin{pmatrix} u_j^t \\ \vdots \\ u_j^n \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M, les équations de l'arête issue de O correspondante

du (n+1)-simplexe obtenu en adjoignant O au n-simplexe précédent s'écrivent

$$\frac{x^t}{u_j^t} = \dots = \frac{x^n}{u_j^n}$$

En désignant par 2λ la valeur commune de ces quotients on voit que cette arête recoupe (q) en un point $(2\lambda \cdot u_j^t, \dots, 2\lambda \cdot u_j^n, x^{n+1})$ vérifiant

$$\begin{aligned} O &= (2\lambda \cdot u_j^t, \dots, 2\lambda \cdot u_j^n, x^{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} Q & | & v^t \\ \hline v^t - v^n & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda \cdot u_j^t \\ \vdots \\ 2\lambda \cdot u_j^n \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= 4\lambda \cdot [\lambda(u_j^t, \dots, u_j^n) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} u_j^t \\ \vdots \\ u_j^n \end{pmatrix} + x^{n+1} \cdot \langle u_j, v \rangle] \\ \text{où } \langle u_j, v \rangle &= (u_j^t, \dots, u_j^n) \cdot \begin{pmatrix} v^t \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

λ étant supposé non nul, on trouve le point F de coordonnées homogènes

$$(2u_j^t \langle u_j, v \rangle, \dots, 2u_j^n \langle u_j, v \rangle, -{}^t u_j \cdot Q \cdot u_j)$$

La quantité $\langle u_j, v \rangle$ étant non nulle dès que l'on suppose que l'arête précédente n'est pas dans l'hyperplan tangent à (q) en O.

Soit (u_0^t, \dots, u_0^n) le pôle relativement à (c) de l'intersection de (π) avec l'hyperplan tangent en O à (q). On peut supposer

$$C \cdot \begin{pmatrix} u_0^t \\ \vdots \\ u_0^n \end{pmatrix} = \det C \cdot \begin{pmatrix} v^t \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} u_0^t \\ \vdots \\ u_0^n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} v^t \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Les équations de la droite issue de O et passant par ce point sont

$$\frac{x^t}{u_0^t} = \dots = \frac{x^n}{u_0^n}$$

ce qui donne la représentation paramétrique

$$x^t = \lambda u_0^t, \dots, x^n = \lambda u_0^n$$

Nous voulons prouver que le point F d'intersection de cette droite avec l'hyperplan déterminé par F_1, \dots, F_n ne dépend pas des coefficients u_j^t de M.

Les coordonnées du point F s'écrivent $(\lambda u_0^t, \dots, \lambda u_0^n, x^{n+1})$ et vérifient

$$O = \begin{vmatrix} 2u_1^t \langle u_1, v \rangle & \dots & 2u_1^n \langle u_1, v \rangle & -{}^t u_1 \cdot Q \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2u_n^t \langle u_n, v \rangle & \dots & 2u_n^n \langle u_n, v \rangle & -{}^t u_n \cdot Q \cdot u_n \\ \lambda u_0^t & \dots & \lambda u_0^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = \Delta$$

sachant que $\det M = 1$ on a, en développant Δ suivant la dernière ligne

$$\Delta = 2^n \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle x^{n+1} + 2^n \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} u_0^j \cdot \Delta^j$$

$$\text{avec } \Delta^j = \begin{vmatrix} u_1^1 \langle u_1, v \rangle \dots u_1^{j-1} \langle u_1, v \rangle u_1^{j+1} \langle u_1, v \rangle \dots u_1^n \langle u_1, v \rangle u_1^j \cdot Q \cdot u_1 \\ u_n^1 \langle u_n, v \rangle \dots u_n^{j-1} \langle u_n, v \rangle u_n^{j+1} \langle u_n, v \rangle \dots u_n^n \langle u_n, v \rangle u_n^j \cdot Q \cdot u_n \end{vmatrix}$$

Le développement de Δ^j suivant la dernière colonne donne

$$\Delta^j = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} u_i^j \cdot Q \cdot u_i \Delta_i^j \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_{i-1}, v \rangle \langle u_{i+1}, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle$$

où Δ_i^j est le mineur du terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^t M$, c'est-à-dire, d'après la relation $\hat{M} \det C = {}^t M C$,

$$\Delta_i^j = \det^{-1} C \cdot ({}^t M C)_i^j (-1)^{i+j} \quad \text{où } M_i^j \text{ désigne le terme de la } i^{\text{ème}} \text{ ligne et } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.$$

On a donc

$$\Delta = 2^n \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle x^{n+1} + 2^n \lambda \det^{-1} C \sum_{i,j} u_0^j \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_{i-1}, v \rangle \langle u_{i+1}, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle u_i^j Q u_i ({}^t M C)_i^j$$

or

$$\begin{aligned} \sum_j u_0^j ({}^t M C)_i^j &= ({}^t M C)_i u_0 = ({}^t M C)_i \tilde{C} v = ({}^t M C \tilde{C})_i v \\ &= \det C ({}^t M v)_i = \det C \langle u_i, v \rangle \end{aligned}$$

finalement

$$\Delta = 2^n \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle (x^{n+1} + \lambda \sum_i u_i^j \cdot Q \cdot u_i)$$

on déduit de la relation $\Delta = 0$

$$x^{n+1} = -\lambda \sum_i u_i^j Q u_i = -\lambda \sum_i ({}^t M)_i^j Q (M)^i = -\lambda \text{tr}({}^t M Q M) = -\lambda \text{tr}(Q M {}^t M)$$

or

$$C M {}^t M = \det C \cdot {}^t \hat{M} M = \det C \cdot I$$

donc

$$M {}^t M = \tilde{C}$$

et les coordonnées du point F sont

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad \text{et } x^{n+1} = -\text{tr}(Q \tilde{C}) \quad \text{cqfd}$$

Quelques propriétés du point de Frégier, résultantes de la démonstration :

1. Le point de Frégier est situé sur la droite issue de O et passant par le pôle de l'intersection (d) de (π) avec l'hyperplan tangent en O à (q), relativement à (c). Si, dans le système de coordonnées homogènes (x^1, \dots, x^{n+1}) le point O s'écrit $(0, \dots, 0, 1)$ et l'hyperplan (π) a pour équation $x^{n+1} = 0$, si C désigne la matrice de (c) relativement à (x^1, \dots, x^n) , Q celle de l'intersection de (q) avec (π) et si enfin l'équation de l'hyperplan tangent en O à (q) s'écrit

$$v_1 x^1 + \dots + v_n x^n = 0$$

alors le point de Frégier F a pour coordonnées homogènes (x^1, \dots, x^{n+1}) avec

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad x^{n+1} = -\text{tr}(Q \tilde{C})$$

où \tilde{M} désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de M , et $\text{tr } M$ désigne la trace de M . On remarque que ces coordonnées dépendent linéairement des coefficients de (q) et sont des polynômes homogènes de degré $n-1$ en fonction de ceux de (c) .

2. La condition imposant à l'hyperconique (c) d'être propre, c'est-à-dire non dégénérée, peut être améliorée au vu des coordonnées du point de Frégier. En effet si on note (d) l'intersection de (π) avec le plan tangent en O à (q) , et (γ) l'intersection de (q) et (d) ((γ) est donc une quadrique de codimension 3), on a la

Propriété 2. Le point de Frégier est défini si et seulement si l'hyperconique (c) admet au plus un point singulier, ce dernier n'étant pas situé sur (γ) .

Preuve. Examinons d'abord le cas où (q) n'est pas tangente à (π) .

On peut alors choisir le repère projectif, tout en respectant les contraintes de la propriété précédente, de façon que

$$Q = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point de Frégier n'est pas défini si et seulement si

$$\tilde{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{tr } \tilde{C} = 0.$$

Les formules de Cramer montrent que la première condition équivaut à ce que (c) admette un point singulier sur l'hyperplan $x^n = 0$ c'est-à-dire sur l'intersection (d) de cet hyperplan avec (π) .

Quant à la deuxième condition ($\text{tr } \tilde{C} = 0$) les mêmes formules de Cramer montrent qu'elle équivaut à ce que (c) et (\tilde{c}) admettent un point singulier en commun. Or dans l'hyperplan (π) , l'hyperconique tangentielle (\tilde{c}) est l'ensemble des points dont les polaires relativement à

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0$$

sont tangentes à (c) , ce qui signifie, dans le cas où (c) admet des points singuliers, que ces polaires passent par les points singuliers.

