

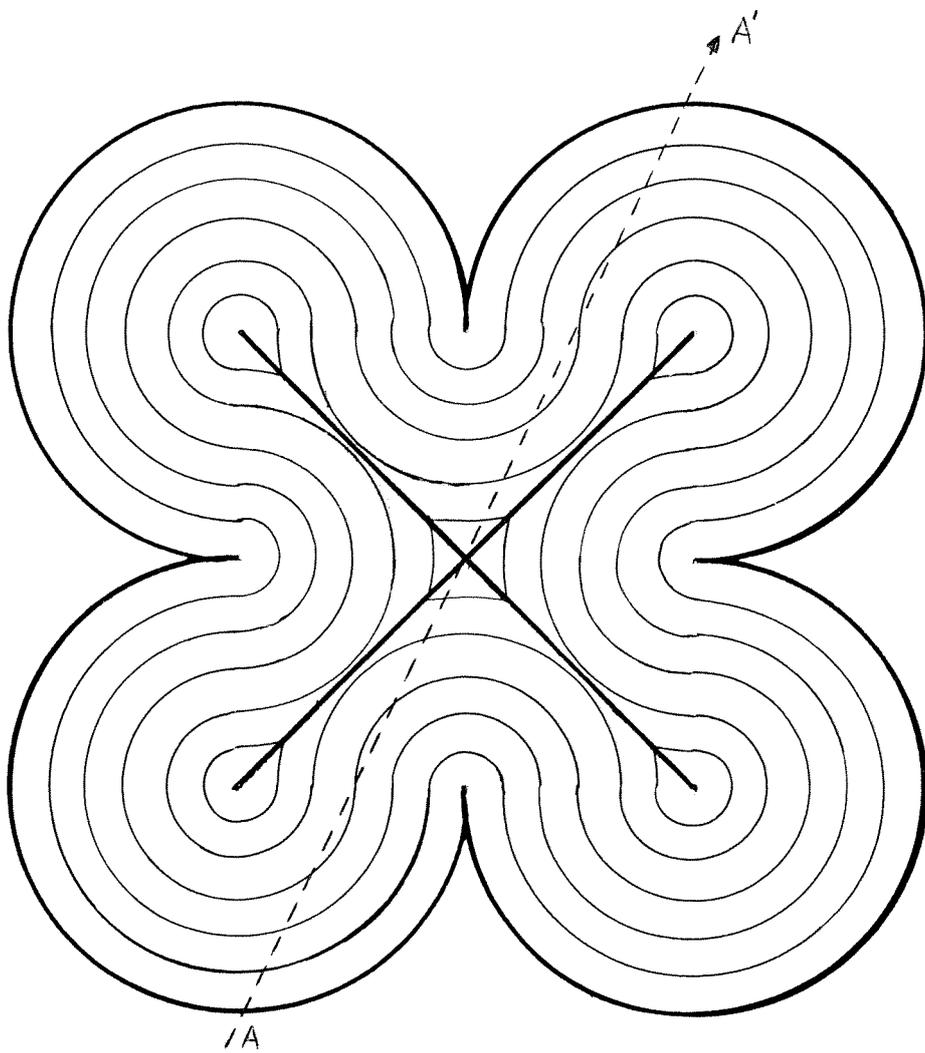
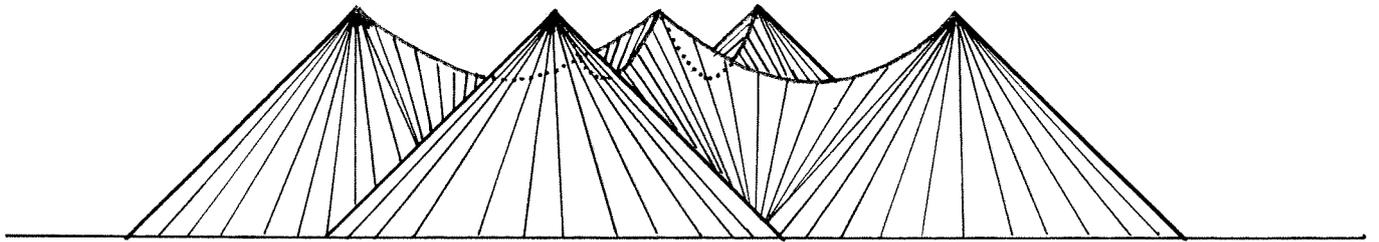
---

# L'OUVERT

---

JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG N° 41 DECEMBRE 1985

---



## NOTRE COUVERTURE :

Cette "île mystérieuse", représentée de profil (vue suivant la direction AA' inclinée de  $30^\circ$  sur l'axe de la feuille) et en plan (avec ses courbes de niveau) est, en fait, un tas de sable que l'on peut obtenir de façon très naturelle. Mais c'est aussi une surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles  $\|\overrightarrow{\text{grad } f}\| = 1$ . Elle est formée de portions de 8 cônes de révolution qui se raccordent ou se coupent suivant des lignes de "crête".

## EDITORIAL

Eric Chaney quitte l'Education Nationale pour l'INSEE. Du même coup, il quitte l'Ouvert auquel il a su donner une ouverture interdisciplinaire. Changement ! Il faut assurer le relais et provisoirement – pour cette année du moins – je reprends le flambeau. Continuité ! Il est indispensable qu'un groupe s'occupe de l'Ouvert. C'est un travail qui doit être et qui sera rémunéré, mais il n'est pas bon – et cela se vérifie pour la deuxième fois – que l'Ouvert repose sur une seule personne, quelles que soient ses compétences, et même si Mme E. Le Guyader assure avec intelligence toute la partie concernant le secrétariat. Changement à venir, l'Ouvert recrute !

"Les mathématiques, voilà la discipline à abattre." "Nous manquons de scientifiques, il faut développer l'enseignement des sciences." Discours ministériel que comprendra qui pourra ! Projet de réduction drastique des horaires de mathématiques en lycée (deux types de seconde : 2 heures en section littéraire, 4 heures en section scientifique, passage à 6 heures au lieu de 9 heures en TC...). Changement ou plutôt continuité dans la recherche d'économies à court terme.

