LE PARADOXE DE SCHWARZ

J. LEFORT

1. GÉNÉRALISATION D'UNE IDÉE D'ARCHIMÈDE

On sait, depuis Archimède, que pour calculer la longueur d'une courbe (plane ou non) on l'approche par des lignes polygonales inscrites telles que sur tout arc de la courbe le nombre des sommets ne soit pas borné supérieurement.

C'est par cette méthode bien pratique qu'Archimède put calculer une valeur approchée de π.

Essayons de généraliser cette démarche au cas des surfaces dans l'espace de dimension trois. Approchons une surface (suffisamment régulière) par des polyèdres inscrits tels que sur toute portion de cette surface le nombre de sommets ne soit pas borné supérieurement.

Pour des raisons pratiques, puisque trois points déterminent un plan, on a intérêt, dans le cas le plus général, à prendre des polyèdres dont les faces sont des triangles.

2. CYLINDRE ET ANTIPRISME

Appliquons cela à un cas bien connu : le cylindre, ou plutôt le tronc de cylindre, de rayon R et de hauteur H. Approchons-le par un empilement d'antiprisme de hauteur $h = \frac{H}{m}$ et dont les bases sont des polygones réguliers à n côtés. Quand m et n tendent vers l'infini, le polyèdre approche le cylindre au sens précédent.

> Rappelons qu'un antiprisme est le solide formé de deux polygones réguliers à n côtés, de même axe, tournés de $\frac{\pi}{n}$ radians l'un par rapport à l'autre. Les arêtes s'obtiennent en joignant chaque sommet de l'un des polygones à ses deux plus proches voisins de l'un et l'autre polygônes, comme on le voit sur la figure 1.

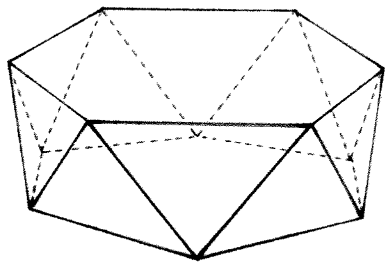

Fig. 1

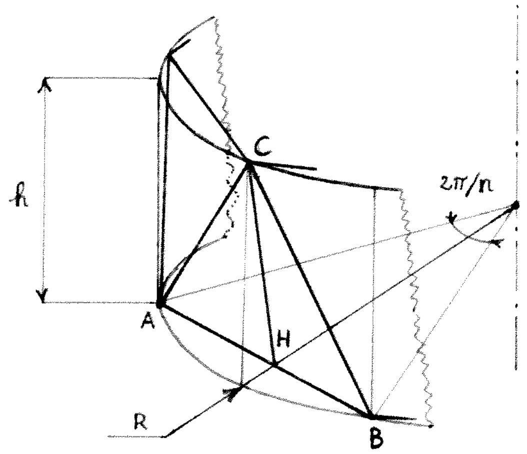

Fig. 2

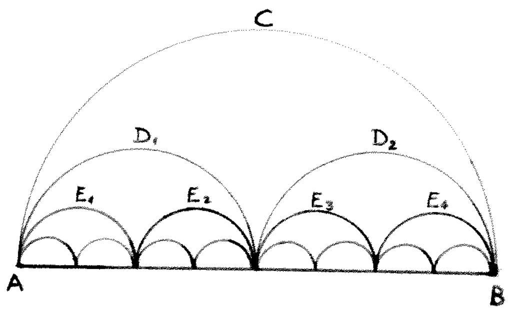

Fig. 3

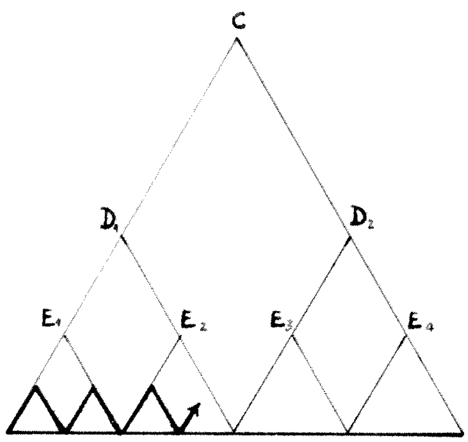

Fig. 4

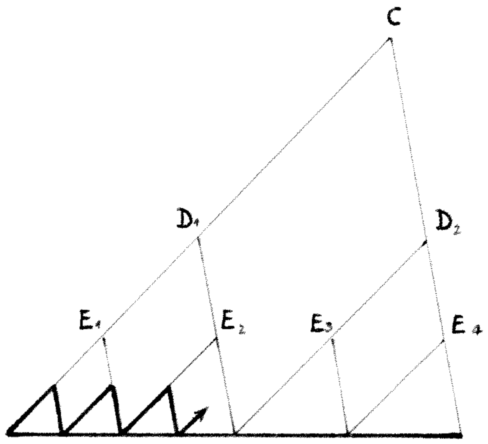

Fig. 5

Calculons l'aire latérale d'un antiprisme de hauteur h inscrit dans un cylindre de rayon R (Fig. 2).