On en déduit que $\text{tr } \tilde{C} = 0$ si et seulement si (c) admet un point singulier sur $(q) \cap (\pi)$ dont les équations sont justement

$$x^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0.$$

Finalement le point de Frégier n'est pas défini si et seulement si (c) admet son point singulier sur $(\gamma) = (q) \cap (d)$, ou si (c) admet plus d'un point singulier (auquel cas $\tilde{C} = 0$).

Dans le cas où (q) est tangente à (π) , alors, (q) étant propre, on a
 $\text{rg } Q = n - 1$.

De plus (π) ne passant pas par O , le plan tangent en O à (q) ne passe pas par le point de contact de (q) avec (π) et on peut choisir le repère projectif de façon que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & (0) \\ (0) & \cdot & 1 \\ & & O \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point de Frégier n'est pas défini si et seulement si

$$\tilde{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \text{tr } Q\tilde{C} = 0$$

ce qui donne une matrice \tilde{C} de la forme

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

La deuxième condition donnant alors $\text{tr } \tilde{C} = 0$. Nous aurons donc la même conclusion que dans le premier cas. cqfd

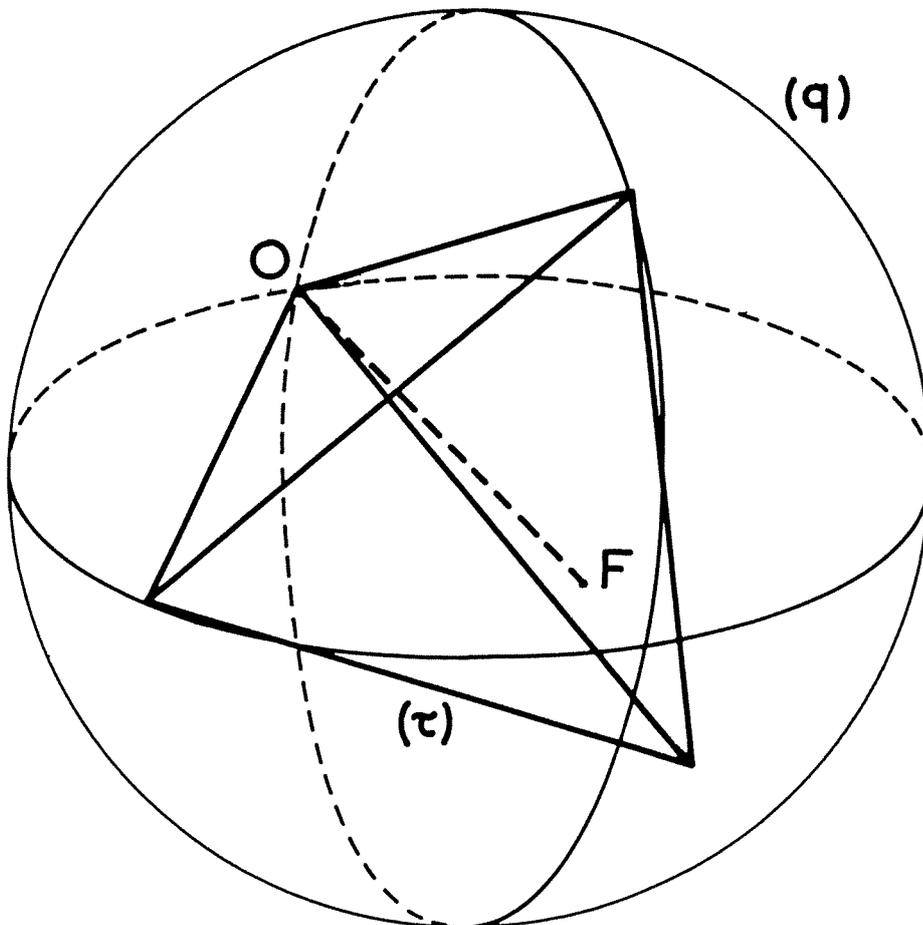


Fig. 8 . Le point de Frégier

Muni du résultat de FREGIER en dimension trois, STEINER s'est intéressé à la surface décrite par le point de Frégier quand la conique (c) parcourt une famille linéaire de coniques à deux paramètres dans le plan (π), c'est-à-dire un *2-pinceau* de coniques engendré par trois coniques indépendantes.

Dans un tel 2-pinceau, il est clair qu'il y a des coniques dégénérées et c'est la propriété 2 qui nous permet de le choisir de façon que le point de Frégier soit défini pour toute conique de la famille. En effet, la quadrique (γ) de codimension 3 est maintenant réduite à deux points et l'ensemble des points singuliers des coniques d'un 2-pinceau est une cubique appelée *hessienne du 2-pinceau*. Il suffit donc de s'assurer premièrement, que cette cubique est irréductible ce qui exclut les droites doubles dans le 2-pinceau, et deuxièmement que cette hessienne ne passe pas par les deux points de (γ), ce qui est généralement le cas. Nous venons de construire une surface de Steiner.

C'est lors de son séjour à Rome en 1844 que STEINER avait dégagé quelques propriétés géométriques de la surface qu'il avait construite conformément aux principes précédents. Ainsi savait-il par exemple qu'elle était engendrée par des coniques. En effet si la conique (c) décrit une famille linéaire à un paramètre, c'est-à-dire un 1-pinceau (l'usage du mot faisceau est maintenant réservé à un autre concept mathématique), le point de Frégier dépend quadratiquement de ce paramètre et décrit donc une conique. Il ne semble pas que STEINER ait jamais publié un article sur cette surface qu'il appelait sa *surface romaine* (Fig. 6), d'autant plus que, peu familier avec les calculs algébriques trop touffus, il n'avait pu en déterminer le degré avec certitude, pas plus d'ailleurs qu'il n'en avait obtenu de représentation paramétrique. K. WEIRSTRASS rapporte qu'un an avant sa mort STEINER lui avait demandé d'entreprendre lesdits calculs, ce qu'il fit sans difficulté sachant que les coordonnées du point de Frégier étaient des formes quadratiques en les coefficients de la conique (c), comme nous l'avons montré dans la propriété 1. La surface obtenue est donc une surface algébrique rationnelle dont la paramétrisation par des formes quadratiques ternaires est définie partout, ce qui montre qu'il s'agit d'une surface du quatrième degré. On peut signaler dès maintenant, compte tenu de la démonstration de la propriété 2, que le point de Frégier se situe en O si et seulement si la conique (c) admet un point singulier sur l'intersection (d) du plan (π) avec le plan tangent en O à (q). Or la hessienne du 2-pinceau décrit par (c) est une cubique irréductible. Si on la suppose non tangente à (d) elle coupe (d) en trois points distincts ce qui montre que le point O est triple sur la surface de

Steiner et, en particulier, que la surface ne se réduit pas à une quadrique revêtue deux fois, ou à un plan revêtu quatre fois.

3. WEIERSTRASS DÉCOUVRE LES SURFACES DE STEINER

Nous avons indiqué la démarche historique qui a conduit à considérer les surfaces de Steiner, mais on peut procéder différemment pour en atteindre plus rapidement les propriétés essentielles. Les calculs de WEIERSTRASS ont permis tout naturellement d'appeler *surface de Steiner* toute surface de l'espace projectif complexe paramétrée par quatre formes quadratiques ternaires indépendantes ne s'annulant pas simultanément. En langage géométrique, cela revient à projeter la surface de Veronese paramétrée dans l'espace projectif complexe de dimension 5 par les six monômes du second degré à trois variables $u^2, v^2, w^2, uv, vw, wu$, dans l'espace à trois dimensions, par une projection dont le centre est une droite ne la coupant pas.

On dit qu'une surface de Steiner est une *projection générique* de la surface de Veronese dans l'espace projectif à trois dimensions. La simplicité de cette définition permet d'atteindre facilement les propriétés caractéristiques des surfaces de Steiner. Ce sont avant tout des surfaces du quatrième degré. On peut ensuite en rechercher les points multiples en se représentant les quatre formes quadratiques ternaires indépendantes ne s'annulant pas simultanément comme quatre coniques engendrant un 3-pinceau \mathcal{C} sans point fixe. Dire que deux points distincts m et m' ont même image par la paramétrisation de la surface de Steiner revient à dire que toute conique de \mathcal{C} qui passe par l'un passe par l'autre. L'ensemble des coniques qui passent par m forme un 2-pinceau ; on considère donc une conique (c) du 3-pinceau \mathcal{C} ne passant pas par m et recoupant la droite mm' en deux points distincts n, n' , il existe alors exactement une paire de points distincts $\{a, b\}$ sur la droite mm' qui soient conjugués par rapport à $\{m, m'\}$ et $\{n, n'\}$: $\{a, b\}$ est le 2-simplexe autopolaire du 1-pinceau de 0-quadrique engendré par $\{m, m'\}$ et $\{n, n'\}$. Les deux points a et b sont conjugués par rapport à toutes les coniques de \mathcal{C} .