La France est à la 3ème place mondiale, presque à égalité avec l'URSS en ce qui concerne la recherche mathématique. Est-ce un mal ? Mais quelle sera l'influence de ces réductions d'horaires ? Sûrement pas une amélioration de notre situation planétaire ni nationale (le déficit en enseignants de mathématiques est de plus en plus grand).

Changements et continuité ; essayons en tant que professeurs de prendre nos responsabilités et au delà des fluctuations de l'économie et des gouvernements, d'intéresser le plus grand nombre d'élèves à la science et à notre discipline en particulier. Cela nous demande souvent une remise en question et du recul par rapport aux programmes. Mais le jeu en vaut la chandelle.

Bon courage !

Jean Lefort

III  
SOMMAIRE

* NOTRE COUVERTURE	P. I
* EDITORIAL	P. II
* SABLE ET MATHEMATIQUE par R. ISS	P. 1
* 1, 2, 3, 4, ... par J. LEFORT	P. 10
* PRETENDUES ASYMPTOTES ET VRAIES EQUATIONS par E. CHANEY	P. 22
* LES FICHES CUISINES DE TONTON LULU QU'EST-CE QU'UN PETIT GROS ? par J. LUBCZANSKI	P. 27
* DE L'ENTREE EN 6 <sup>e</sup> AU PASSAGE EN 1 <sup>ère</sup> Examens de passage dans l'Académie	P. 38
* INFORMATION : RENCONTRE C.I.E.A.E. M. : 24-30 juillet 1986	P. 44
* COURRIER	P. 45

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

- . Responsable de la publication : J. Lefort
- . Correspondance à adresser à :  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG CEDEX
- . Abonnement (pour 4 numéros annuels) :  
80.- F pour l'Alsace  
106.- F pour les autres départements français  
95.- F pour l'étranger
- . Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

Au cours de l'année scolaire 1980-81, le Rallye Mathématique d'Alsace – dont j'étais à l'époque l'un des organisateurs – avait proposé aux élèves de Seconde et de Première le problème suivant :

" Si on charge, à refus, avec du sable, une plateforme horizontale qui a des bords rectilignes, le tas de sable obtenu n'a que des faces planes dont l'angle avec le plan horizontal est constant. Le dessin ci-contre est le plan d'une plateforme rectangulaire, percée d'un trou carré (fig. 1a). Représenter à l'échelle 1/100e et vue d'en haut, cette plateforme supposée horizontale et chargée de sable."

Le corrigé qui en avait été donné conduisait au dessin de la figure 1b.

Un collègue m'ayant, par la suite, signalé son désaccord, je m'étais promis de revoir la question. Un séjour récent près d'une plage de sable fin m'a remis le problème en mémoire et j'en ai profité pour me livrer à quelques expériences sur le sable. J'ai pu constater ainsi que, si notre exercice de Rallye était irréprochable sur le plan mathématique, ses hypothèses étaient à revoir sur le plan de la physique. S'il est, en effet, exact qu'un tas de sable est limité par des faces planes lorsque sa base est un polygone convexe, les choses sont plus compliquées dans tous les autres cas. La petite étude mathématique à laquelle je me suis livré m'a conduit à des résultats dont j'ai pensé qu'ils pouvaient intéresser les lecteurs de "l'Ouvert".

#### UNE DEFINITION MATHEMATIQUE DES TAS DE SABLE

Les "tas de sable" dont il sera question sont obtenus en chargeant une plaque plane, horizontale et surélevée avec du sable. Celui-ci s'accumule jusqu'à un moment où tout le sable que l'on rajoute coule et tombe de la plaque. Le tas de sable a pris alors une forme invariable, indépendante de la manière dont on charge la plateforme.

On appellera "surface TS" toute surface délimitant un tel tas de sable. L'observation conduit à formuler deux hypothèses physiques :

1. Si un grain de sable roule ou glisse à la surface d'un tas de sable, il décrit une ligne de pente (1) de celle-ci.

2. Un grain de sable, posé sans vitesse initiale sur un tas de sable, roule et glisse si et seulement si la tangente à la ligne de pente fait avec le plan horizontal un angle au moins égal à une valeur constante  $\alpha$ .

Cet angle  $\alpha$  dépend de différents facteurs physiques : taille et forme des grains, degré d'humidité, etc. Pour simplifier les calculs et sans restreindre leur généralité, nous supposons  $\alpha = 45^\circ$  dans toute cette étude (cet angle mesurait environ  $32^\circ$  pour le sable que j'ai utilisé).

Dans ces conditions, nous adopterons la définition suivante :

Etant donné un plan fixe (dit horizontal) une surface TS est telle qu'en tout point la tangente à la ligne de pente, passant par ce point et relative au plan horizontal, fait avec celui-ci un angle de  $45^\circ$ .

Bien entendu, comme c'est souvent le cas en physique, nos hypothèses ne traduisent la réalité qu'avec une certaine approximation. La trajectoire d'un grain de sable, rectiligne en apparence, est, en réalité, fort sinueuse. Une étude plus précise nous amènerait sans doute dans le domaine des "fractals"... Mais, à l'échelle du décimètre – celle de nos manipulations – elles rendent parfaitement compte des phénomènes observés. Peut-être s'appliquent-elles aussi, à l'échelle de l'hectomètre, aux dunes du Sahara et aux grands pierriers alpins ?

## PROPRIETES DES SURFACES TS

On supposera, pour la mise en équations, que le plan horizontal est le plan Oxy d'un repère orthonormé Oxyz et que les surfaces considérées sont deux fois continuellement dérivables.

---

(1) ligne de pente d'une surface par rapport à un plan horizontal : courbe tracée sur la surface, telle qu'en chacun de ses points, la tangente est droite de plus grande pente du plan tangent en ce point.