Il y a 2n faces telles que ABC qui sont des triangles isocèles de base

$$AB = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

et de hauteur

$$HC = \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

L'aire latérale vaut donc :

$$2nR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

et comme on empile m tels tels antiprismes, on obtient pour l'aire latérale du polyèdre approchant le cylindre :

$$2nm\, R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

et en remplaçant h par sa valeur $\frac{H}{m}$:

$$S = 2nR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + m^2 R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

3. QUAND LES BORNES SONT DÉPASSÉES IL N'Y A PLUS DE LIMITE

Quand n et m tendent vers l'infini, le premier facteur $2nR \sin \frac{\pi}{n}$ tend vers $2\pi R$, mais la quantité sous le radical a un comportement étrange ! Pour n grand, $(1 - \cos \frac{\pi}{n})$ se comporte comme $\frac{\pi^2}{2n^2}$ et par conséquent, le deuxième facteur

$$\sqrt{H^2 + m^2R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

a même limite que

$$H\left(1 + \frac{m^2}{n^4} \frac{R^2 \pi^4}{4H^2}\right),$$

ce qui prouve qu'elle peut prendre une valeur quelconque entre H et $+\infty$ (tout dépend de la limite éventuelle de $\frac{m^2}{n^4}$).

Finalement, cette généralisation de l'idée d'Archimède, conduit à attribuer à l'aire latérale du cylindre de révolution une valeur quelconque entre $2\pi RH$ (qui est la "bonne" valeur) et $+\infty$! Autant dire qu'il n'y a pas de limite, bien que sur toute portion du cylindre le nombre de sommets ne soit pas borné supérieurement ! Que s'est-il passé ?

4. Retour au plan

On a approché une courbe par une ligne polygonale. Mais pourquoi avoir choisi des segments de droites ? Sans doute parce que leur longueur est relativement plus facile à calculer et que, en inventant cette méthode, Archimède n'allait pas utiliser des arcs de cercles pour calculer la longueur du cercle !

Imaginons cependant que l'on décide d'approcher une ligne droite par des arcs de cercle. La figure 3 montre que le segment AB est approché par ACB, puis par AD_1D_2B puis $AE_1E_2E_3E_4B$... etc... Or, la longueur de ces lignes est toujours la même et vaut πR alors que AB vaut 2R !

On aurait pu effectuer un raisonnement analogue avec des triangles équilatéraux (voir Fig. 4). La limite de la ligne polygonale est AB mais sa longueur vaut toujours 2a alors que AB = a !

On sent bien qu'en choisissant convenablement la ligne qui approche AB (Fig. 5) la longueur de celle-ci peut avoir pour limite un nombre arbitraire supérieur ou égal à la longueur de AB. C'est bien la même situation que dans le cas du cylindre.

5. Une nouvelle définition

Si finalement on ne peut jamais obtenir un nombre inférieur à la valeur connue tant pour les aires que pour les longueurs, modifions ainsi les définitions correspondantes :

Dans toutes les définitions précédentes, remplaçons partout la limite par la **limite inférieure** de la longueur (de l'aire) de toutes les lignes (les surfaces) inscrites qui approchent la courbe (la surface) donnée quand le nombre de sommets tend vers l'infini sur toute portion de la courbe (de la surface).

Ces définitions qui requièrent la notion de limite inférieure, sont plus délicates mais nécessaires si l'on veut éviter le paradoxe de Schwarz mis en évidence dans le cas du cylindre.

6. Où l'approche qualitative permet de mieux comprendre

On peut essayer de voir les choses d'un peu plus près, surtout si l'on est savant et que l'on aime bien les calculs analytiques. On sait que la longueur d'une courbe paramétrée dans un repère orthonormé par : $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$

est donnée par :

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

et que l'aire d'une surface paramétrée dans ce même repère par $(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, est donnée par :

$$\iint \sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\, du\, dv$$

où, par exemple,

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ces calculs montrent que l'important est de connaître, par delà les fonctions x, y, z, leurs **dérivées**. Or qui dit dérivées, dit directions. On devine alors que si on remplace la surface par une surface approchée, il est impératif que cette dernière le soit non seulement en position, ce qui est assuré par le choix de polyèdres inscrits, mais aussi en direction, ce qui n'est pas toujours le cas pour des polyèdres inscrits. Et c'est là que se trouve la clef du paradoxe de Schwarz :

En reprenant la figure 2, on remarque que quand h tend vers O, c'est-à-dire quand m tend vers l'infini, alors le triangle ABC, face latérale d'un antiprisme, s'incline de plus en plus par rapport à l'axe du cylindre, donc à ses génératrices. Cela reste vrai même si n tend aussi vers l'infini, pour peu qu'il le fasse nettement moins vite que m. Si donc les antiprismes approchent le cylindre en position, ils ne le font pas en direction ou du moins pas toujours.

Il est heureux pour Archimède et ses successeurs, que dans le cas des courbes, les polygônes inscrits fassent les deux (approche en position et en direction). Comme quoi le passage de la dimension 2 à la dimension 3 n'est pas toujours une simple généralisation.

Bibliographie : Henri LEBESGUES "La mesure des grandeurs"
Blanchard, réédition 1975