Réciproquement si on a une telle paire de points distincts a, b conjugués par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} , il est clair que toute conique de \mathcal{C} passant par un point m de la droite ab passe par son conjugué m' par rapport à $\{a, b\}$ et que les deux points m et m' ont même image sur la surface de Steiner. La recherche des points multiples de la surface de Steiner est donc ramenée à la recherche des paires de points conjugués par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} .

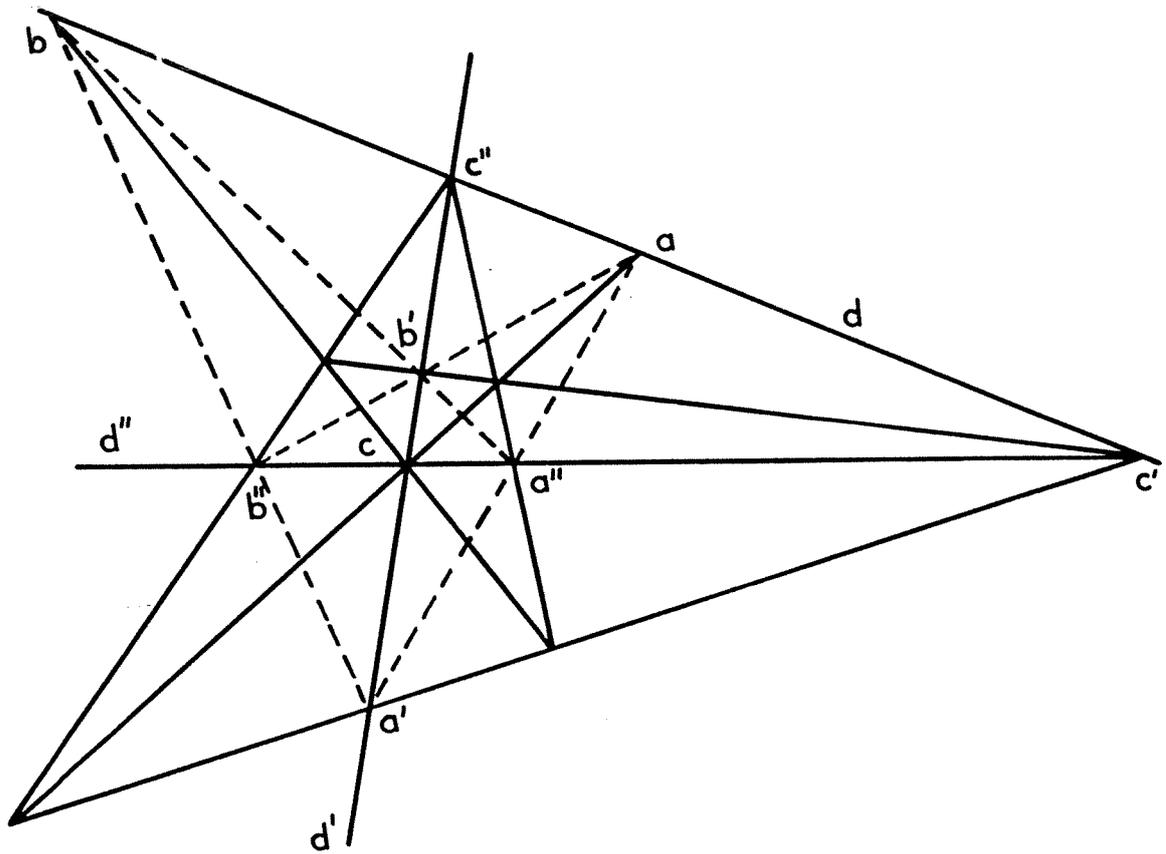


Fig. 9 : Configuration du quadrilatère complet

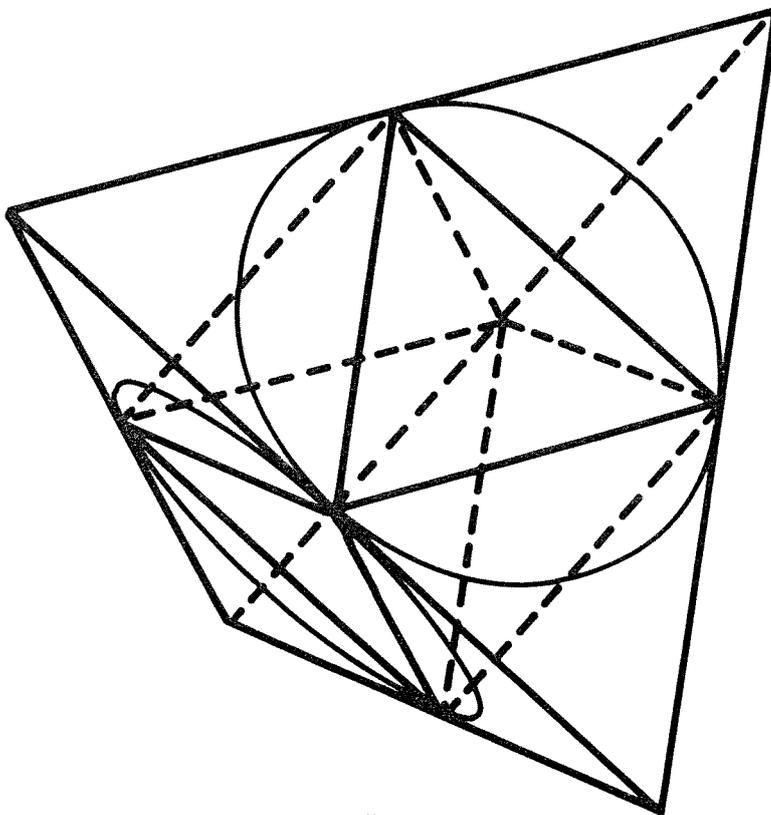


Fig. 11 : Octaèdre régulier des parapluies de Whitney de la surface romaine et tétraèdre régulier des plans de contact de la surface romaine le long de cercles

On engendre le 3-pinceau \mathcal{C} par quatre coniques indépendantes $[c_1, c_2, c_3, c_4]$ de façon que les hessiennes (γ) et (γ') de $[c_1, c_2, c_3]$ et $[c_1, c_2, c_4]$ n'aient aucune composante commune, que le 1-pinceau $[c_1, c_2]$ ait quatre points fixes distincts, et qu'aucun sommet du triangle autopolaire de $[c_1, c_2]$ n'admette de conjugué par rapport à $[c_3, c_4]$ sur son côté opposé. Les deux hessiennes (γ) et (γ') se coupent alors en neuf points en tenant compte des multiplicités, et parmi ces neuf points figurent les trois sommets du triangle autopolaire de $[c_1, c_2]$ n'admettant pas de conjugués par rapport à \mathcal{C} .

Si on appelle a l'un des six points restants, ses deux polaires par rapport à c_1 et c_2 se coupent en un point b par lequel passe la polaire par rapport à c_3 puisque a est sur (γ) , et également la polaire par rapport à c_4 puisque a est sur (γ') . Ce point b conjugué de a relativement à \mathcal{C} est situé sur (γ) et (γ') . Ainsi les six points restants de $(\gamma) \cap (\gamma')$ se distribuent en trois paires de points distincts conjugués par rapport à \mathcal{C} . Ces trois paires déterminent trois droites d, d', d'' .

Nous n'examinerons que la *situation générique* dans laquelle les trois paires sont distinctes. Les trois droites d, d', d'' sont alors distinctes, car deux paires alignées sont nécessairement confondues. Si maintenant les trois droites étaient concourantes en un point a , alors nécessairement les trois paires seraient de la forme $\{a, b\}, \{a, b'\}, \{a, b''\}$ où b, b', b'' seraient alignés sur la polaire de a par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} . Or cette situation a été exclue par les hypothèses sur les générateurs c_1, c_2, c_3, c_4 . Les droites d, d', d'' sont donc en position générale. Nous sommes dans la configuration du *quadrilatère complet* (Fig. 9).

Chaque droite d, d', d'' a pour image une courbe du second degré revêtue deux fois, c'est donc une droite double δ, δ' ou δ'' sur la surface de Steiner. Ces trois droites doubles ne sont pas coplanaires car la surface est du quatrième degré, et, par ailleurs, si c, c', c'' désignent les sommets du triangles (d, d', d'') , ces trois points ont pour image commune sur la surface Steiner *un point triple commun aux trois droites doubles non coplanaires* $\delta, \delta', \delta''$.