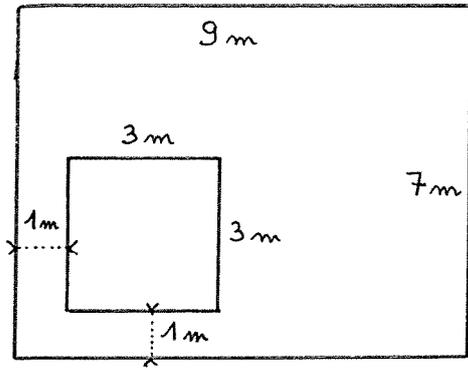


Fig. 1a

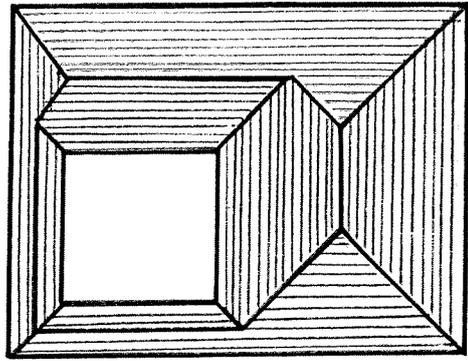


Fig. 1b

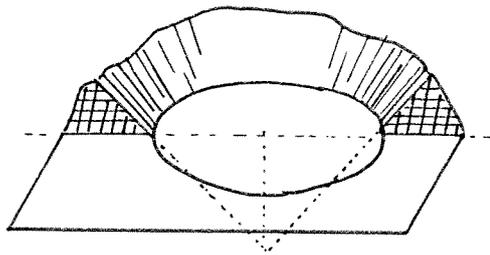
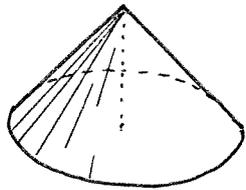


Fig. 2

1ère proposition : Une surface d'équation  $z = f(x, y)$  est une surface TS si et seulement si elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad f'_x{}^2 + f'_y{}^2 = 1$$

(ou, en d'autres termes  $\|\overrightarrow{\text{grad } f}\| = 1$ ).

En effet, dans le plan tangent d'équation

$$Z - z = f'_x (X - x) + f'_y (Y - y)$$

une droite de plus grande pente a pour paramètres

$$f'_x, f'_y, f'_x{}^2 + f'_y{}^2.$$

En écrivant qu'elle fait un angle de  $45^\circ$  avec le plan Oxy (donc aussi avec Oz), on obtient la condition nécessaire et suffisante : (1)  $f'_x{}^2 + f'_y{}^2 = 1$ .

2ème proposition : Les lignes de pente d'une surface TS sont des droites.

Si on représente une ligne de pente par des équations de la forme :

$$X = t \quad Y = \varphi(t) \quad Z = f(t, \varphi(t))$$

avec  $\varphi'(t) = \frac{f'_y}{f'_x}$ , on constate que le vecteur  $\overrightarrow{V}(f'_x, f'_y, 1)$

qui dirige la tangente à cette ligne de pente, est constant tout le long de celle-ci.

(Calculer la dérivée de  $\overrightarrow{V}$  en tenant compte des relations obtenues en dérivant l'équation (1)).

3ème proposition : Toute surface TS est une surface développable dont l'arête de rebroussement est une hélice.

Le vecteur  $(f'_x, f'_y, -1)$  normal à la surface est, lui aussi, constant le long d'une ligne de pente. Le plan tangent ayant une direction fixe tout le long de cette droite et la contenant, il est le même en tout point de celle-ci. La surface TS est donc développable et ses génératrices sont tangentes à une même courbe, l'arête de rebroussement. Celle-ci est une hélice, puisque ses tangentes font un angle de  $45^\circ$  avec Oz.

Corollaire : Les projections sur le plan Oxy des courbes de niveau d'une surface TS sont des courbes parallèles ; leur développée commune est la projection sur Oxy de l'arête de rebroussement de la surface.

La réciproque de la proposition 3 se démontre aisément. On a donc, incidemment, établi le théorème suivant :

Les surfaces  $z = f(x, y)$  intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$f'_x{}^2 + f'_y{}^2 = 1$$

sont les surfaces développables dont l'arête de rebroussement est une hélice pour la direction Oz et l'angle  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

#### EQUATIONS D'UNE SURFACE TS

4ème proposition : Une surface TS peut être représentée paramétriquement par des équations de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} x = x'_0(\theta) + z \cos \theta \\ y = y'_0(\theta) + z \sin \theta \end{cases}$$

avec la condition (3)  $x'_0 \cos \theta + y'_0 \sin \theta = 0$ .

Toute droite D faisant un angle de  $45^\circ$  avec l'axe Oz est susceptible d'une représentation de la forme

$$x = x'_0 + z \cos \theta \quad y = y'_0 + z \sin \theta$$

$\theta$  étant l'angle polaire de sa projection sur Oxy.

En faisant varier  $x'_0$  et  $y'_0$  en fonction de  $\theta$ , on obtient la représentation d'une surface réglée. La droite D en est une ligne de pente si et seulement si elle est orthogonale aux horizontales de la surface (dont les tangentes ont pour paramètres  $x'_0 - z \sin \theta$ ,  $y'_0 + z \cos \theta$ , 0) c'est-à-dire si la condition (3) est vérifiée.

La courbe  $x = x'_0(\theta)$ ,  $y = y'_0(\theta)$ ,  $z = 0$  est l'horizontale de cote 0 : c'est le bord de la plateforme portant le tas de sable. Nous l'appellerons *courbe directrice* de la surface TS. La relation (3) exprime que la droite D est orthogonale à cette directrice : cette condition, évidemment nécessaire, est donc aussi suffisante.

Nous voilà donc, désormais, en mesure non seulement de donner des équations de toute surface TS dès que l'on connaît celles de sa directrice, mais aussi de fournir une représentation physique de toute surface intégrale (ou tout au moins d'une partie de celle-ci) de l'équation aux dérivées partielles  $\|\overrightarrow{\text{grad}} f\| = 1$ . Citons, pour mémoire, deux cas particuliers pour lesquels la solution est désormais évidente :

- si la directrice est rectiligne, la surface TS est plane ;
- si la directrice est circulaire, la surface TS est un cône de révolution à axe vertical.

