REACTION EN CHAINE...

Michel de COINTET

Le directeur de l'I.R.E.M. m'avait signalé un exercice intéressant pour mes élèves : "Calculer $9x^4 - y^4 + 2y^2$ lorsque $x = 10814$ et $y = 18817$".

C'est donc ce que je fis, à la fin d'une séance d'entraînement à la manipulation des calculatrices, en classe de Seconde. Cela créa un certain émoi car il y eut autant de résultats que de types de calculatrices ; c'était bien pour cela que j'avais posé cet exercice ! La conduite de ce calcul dépassant les capacités des calculatrices il faillait s'en tirer autrement : une semaine après, deux élèves me proposèrent les solutions suivantes :

① $\frac{18817}{10864} = \sqrt{3}$ (je l'ai trouvé "à la calculatrice").
donc $18817^4 = 9 \times 10864^4$
donc pour $x = 10864$ et $y = 18817$, $9x^4 - y^4 + 2y^2 = 2y^2 = 708\ 158\ 978$.

② $9x^4 - y^4 + 2y^2 = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$
or pour $x = 10864$ et $y = 18817$, $3x^2 - y^2 = -1$ ("à la calculatrice")
donc pour ces valeurs de x et y, $9x^4 - y^4 + 2y^2 = -(3x^2 + y^2) + 2y^2$
$= -3x^2 + y^2 = 1$

Quelle aubaine ! Le second avait résolu le problème ; le premier apportait tout ce qu'il fallait pour montrer à quelle catastrophe numérique on était conduit lorsqu'on abusait du signe d'égalité : une erreur supérieure à sept cent millions "à l'arrivée" pour une erreur bien inférieure au millionième "au départ" ! Tout cela parce que la calculatrice affiche : 1,7320508 tant pour $\sqrt{3}$ que pour $\frac{18817}{10864}$ ...
Quelle aubaine pour convaincre les élèves de ne pas confondre un nombre irrationnel et une valeur décimale dite "approchée".

Mais ce n'est pas tout car Jean Martinet me signala sur ces entrefaits, que $\frac{18817}{10864}$ était sûrement une fraction réduite de $\sqrt{3}$.

Je retrouvais rapidement l'article de notre collègue J. GOERG "Introduction aux fractions continues" paru dans "l'Ouvert" n° 11 ; et je pus proposer à nos élèves l'exercice suivant :

Exercice 1

a) $\sqrt{3}$ est solution de $x^2 = 3$, donc de $x^2 - 1 = 2$, donc de $x - 1 = \frac{2}{x+1}$ donc de $x = 1 + \frac{2}{x+1}$;
En déduire que $\sqrt{3}$ est solution de $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + x}}$

b) On considère la suite des nombres formés de la façon suivante : le premier, noté $f_0 = 1$; le second noté $f_1 = 2$; pour les suivants : chacun noté f_n, est calculé à partir du précédent du précédent, noté f_{n-2} par la formule : $f_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + f_{n-2}}}$

Questions :
1) Donner une expression plus simple de f_n en fonction de f_{n-2} ;
2) Calculer f_2 , f_3 , . . . , f_{14} , f_{15} , sous forme de fraction irréductible ;
3) Donner les valeurs , , . . . , de chacune de ces fractions qu'affichent votre calculatrice.

Bien sûr, $f_{15} = \frac{18817}{10834}$! ! !

Mais ce procédé d'approximation est tout de même un peu long. Que donnerait celui de Newton ? Oh miracle, en prenant 2 comme valeur initiale, la suite de Newton est constituée de fractions réduites de $\sqrt{3}$ et le quatrième (!) terme de la suite est $\frac{18817}{10864}$. Je ne résistai pas au plaisir de compléter le précédent exercice par :

Exercice 2

a) Vérifier que $\sqrt{3}$ est solution de $x = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$

b) On considère la suite des nombres formés de la façon suivante : le premier noté $F_1 = 2$; pour les suivants : chacun, noté F_p, est calculé à partir du précédent, noté F_{p-1} par la formule :

$$F_p = \frac{1}{2}\left(F_{p-1} + \frac{3}{F_{p-1}}\right)$$

Question :

Calculer F_2 , F_3 , F_4 .

Mais ce n'est pas fini, car l'équation $3x^2 - y^2 = -1$ dont (10864, 18817) est une solution, est une équation de Fermat-Pell (article de notre collègue Stoltz dans "l'Ouvert" n° 12). Voilà de quoi proposer à mes élèves :

Exercice 3

a) Montrer que si (a,b) est solution de $3x^2 - y^2 = -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, (a_n, b_n) défini par

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{(a + b\sqrt{3})^n - (a - b\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \\ \\ b_n = \dfrac{(a + b\sqrt{3})^n + (a - b\sqrt{3})^n}{2} \end{cases}$$

est solution de cette même équation.

b) Le couple (1, 2) est solution de cette équation. On pose a = 1 ; b = 2.
Calculer, sans calculatrice, mais en utilisant les identités remarquables :
(a_0 , b_0) ; (a_1 , b_1) ; (a_2 , b_2) ; (a_3 , b_3).
Calculer à l'aide de votre calculatrice : (a_8 , b_8).

Bien sûr, on trouve $a_8 = 10864$ et $b_8 = 18817$!!!

N.B. : Pour tout n, $\frac{b_n}{a_n}$ est une fraction réduite de $\sqrt{3}$: ceci est un résultat plus général sur lequel je tombais fortuitement, en consultant "Analyse, volume 1" de Léonhard Epistémon, rédigé par J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, livre original et passionnant paru en 1983 chez Cédic/Nathan.

Dommage que la formule du binôme ne soit pas au programme de Seconde car on peut calculer a_8 et b_8 en l'utilisant et en se passant de calculatrice !

Voilà une piste suivie par hasard, au gré des rencontres de professeurs et d'élèves qui s'est avérée riche d'enseignements pratiques (il y a beaucoup à calculer) et théoriques (approximation d'un réel au moyen de suites) !

Pour terminer, une anecdote (!) : à la suite de l'exercice 2, une élève n'ayant pas compris pourquoi $\frac{3}{\sqrt{3}}$ était égal à $\sqrt{3}$, je lui demandais quelle était la définition de $\sqrt{3}$; et de m'entendre dire : "Ben, c'est un-virgule-sept-cent-trente-deux et des poussières" ! Ciel, de quoi revenir sur terre, après avoir eu des ailes ! C'est bien le charme de notre métier, non ?