Muni de ce résultat on peut choisir aisément un repère projectif permettant d'obtenir une équation cartésienne de la surface de Steiner. En effet plaçons l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ au point triple, les trois droites doubles passant respectivement par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation du quatrième degré ne peut alors contenir que les monômes

$$x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2, x^2yz, xy^2z, xyz^2, xyz.$$

Les coefficients de x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2 et xyz sont non nuls sinon la surface serait décomposable ou conique. On peut donc écrire l'équation sous la forme

$$ax^2y^2 + by^2z^2 + cz^2x^2 = 2xyz(t + dx + ey + fz) \quad abc \neq 0$$

Le choix de la position des points $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur les droites doubles et du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ permet d'écrire l'équation sous la *forme canonique* :

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyzt.$$

Il devient légitime de parler de *la* surface de Steiner de l'espace projectif complexe. De cette équation on tire ses différentes propriétés. Par exemple la paramétrisation sous la forme

$$x = 2vw, \quad y = 2wu, \quad z = 2uv, \quad t = u^2 + v^2 + w^2.$$

Outre les trois droites doubles se coupant en un point triple ordinaire (en lequel la surface admet trois plans tangents indépendants), la surface admet six singularités du type "*parapluie de Whitney*" situées par paires sur les droites doubles et formant un octaèdre régulier dont le centre est au point triple (on a construit canoniquement sur l'espace projectif complexe muni de son repère projectif une structure affine hermitienne complétée d'un plan projectif à l'infini). Ces six points doubles en lesquels les deux plans tangents à la surface viennent coïncider sont les images des trois paires de points conjugués par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} .

La surface est engendrée par une famille à deux paramètres de coniques images des droites du plan projectif complexe. Chaque plan tangent coupe la surface suivant deux coniques. Quatre plans particuliers formant un tétraèdre régulier dont les milieux des arêtes sont aux sommets de l'octaèdre des parapluies de Whitney, sont tangents à la surface le long de quatre cercles inscrits dans les faces du tétraèdre et circonscrits aux faces correspondantes de l'octaèdre (Fig. 11). Les symétriques du point triple par rapport aux quatre faces de l'octaèdre non communes avec le tétraèdre sont situées sur la surface et appelés *pôles de la surface de Steiner*. Les plans tangents à la surface en ses pôles sont parallèles aux faces correspondantes de l'octaèdre.

La littérature datant de plus d'un siècle a multiplié les propriétés de cette surface qui a parfois été étudiée sous le nom de *surface tétraèdre de Lamé* avec l'équation

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{t}$$

On retrouve la forme canonique de l'équation en posant

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons une des propriétés de cette surface mentionnée par KUMMER dans une étude systématique des surfaces de quatrième degré engendrées par des coniques, selon laquelle son contour apparent vu d'un point non situé sur la surface est une

sextique ; vu d'un point de la surface non situé sur une droite double c'est une quartique ; vu d'un point double non triple c'est une conique ; et vu du point triple le contour apparent est réduit à trois points.

Il reste à remarquer que la surface de Steiner complexe peut avoir, à homographie près, deux restrictions dans le réel selon la réalité des trois droites doubles. Si les trois sont réelles, nous retombons sur l'équation

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyzt.$$

Cette surface réelle porte usuellement le nom de *surface romaine* (Fig. 6). Si une seule des droites doubles est réelle, un choix convenable du repère projectif nous conduit à l'équation

$$4x^2(x^2 + y^2 + z^2 + zt) = y^2(t^2 - y^2 - z^2).$$

C'est cette dernière surface réelle que l'on appelle la *mitre* (Fig. 5). Ses trois droites doubles ont pour équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - i\sqrt{2}x = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{cases} y + i\sqrt{2}x = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

Ces deux surfaces algébriques réelles sont en fait deux aspects de la même surface algébrique complexe et leurs propriétés géométriques sont donc très voisines.

Le groupe des symétries de la surface romaine est toutefois plus riche que celui de la mitre : dans le premier cas, il s'agit du groupe du tétraèdre régulier, c'est-à-dire le groupe symétrique \mathcal{S}_4 , tandis que dans le second il s'agit du groupe de Klein $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Ces deux surfaces algébriques réelles sont définies par des paramétrisations quadratiques mais la présence de singularités du type "*bonnet croisé*" (Fig. 10), (singularité réelle correspondant au parapluie de Whitney) en lesquelles les paramétrisations voient le rang de leur matrice jacobienne baisser d'une unité, interdit aux deux images du plan projectif réel de coïncider exactement avec les surfaces algébriques réelles correspondantes. En effet, le long de la courbe double, en un point de l'image du plan projectif réel différent d'une singularité, la singularité admet deux plans tangents réels distincts qui viennent coïncider au point singulier et se séparent ensuite en deux plans tangents imaginaires conjugués. La droite double admet donc un point d'arrêt à la singularité dans l'image du plan projectif réel alors qu'elle est entièrement contenue dans la surface algébrique réelle correspondante. La partie de courbe double manquant dans l'image du plan projectif réel s'appelle *manche de parapluie*, c'est le morceau réel du parapluie de Whitney complexe

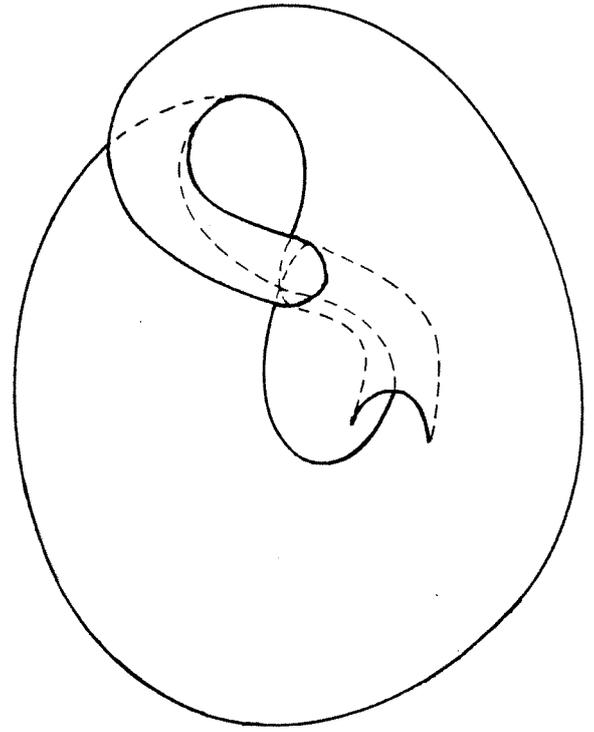
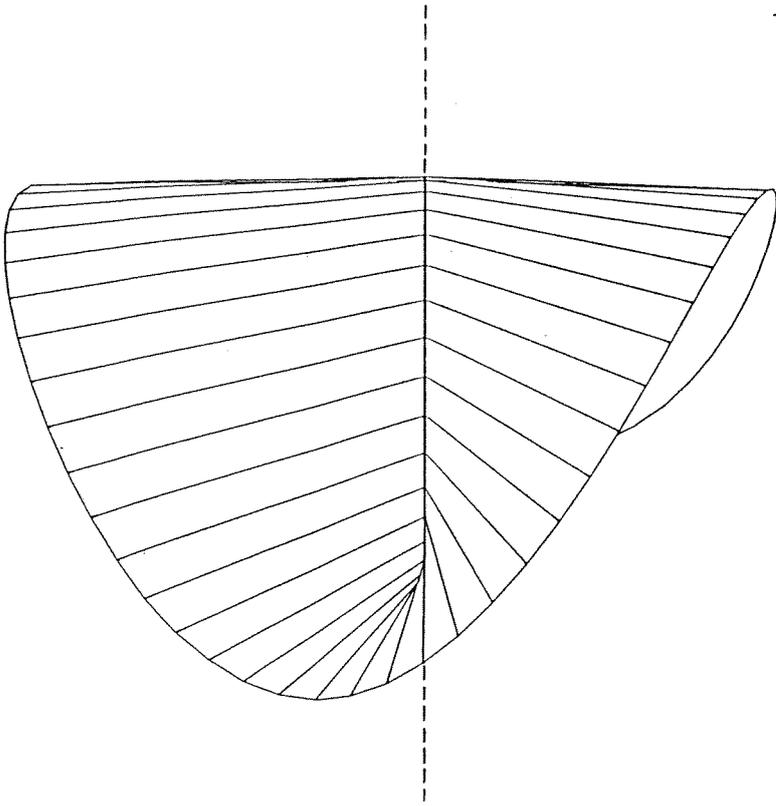