## DETERMINATION DU TAS DE SABLE CORRESPONDANT A UNE PLATEFORME DONNEE

Pour pouvoir passer des surfaces TS théoriques à la forme réelle des tas de sable, il nous reste deux problèmes à résoudre.

1er problème : Les équations (2) obtenues ci-dessus définissent en réalité deux nappes symétriques l'une de l'autre par rapport au plan Oxy (changer  $z$  en  $-z$  et  $\theta$  en  $\theta + \pi$ ) mais chacune d'elles correspond bien à un tas de sable. En effet une directrice détermine deux parties complémentaires du plan et chacune d'elles fournit une plateforme. Il y a donc deux tas de sable possibles qui correspondent à la même surface TS, à une symétrie près. Pensons par exemple aux tas de sable qui se forment respectivement sur un disque circulaire et autour du "trou" circulaire correspondant (fig. 2).

Signalons, cependant, que cette propriété de symétrie, vraie si la directrice est de classe  $C^1$ , n'est pas toujours vérifiée (par exemple pour une directrice polygonale).

Pour que les équations (2) représentent la nappe qui nous intéresse,  $\theta$  doit être l'angle polaire de la normale à la directrice, orientée positivement vers l'intérieur de la plaque.

Exemple : Supposons que la directrice soit la parabole  $y_0 = x_0^2$ , la plateforme étant formée par la partie convexe qu'elle détermine dans le plan ( $y \geq x^2$ ).

La condition (3) conduit à la représentation paramétrique de la surface TS :

$$x = z \cos \theta - \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \quad y = z \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{4 \sin^4 \theta}$$

La normale à la parabole, orientée vers la concavité a pour angle polaire  $\theta \in [2\pi]$ . La nappe qui convient est obtenue pour  $\theta \in ]0, \pi[$ .

2ème problème : Un tas de sable n'étant pas illimité, il nous faut déterminer sur chaque génératrice rectiligne de la surface TS la portion (que nous appellerons "partie utile") qui correspond effectivement au tas de sable. Pour cela, une nouvelle hypothèse, d'origine expérimentale, est nécessaire :

La partie utile d'une génératrice est comprise entre le point  $M_0$  de cote 0, situé sur la directrice, et le point P de cote positive (ou celui de ces points qui a la plus petite cote, lorsqu'il y en a plusieurs) par lequel il passe au moins une autre génératrice de la surface (Fig. 3).

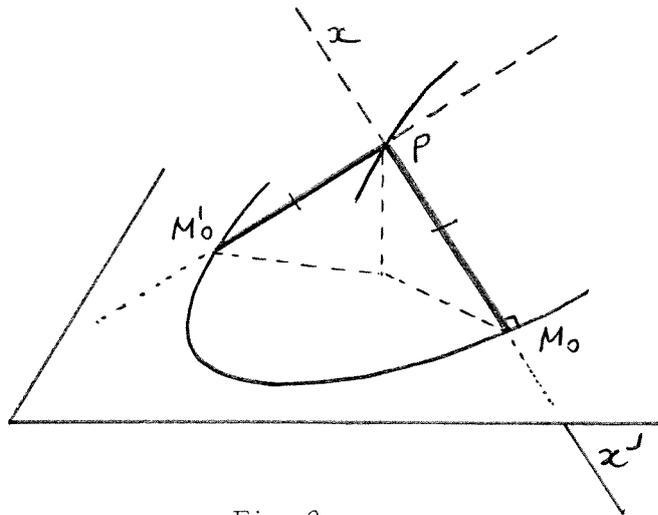


Fig. 3

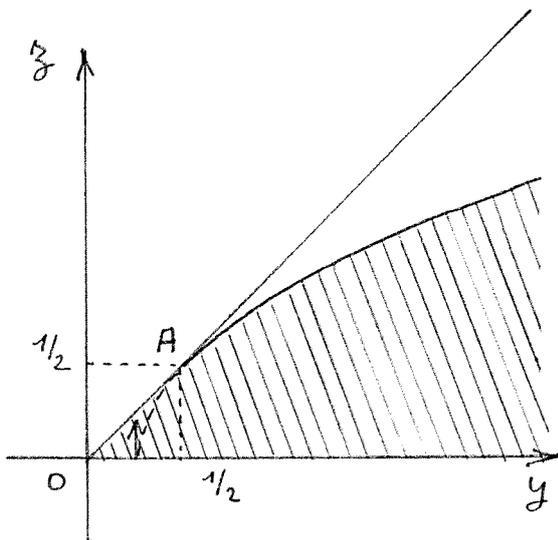


Fig. 4a

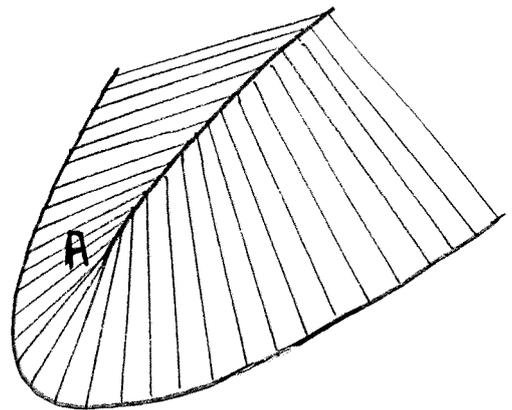


Fig. 4b

En d'autres termes, il faut supprimer sur chaque génératrice

- d'abord et de toute évidence la demi-droite  $M_0x'$  située sous la plateforme ;
- ensuite la demi-droite  $Px$  "en surplomb" dont l'origine  $P$  est le premier point singulier de la surface situé sur cette génératrice.

Nous appellerons "crête" du tas de sable l'ensemble de ces points  $P$  (c'est une courbe différente de l'arête).

Si la directrice possède un axe de symétrie, il est évident que cette crête se trouve dans le plan de symétrie correspondant de la surface.

Ainsi, si la plateforme est carrée, le tas de sable est une pyramide et la crête est formée des quatre arêtes obliques de celle-ci. Si la plateforme est un disque, la crête se réduit au sommet du cône.

Reprenons l'exemple de la plaque parabolique :

L'intersection avec le plan de symétrie  $Oyz$  est formée de 2 arcs analytiquement distincts (fig. 4a)

- une génératrice contenue dans le plan  $Oyz$  :

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = z$$

- un arc de parabole :

$$z = \frac{1}{2 \sin \theta} \Rightarrow y = z^2 + \frac{1}{4} \text{ avec } z \geq \frac{1}{2}.$$

La recherche de la partie utile, facilitée par la symétrie, montre que la crête est constituée par cet arc de parabole. La zone hachurée sur la figure (4a) représente donc le tas de sable vu de profil. En perspective, on a l'allure de la figure (4b). L'extrémité de la crête est un point  $A$ , situé sur l'arête de rebroussement et se projetant horizontalement au centre de courbure de la parabole directrice en son sommet. En "avant" de ce point  $A$  ( $y < \frac{1}{2}$ ), la surface du tas de sable est sans point singulier.

L'accord entre la théorie et la réalité physique est remarquable. En accumulant du sable sur une plaque convexe à contour parabolique, on voit très bien apparaître cette crête. On obtient d'ailleurs une configuration analogue en remplaçant la parabole par toute autre courbe convexe, pourvu qu'elle n'ait qu'un seul point où le rayon de courbure passe par un minimum (sinon on peut voir apparaître d'autres arcs de crête...). Lorsque le rayon de courbure minimum diminue, ou, si on préfère, lorsqu'on utilise une plateforme de plus en plus pointue, on voit diminuer la cote du point  $A$ , extrémité de la crête. Celui-ci se situe finalement sur la directrice elle-même lorsqu'elle présente un point de rebroussement.

## PERTURBATIONS DUES AUX ANGLES RENTRANTS

La théorie précédente est en défaut lorsque les hypothèses de dérivabilité, faites au départ, ne sont plus satisfaites. Examinons par exemple le cas où la directrice possède un point anguleux et, pour simplifier, nous supposons que cette directrice est un polygone.

Au sommet d'un angle saillant (fig. 5a), la solution évidente a déjà été signalée à propos du carré : il se forme une crête rectiligne dans le plan de symétrie.

Considérons, par contre, le cas d'un angle rentrant (fig. 5b) : aux côtés  $Cx$  et  $Cy$  correspondent des faces planes, mais la théorie ne donne pas de réponse pour le secteur  $x'Cy'$ . Il nous faut revenir à la réalité physique : le grain de sable qui tombe dans ce secteur ne peut pas terminer sa course en traversant un des côtés  $Cx$  ou  $Cy$ . Il doit donc passer par le point  $C$  et par conséquent, la partie manquante de la surface est une portion de cône de révolution de sommet  $C$  qui se raccorde avec les deux faces planes. C'est bien ce que l'on observe dans la réalité.

Nous pouvons, enfin, représenter le "vrai" tas de sable correspondant à l'énoncé du Rallye Mathématique 1981. Nous laissons au lecteur le soin de faire le dessin...

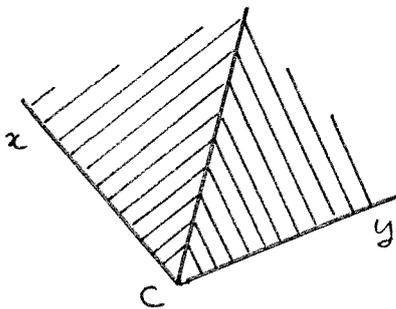


Fig. 5a

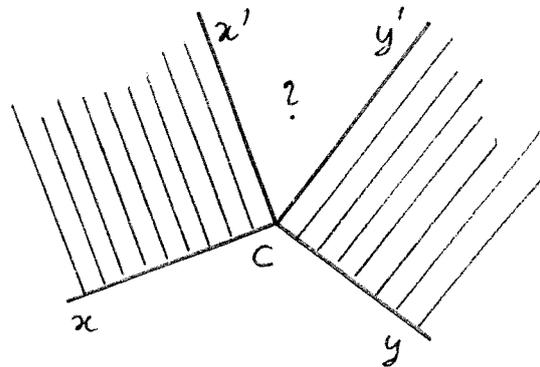


Fig. 5b

N.B. : Pour obtenir le tas de sable représenté en couverture, il suffit d'utiliser une plaque conforme au dessin (4 cercles de même rayon et tangents). On y observe bien la "perturbation" due aux points de rebroussement : pour chacun d'eux, le tas se creuse suivant un demi-cône de révolution.

---

1, 2, 3, 4, ...

par Jean LEFORT

---

Il est traditionnel d'utiliser le segment unité pour effectuer des mesures sur la droite ; le carré de côté unité pour effectuer des mesures dans le plan ; le cube d'arête unité pour effectuer des mesures dans l'espace. Segments, carrés, cubes ont des liens entre eux, liens plus souvent intuitifs qu'explicités.

Pour construire un carré, on part d'un segment qu'on translate de sa longueur dans la direction perpendiculaire à lui-même et on joint les extrémités homologues (Fig. 1).

Fig. 1

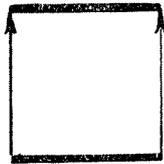


Fig. 2



Pour construire un cube, on part d'un carré qu'on translate de la longueur de son côté dans la direction perpendiculaire à lui-même (à son plan) et on joint les sommets homologues (Fig. 2).