Fig. 10 : Deux singularités du type "bonnet croisé" sur la cubique réglée.
Les deux manches de parapluie sont en pointillés

Fig. 7 : Première surface de Boy

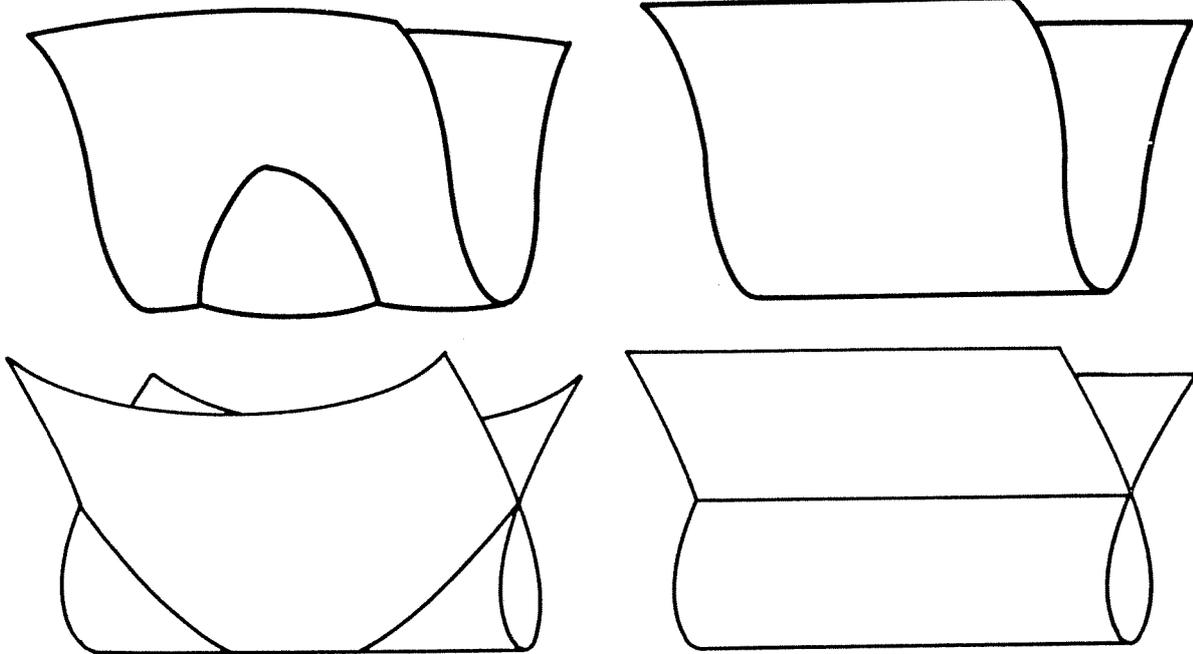


Fig. 12 : en haut : confluence elliptique de deux bonnets croisés
en bas : confluence hyperbolique de deux bonnets croisés

qui n'est pas dans le bonnet croisé (Fig. 10). Les singularités du type "bonnet croisé" apparaissent par paires, il y en a six sur la surface romaine et deux sur la mitre.

Ces deux représentations du plan projectif réel dans \mathbb{R}^3 pèchent donc d'un point de vue géométrique par la présence de singularités (la surface n'est pas l'image d'une immersion en position générale) et d'un point de vue algébrique par l'existence de manches de parapluie parasites.

Nous allons donner à présent un aperçu d'une méthode développée en détail dans mon travail cité en référence, permettant de lever ces deux obstacles.

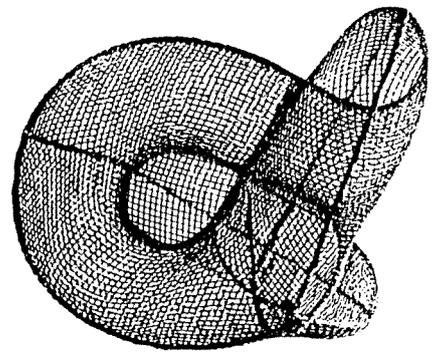
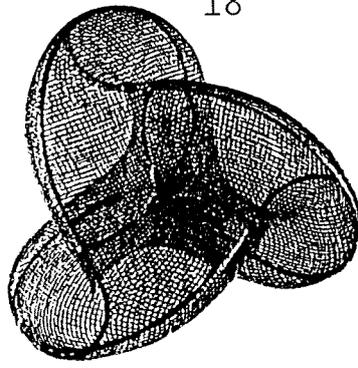
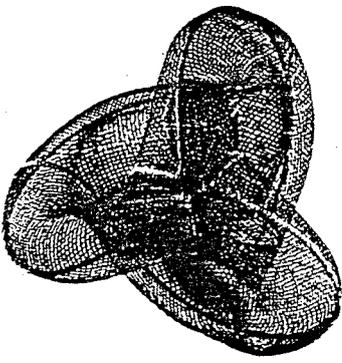
4. WHITNEY INVENTE LE PARAPLUIE À BONNET CROISÉ

On doit à Hassler WHITNEY en 1944 d'avoir reconnu que la singularité du bonnet croisé est la seule singularité stable d'une application d'une surface dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire la seule singularité qui est préservée par une perturbation assez petite. On sait également que ces singularités naissent ou meurent par paires et que génériquement il n'y a que deux manières de disparaître pour une paire de singularités du type bonnet croisé : premièrement la confluence elliptique qui fait disparaître en même temps la courbe d'auto-intersection, et deuxièmement la confluence hyperbolique qui raccorde les deux morceaux de la courbe d'auto-intersection en un seul (Fig. 12).

Nous nous proposons de construire une image du plan projectif réel dans \mathbb{R}^3 par immersion en position générale à partir d'une image contenant des singularités, en faisant disparaître les singularités par paires. Sachant que le plan projectif ne peut être plongé dans \mathbb{R}^3 et donc que la surface cherchée admet une courbe d'auto-intersection, la confluence utilisée serait du type hyperbolique si l'on parlait de la mitre qui ne contient que deux bonnets croisés. Nous aboutirions alors à la première surface trouvée (par une autre méthode) par BOY (Fig. 7).

Mais HILBERT a remarqué que l'on pouvait imposer à la surface d'avoir un axe de symétrie ternaire, son groupe de symétrie étant alors le groupe alterné \mathcal{A}_3 . C'est cette dernière surface que l'on appelle **surface de Boy** (Fig. 13).

Elle admet un point triple sur son axe de symétrie ternaire lequel la recoupe en un autre point appelé *pôle de la surface*. Un modèle de la surface de Boy a été réalisé par le sculpteur Max SAUZE à partir d'ovales passant par le pôle, et en remplaçant les ovales par des ellipses. J.-P. PETIT et J. SOURIAU ont mis au point empiriquement en 1981 une paramétrisation picturalement très satisfaisante (Fig. 14). Une véritable paramétrisation conceptuelle de la surface de Boy avait précédemment



*Fig. 13 : Surface de Boy avec axe de symétrie ternaire
(extrait de l'ouvrage de Hilbert et Cohn-Vossen : Anschauliche Geometrie)*