### § 1. EN ROUTE POUR LA QUATRIEME DIMENSION

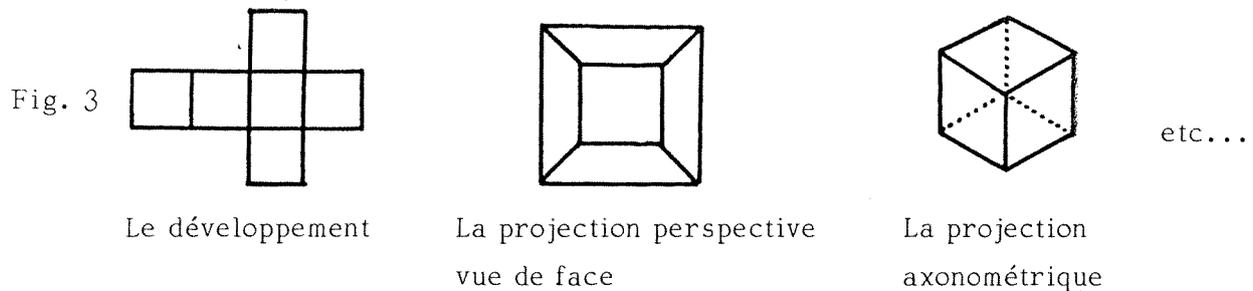
Et si nous recommençons avec un cube ? On le translate perpendiculairement à lui-même de la longueur de son arête et on joint les sommets homologues. Là, vous m'arrêteriez et j'imagine le dialogue suivant :

Vous : Perpendiculaire à un cube, ça n'a pas beaucoup de sens !

Moi : Il s'agit de la perpendiculaire à  $\mathbb{R}^3$ , le quatrième axe dans  $\mathbb{R}^4$ , bref, il faut faire une translation dans la quatrième dimension.

Vous : Mais la quatrième dimension, personne ne l'a jamais vue et on ne peut se l'imaginer.

Moi : Certes, personne ne l'a jamais vue, mais, justement, l'imagination est là pour suppléer la vision. Le dessin de la figure 2 n'est pas un cube mais un graphe planaire qu'on peut interpréter de bien des façons, mais je privilégie ici l'interprétation : "projection cavalière d'un cube". J'aurais pu choisir une autre représentation (Fig. 3).(\*)

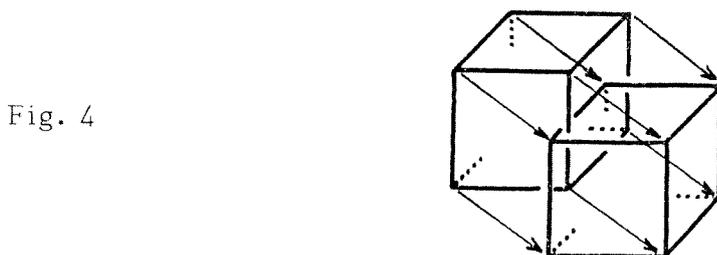


Vous : Je commence à comprendre (\*\*); vous voulez me projeter un machin à quatre dimensions dans notre espace à trois dimensions pour voir l'allure que ça a ?

Moi : Exactement, sauf que je vais carrément effectuer projection et représentation sur le plan parce que votre périodique habituel ne s'est pas encore mis à l'holographie. Mais je fais confiance à votre habitude de la lecture des figures planes comme représentation de l'espace.

Vous : Eh bien, allez-y. Qu'est-ce que cela donne ?

Moi : Voici la figure 4. On peut appeler cela un "hypercube" ; nous dirons un "4-cube" pour préciser que nous sommes en dimension quatre. Nous avons dupliqué un cube et relié les sommets homologues. Ceci en est la perspective cavalière sur un plan. On peut en imaginer bien d'autres.



## § 2. L'HYPERCUBE OU 4-CUBE

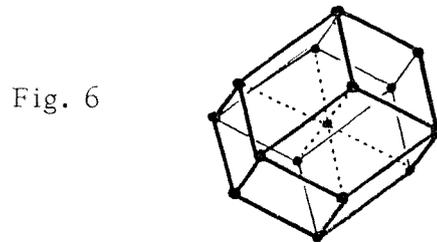
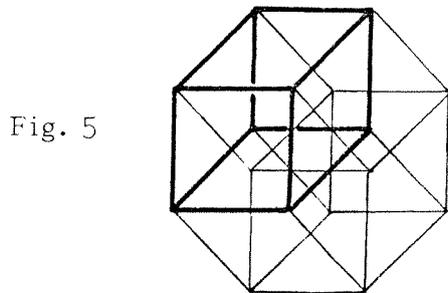
Imaginons une perspective axonométrique, c'est-à-dire une perspective respectant

---

(\*) On pensera au célèbre dessin de Magritte représentant une pipe et intitulé : "Ceci n'est pas une pipe".

(\*\*) Là, franchement, je m'avance. Vous vous dites peut-être que vous ne comprenez décidément rien à la lecture de votre périodique habituel et que vous préférez aller cultiver votre jardin !

l'égalité des longueurs des arêtes. Dans le cas du cube, le contour apparent obtenu était un hexagone. Ici, c'est-à-dire dans le cas du 4-cube, si nous projetons sur le plan de la feuille nous pouvons obtenir la figure 5 ; si nous projetons dans l'espace puis que nous fassions une projection cavalière du résultat, nous obtenons la figure 6.



Dans le plan, la symétrie de la figure 5 met bien en évidence un certain nombre de "cubes" tels que celui dont le tracé est renforcé. On peut très exactement les compter et on en trouve... 8. On peut aussi essayer de voir de quelle façon ils sont accolés par les arêtes ou par les faces. Nous y reviendrons.

Dans l'espace, la figure 6 est peut-être moins probante. Il s'agit tout simplement d'un dodécaèdre rhombique (ben voyons !). Comme son nom est sensé l'indiquer, il s'agit d'un polyèdre à douze faces, chacune d'elles étant un losange. C'est un polyèdre archimédien, c'est-à-dire que toutes les faces sont identiques et font entre elles le même angle. Il y a deux types de sommets : ceux en lesquels se rencontrent 4 faces et donc 4 arêtes et ceux en lesquels ne s'en rencontrent que 3. Mais c'est seulement la projection du contour apparent de l'hypercube qui donne le dodécaèdre rhombique (de la même façon que le contour apparent du cube donne un hexagone). Certaines arêtes de l'hypercube se projettent à l'intérieur du dodécaèdre comme il est indiqué sur la figure 6 (et ces arêtes ont une extrémité commune : le centre du dodécaèdre qui est la projection de deux sommets du 4-cube). On voit bien alors que de chaque sommet de l'hypercube partent 4 arêtes dans les quatre directions perpendiculaires de  $\mathbb{R}^4$ .