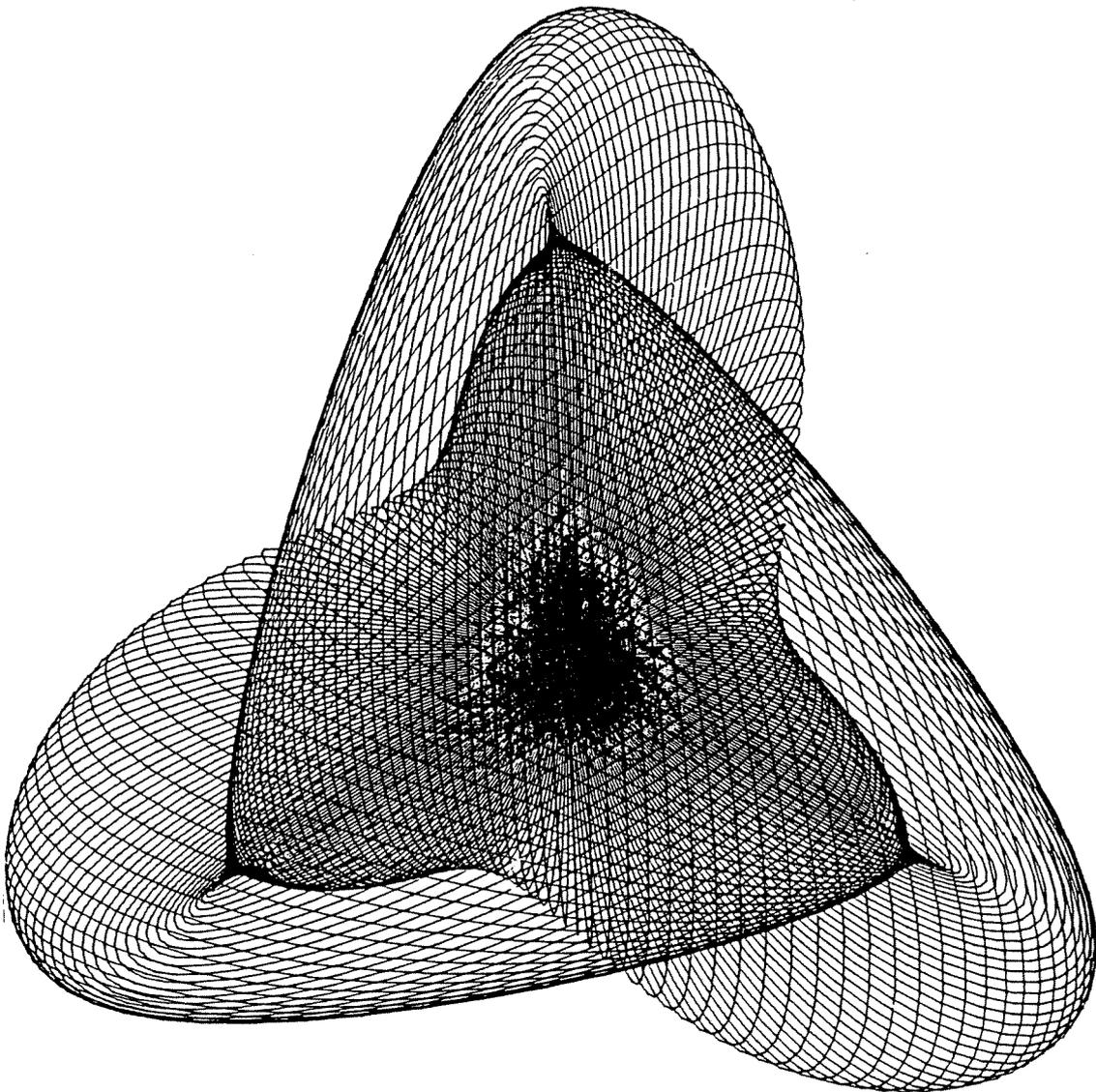
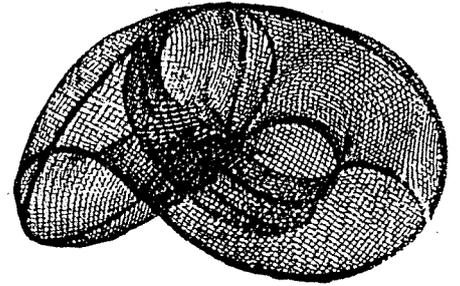


Fig. 14 : Surface de Boy, d'après la paramétrisation de J.-P. Petit et J. Souriau

été obtenue en 1978 par B. MORIN en partant du principe que son contour apparent vu du centre de sa sphère osculatrice en son pôle était une hypocycloïde à trois rebroussements (Fig. 15).

Si on veut déformer la surface romaine par confluence hyperbolique des bonnets croisés ; si l'on remarque que par chacun de ses pôles passe un axe de symétrie ternaire la recoupant en son point triple ; qu'elle est engendrée par des ellipses passant par l'un de ses pôles ; et que son contour apparent vu de ce pôle est une hypocycloïde à trois rebroussements, il est légitime de chercher à construire la surface de Boy en la supposant engendrée par des ellipses passant par son pôle et en imposant à son contour apparent vu du pôle d'être une hypocycloïde à trois rebroussements. On part donc des ellipses de la surface romaine passant par son pôle et tangentes au tétraèdre circonscrit, en un point du cercle inscrit dans la face opposée, le plan tangent au pôle étant parallèle à cette face. On déforme cette ellipse dans son plan en ne modifiant pas la tangente au pôle mais en modifiant son intersection avec la face du tétraèdre opposé au pôle (Fig. 16).

Il existe un plan particulier perpendiculaire à l'axe de symétrie ternaire de la surface de Boy qui la coupe, selon les dessins de BOY, suivant une courbe décomposée en un ovale et une composante à trois points doubles, ce plan étant le plan des cols relativement à la cote définie par l'axe de symétrie (Fig. 17). Imposer le degré minimum à cette courbe revient à dire qu'il s'agit d'un cercle et d'une *hypocycloïde à trois rebroussements allongée*.

Le plan particulier correspondant sur la surface romaine est justement le plan de la face du tétraèdre opposée au pôle. Il est alors naturel de faire passer les nouvelles ellipses par le cercle inscrit dans la face du tétraèdre et de leur faire recouper cette face suivant une hypocycloïde à trois rebroussements allongée, ses trois points doubles pouvant être choisis sur le cercle et sur les mêmes rayons que les rebroussements du contour apparent vu du pôle.

Dans le cas de la surface romaine, la paramétrisation canonique fait de chacune de ces ellipses l'image d'une droite projective passant par l'antécédent du pôle. Or les plans des ellipses enveloppent un cône de sommet au pôle et dont la base située dans la face du tétraèdre opposée au pôle est une hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite au cercle de contact de la romaine avec cette face. Les droites projectives passant par l'antécédent du pôle sont donc représentées par les tangentes à l'hypocycloïde que l'on repère par leur angle polaire $-\theta$. On repère le plan de l'ellipse par l'origine 0 au pôle, le vecteur $\vec{j}(\theta)$ déterminé par l'intersection J de l'ellipse