Il est heureusement inutile de passer par la quatrième dimension pour construire un dodécaèdre rhombique. On prend un cube et on détermine le symétrique du centre  $O$  par rapport à chacune des faces. Soit  $O_i$  ( $i = 1$  à  $6$ ). On met en place les six pyramides telles que  $O_1ABCD$  (Fig. 7). On démontre facilement à l'aide des angles dièdres que  $O_1BO_2C$  sont coplanaires ; ils forment un losange, face du dodécaèdre rhombique  $ABCDEF_1O_2O_3O_4O_5O_6$ . Cette représentation appelle trois remarques :

1) Cette construction est à la base d'un puzzle qu'on peut (avec beaucoup de recherche) trouver dans le commerce. Elle permet d'autre part de calculer facilement le volume de ce dodécaèdre : c'est deux fois celui du cube soit  $d^3$  où  $d$  est la longueur de la petite diagonale du losange.

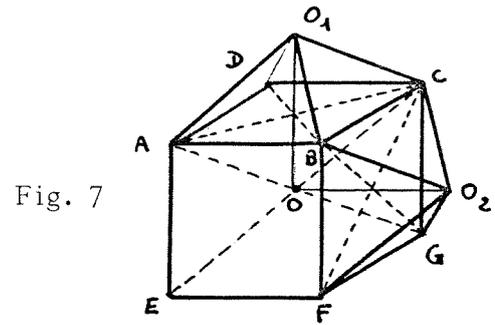


Fig. 7

2) Les dodécaèdres rhombiques pavent l'espace, c'est-à-dire qu'on peut les empiler sans laisser de vide entre eux. Cela est manifeste d'après la construction précédente puisqu'à partir d'un empilement de cubes, on remplace un cube sur deux par six pyramides qu'on rattache aux six cubes voisins. C'est aussi une façon de voir que les 4-cubes pavent  $\mathbb{R}^4$ . C'est le même phénomène qui se produit avec la projection axonométrique du cube qui est un hexagone régulier (et les hexagones réguliers pavent le plan). On pourra généraliser cette remarque aux dimensions supérieures.

3) Le centre du dodécaèdre rhombique est l'image de deux sommets du 4-cube. Ceci résulte de la direction de projection adoptée. La même coïncidence se produit dans la perspective axonométrique du cube (Fig. 3).

On trouvera dans "L'Ouvert n° 37" (article de Coornaert, p. 16) un très grand nombre de représentations du 4-cube. Pour terminer ce paragraphe, la figure 8 donne une représentation en perspective d'un tel objet.

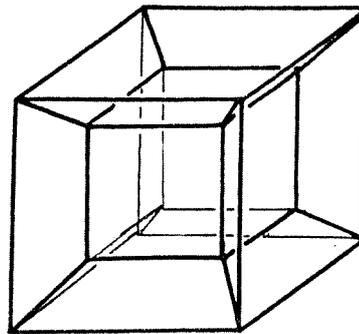


Fig. 8

### § 3. SIMPLEXES

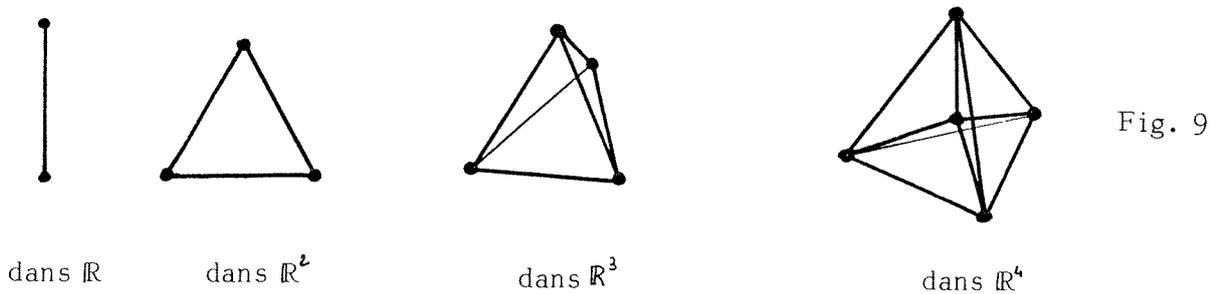
Carrés, cubes, hypercubes, présentent une certaine simplicité mais ce ne sont pas les figures les plus simples que l'on puisse construire dans chacun des espaces  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$ . On sait, en effet, qu'il faut deux points pour déterminer une droite, trois points pour déterminer un plan, quatre points pour avoir une figure qui ait du volume... D'une façon générale, il faut  $n+1$  points pour déterminer un espace  $\mathbb{R}^n$ . Et on ne peut pas faire moins que  $n+1$ . D'où le nom de *simplexe* attribué à la figure minimale formée de  $n+1$  points de  $\mathbb{R}^n$ . Les simplexes réguliers peuvent se construire de la façon suivante :

. Dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire sur la droite, c'est le segment de longueur  $a$  et ses deux extrémités qui en sont les sommets.

. Dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire dans le plan, c'est le triangle équilatéral de côté  $a$ . On l'obtient à partir du segment en construisant un troisième point équidistant des deux premiers (et à la distance  $a$ ). Le triangle est formé de trois sommets et trois arêtes.

. Dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire dans l'espace ordinaire, c'est le tétraèdre régulier qui est obtenu à partir du triangle en ajoutant un quatrième point équidistant des trois premiers (sur une perpendiculaire au centre de gravité du triangle) et en joignant les quatre points de toutes les façons possibles. Le tétraèdre est formé de 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.