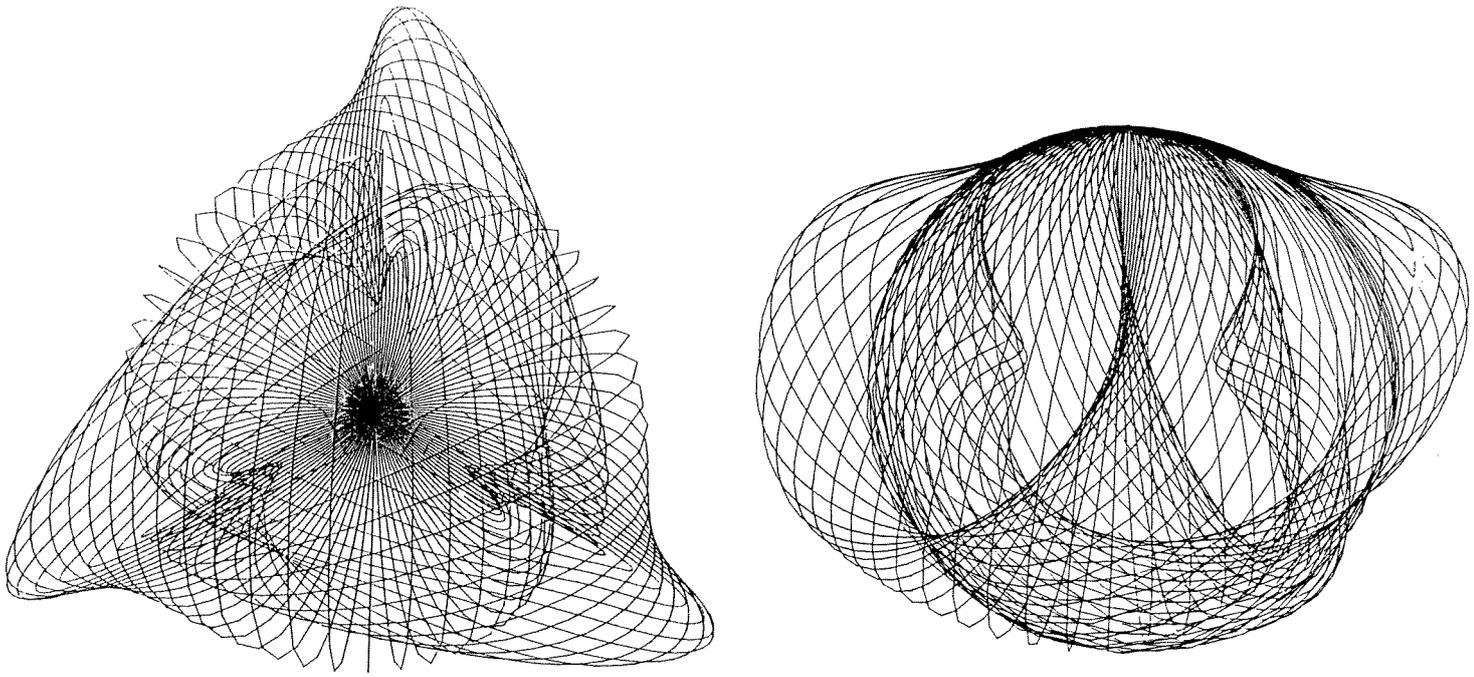


Fig. 15 : Surface de Boy, d'après la paramétrisation de B. Morin

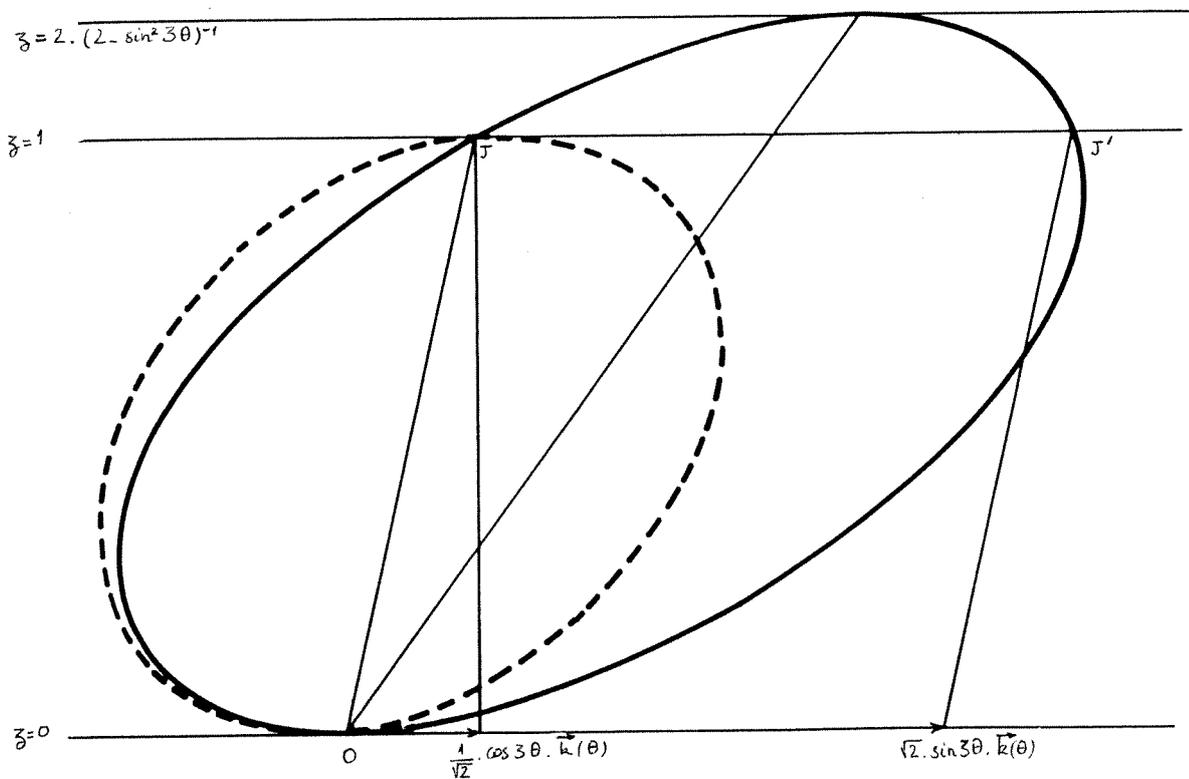


Fig. 16 : Ellipse de la surface romaine (en pointillé) et ellipse correspondante de la surface de Boy (en gras)

et du cercle inscrit dans l'hypocycloïde et le vecteur $\vec{k}(\theta)$ d'angle polaire $-\theta$ et de longueur $\sqrt{2}$ fois le rayon du cercle inscrit dans l'hypocycloïde (Fig. 18). On paramètre alors un point de l'ellipse par le quotient t de son ordonnée par son abscisse dans le repère $(0, \vec{j}(\theta), \vec{k}(\theta))$. Nous obtenons la paramétrisation suivante d'un point M de la surface

$$\vec{OM} = f(\theta, t) \cdot (\vec{j}(\theta) + t \cdot \vec{k}(\theta)).$$

Dans le cas de la surface romaine on a

$$f(\theta, t) = (1 + t^2)^{-1/2}$$

Pour obtenir une paramétrisation de la surface de Boy, il faut perturber le facteur $f(\theta, t)$ en respectant les contraintes décrites précédemment. Le fait que M décrive, pour θ constant, une conique tangente en 0 à $\vec{k}(\theta)$ implique pour $f(\theta, t)$ la forme suivante

$$f(\theta, t) = (a(\theta) - t \cdot b(\theta) + t^2 \cdot c(\theta))^{-1/2} \quad \text{où } c(\theta) \text{ ne s'annule pas.}$$

Pour $t = 0$ le vecteur \vec{OM} est égal à $\vec{j}(\theta)$ donc $a(\theta) = 1$.

La conique recoupe le plan du cercle au point pour lequel le paramètre t vérifie $f(\theta, t) = 1$ c'est-à-dire

$$t = b(\theta) \cdot c^{-1/2}(\theta).$$

Le point J' correspondant est donné par

$$\vec{OJ}' = \vec{j}(\theta) + b(\theta) \cdot c^{-1/2}(\theta) \vec{k}(\theta).$$

La quantité $\sqrt{2} \cdot b(\theta) \cdot c^{-1/2}(\theta)$ représente donc la longueur à porter sur la tangente orientée par $\vec{k}(\theta)$ à partir du point de contact J du cercle inscrit dans l'hypocycloïde avec le cercle de même rayon l'engendrant mécaniquement par roulement sans glissement à l'intérieur d'un cercle de rayon triple (Fig. 18). Si cette quantité est nulle le point J' décrit le cercle inscrit dans l'hypocycloïde, c'est le cas de la surface romaine, si la quantité vaut $2 \cos(3\theta)$ le point J' décrit l'hypocycloïde.

Pour que J' décrive l'hypocycloïde à trois rebroussements allongée cherchée, on choisit un terme de la même période mais en quadrature de phase avec $2 \cos 3\theta$, c'est-à-dire

$$b(\theta) c^{-1/2}(\theta) = \sqrt{2} \sin 3\theta$$

Il subsiste un degré de liberté que l'on fixe arbitrairement en posant $c(\theta) = 1$. Il reste alors à effectuer un calcul algébrique pour montrer que l'on obtient ainsi une surface algébrique réelle du sixième degré ayant toutes les caractéristiques topologiques de la surface de Boy (Fig. 19). Voici son équation :

$$64(T-Z)^3 Z^3 - 48(T-Z)^2 Z^2 (3X^2 + 3Y^2 + 2Z^2) + 12(T-Z)Z [27(X^2 + Y^2)^2 - 24Z^2(X^2 + Y^2) + 36\sqrt{2}YZ(Y^2 - 3X^2) + 4Z^4] + (9X^2 + 9Y^2 - 2Z^2) [-81(X^2 + Y^2)^2 - 72Z^2(X^2 + Y^2) + 108\sqrt{2}XZ(X^2 - 3Y^2) + 4Z^4] = 0$$

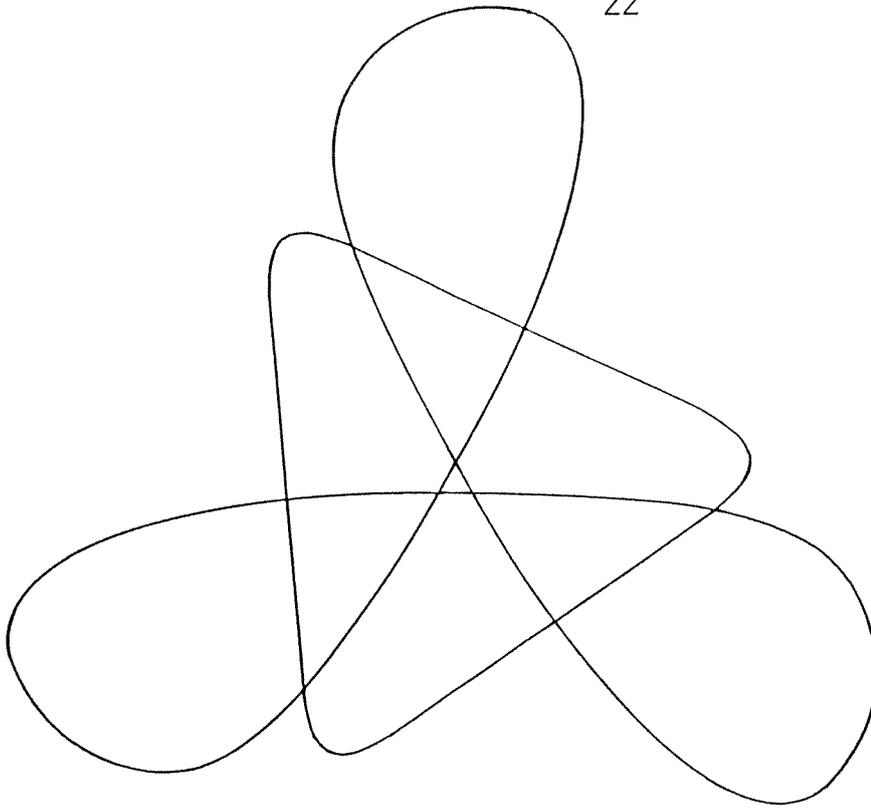


Fig. 17 : Courbe d'auto intersection de la surface de Boy avec son plan des cols relativement à la fonction hauteur définie par l'axe de symétrie ternaire

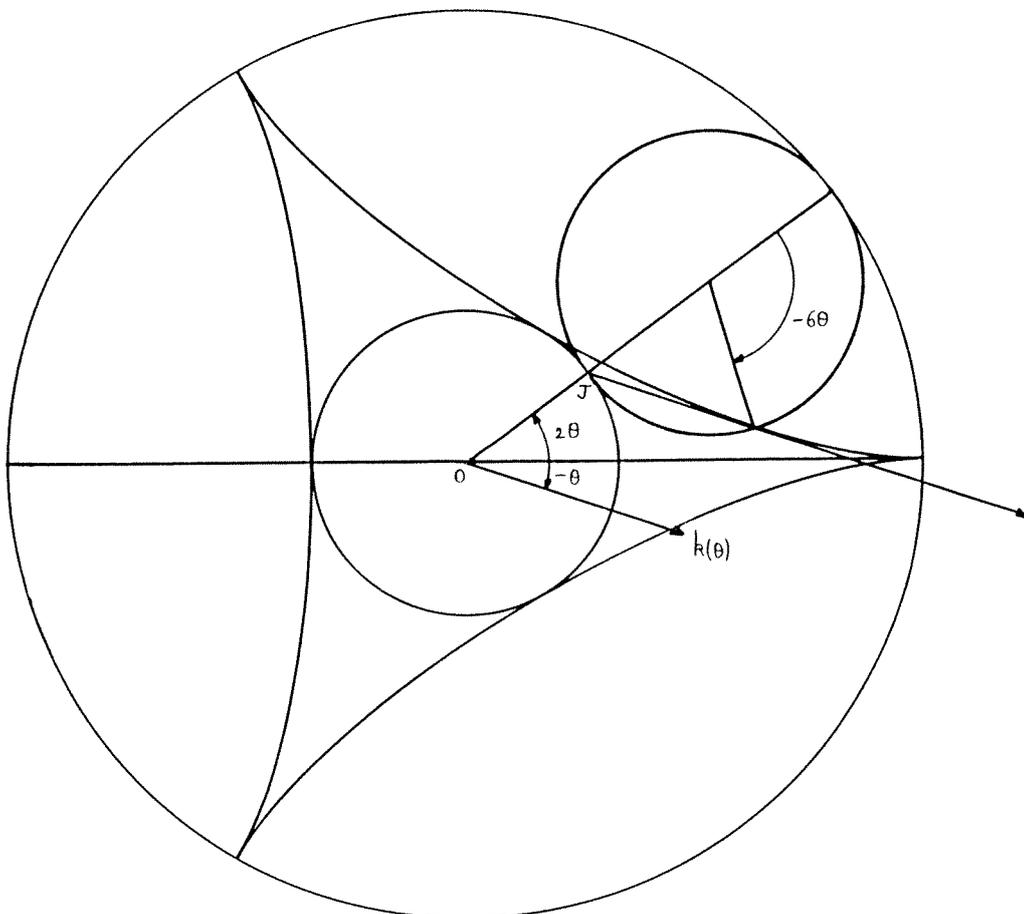
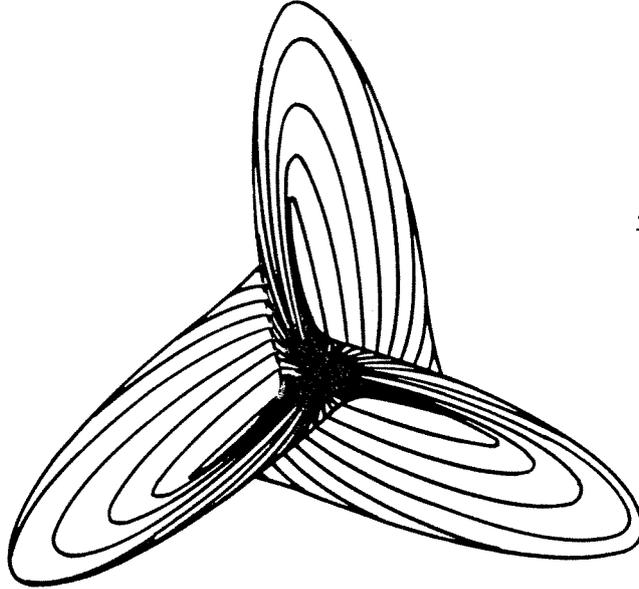


Fig. 18 : Génération mécanique de l'hypocycloïde à trois rebroussements

En adjoignant au facteur $\sqrt{2} \sin 3\theta$ un paramètre multiplicatif on réalise algébriquement la confluence hyperbolique des trois paires de bonnets croisés de la surface romaine conduisant à la surface de Boy.



*Fig. 19 : Surface de Boy
du 6^o degré*

5. CONCLUSION À L'ITALIENNE

La méthode utilisée par BOY pour construire sa surface est de nature purement géométrique et relève uniquement de ce que l'on appelait à l'époque l'analysis situs, mais comme nous l'avons signalé, l'absence de données algébriques ou même numériques a pu être de nature à troubler la conviction de certains mathématiciens. Ainsi en 1924 trouve-t-on un article de Friedrich SCHILLING reconstruisant la première surface trouvée par BOY, en commençant par vider le travail de ce dernier de toute sa substance mathématique, pour n'en garder que la famille des sections planes parallèles à laquelle il ajoute des cotes en millimètres permettant la réalisation d'un modèle.

De telles méthodes empiriques, quelle que soit la valeur picturale des modèles dont elles permettent la réalisation, ne peuvent en aucune manière se substituer à une construction mathématique telle que celle de BOY par exemple.

On peut se demander en conclusion par quel hasard, en cette époque de première floraison de la géométrie algébrique "à l'italienne", personne ne s'est trouvé pour feuilleter en détail le bestiaire des surfaces algébriques du sixième degré (BOY savait que sa surface, si elle était algébrique, était au moins du sixième degré), avec l'intention d'y trouver une surface répondant au problème de HILBERT. Par exemple une étude systématique des surfaces du sixième degré engendrées par des coniques avait été faite par Th. REYE en 1896.

RÉFÉRENCES

La représentation de la surface de BOY comme surface du sixième degré est résolue dans mon travail :

F. APERY - La surface de Boy - Thèse de 3ème cycle
Publication de l'I.R.M.A. Strasbourg (1984)

On pourra consulter les références suivantes concernant les auteurs cités dans le texte :

- W. BOY - Über die Curvatura integra u.d Topologie geschlossener Flächen,
Math. Ann. 57, 151-184 (1903)
- G. DARBOUX - Théorie des surfaces, Gauthier-Villars (1914)
- M. FREGIER - Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre,
Annales de Gergonne t. VI n° VIII 1er février 1816
- E. KUMMER - Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von
Kegelschnitten liegen, J. für die reine und ang. Math. 64, 66-76 (1865)
- B. MORIN - Equations du retournement de la sphère, CRAS série A Paris,
t. 287, 879-882 (1978)
- J.-P. PETIT et J. SOURIAU - Une représentation analytique de la surface de
Boy, CRAS série I, t. 293, 269-272 (1981)
- Th. REYE - Über quadratische Transformationen und rationale Flächen mit
Kegelschnittschaaren, Math. Ann. 48, 113-141 (1896)
- F. SCHILLING - Über die Abbildung der projektionen Ebene auf eine geschlossene
singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes
Math. Ann. 92, 69-79 (1924)
- K. WEIERSTRASS - Zwei specielle Flächen vierter Ordnung, Jacob Steiner's
Gesammelte Werke Bd II, S. 741-742.