Continuons (la figure 9 permet de visualiser cela). Dans  $\mathbb{R}^4$ , on a un 4-simplexe formé de 5 points. Quatre quelconques d'entre-eux forment un tétraèdre régulier d'arête  $a$  et le cinquième est équidistant (sur une perpendiculaire à  $\mathbb{R}^3$  (??) au centre de gravité du tétraèdre) et à la distance  $a$  des quatre premiers. Le 4-simplexe est formé de 5 sommets, 10 arêtes (comptez-les), 10 faces triangulaires (le décompte est un peu plus délicat) et de 5... "cellules" qui sont des tétraèdres réguliers.



Passons à  $\mathbb{R}^5$ . On obtiendra un simplexe (un 5-simplexe) formé de 6 sommets chacun d'eux étant relié aux cinq autres. Il y aura donc  $C_6^2 = 15$  arêtes. Trois sommets quelconques formeront une face. Il y en aura donc  $C_6^3 = 20$ . Quatre sommets quelconques (ou quatre faces quelconques) formeront une cellule tétraédrique. Il y en aura ainsi  $C_6^4$ , soit 15. Cinq sommets quelconques formeront un .??. au nombre de  $C_6^5 = 6$ . On voit que quand on multiplie le nombre de dimensions, le vocabulaire doit se multiplier de la même façon. Donnons alors les définitions suivantes :

sommets	= 0-face	}	Le nombre indique la dimension de l'objet (2 pour le plan, 3 pour l'espace, c'est-à-dire un volume, etc...).
arête	= 1-face		
face	= 2-face		
cellule	= 3-face		
.....	= 4-face		

Le raisonnement fait sur le 5-simplexe se généralise sans peine au  $n$ -simplexe et on montre que celui-ci possède  $C_{n+1}^{p+1}$   $p$ -faces.

En appliquant plusieurs fois de suite le théorème de Pythagore, on peut évaluer l'hyper-volume (c'est-à-dire l'équivalent dans  $\mathbb{R}^n$  de l'aire pour le plan ou du volume pour l'espace) du  $n$ -simplexe régulier. On trouve :

$$\frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \quad \text{si la longueur de l'arête vaut } a.$$

#### § 4. RETOUR AU N-CUBE

Profitant de la mise en place d'un vocabulaire adéquat, nous allons compter le nombre de  $p$ -faces d'un  $n$ -cube. Cela est relativement facile si on fait le calcul par récurrence sur  $n$ . A chaque étape, nous l'avons vu, on dédouble le  $(n-1)$ -cube précédent et on joint les sommets homologues. Le nombre de sommets, c'est-à-dire de 0-faces, est donc tout simplement  $2^n$ .

Pour les arêtes, on trouve deux fois celles de l'étape précédente (deux fois celles du  $(n-1)$ -cube qui a été dédoublé) plus les arêtes joignant les sommets homologues (il y en a autant que de sommets du  $(n-1)$ -cube). Commençons donc à remplir le tableau de la figure 10 où l'on donne le nombre de sommets qui, comme nous l'avons vu, est  $2^n$ . La colonne  $p=1$ , donne le nombre d'arêtes (de 1-faces). C'est, d'après ce qui précède le double du nombre au dessus augmenté du nombre au dessus à gauche (deux fois le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets du  $(n-1)$ -cube).

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
1	2	(1)				
2	4	4	(1)			
3	8	12	6	(1)		
4	16	32	24	8	(1)	
5-cube → 5	32	80	80	40	10	(1)
6	64	192	240	160	60	12

Fig. 10

Pour trouver le nombre de faces (de 2-faces), le processus est le même. En effet, une 2-face d'un  $n$ -cube est soit l'une des 2-faces du  $(n-1)$ -cube dédoublé, soit est formée par deux arêtes parallèles homologues de chacun des  $(n-1)$ -cube (fig. 11).

Le raisonnement se généralise (sans peine pour ceux qui m'ont suivi jusqu'ici !!). Chaque terme du tableau, notons-le  $N_n^p$ , vérifie la relation :

$$N_n^p = 2 N_{n-1}^p + N_{n-1}^{p-1}$$

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$N_n^p = 2^{n-p} C_n^p .$$

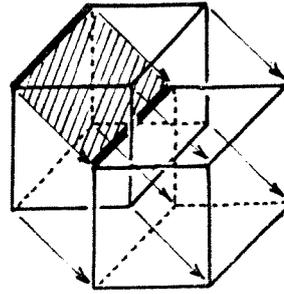


Fig. 11

Sur la diagonale du tableau apparaissent les nombres pairs successifs. Ils répondent à la règle précédente si on imagine juste au-dessus d'eux un "1". Ceci est assez logique dans la mesure où un  $n$ -cube formera l'une des  $n$ -faces du  $(n+1)$ -cube de la dimension supérieure. Toutes les autres cases vides peuvent être complétées par des zéros.

## § 5. LA FORMULE D'EULER-POINCARÉ

Tout le monde connaît la formule d'Euler pour les polyèdres : nombre de sommets - nombre d'arêtes + nombre de faces = 2. Présentée comme ceci, cette formule est fautive (on exhibe facilement des polyèdres à trous qui ne satisfont pas à cette formule). Mais elle est valable pour une grande classe de polyèdres (\*). Essayons de la généraliser ; nous écrirons :

Nombre de 0-faces - Nombre de 1-faces + Nombre de 2-faces - Nombre de 3-faces + ...

en alternant les signes (+ devant un  $(2p)$ -face ; - devant un  $(2p+1)$ -face). Appliquons cela aux  $n$ -cubes : on trouve pour chaque ligne 0 ou 2. 0 si  $n$  est pair, 2 si  $n$  est impair. Ce que l'on peut écrire :  $1 + (-1)^{n+1}$  dans tous les cas. Dans le cas du  $n$ -cube on peut faire la démonstration directement. Mais nous allons en donner une démonstration heuristique qui a le mérite de se généraliser à une figure quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

Remarquons que cette formule est immédiate pour les simplexes ; en effet :

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p = (1 - 1)^n = 0$$

donc :

$$1 + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C_n^p + (-1)^n = 0$$

soit :

$$- \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C_n^p = (-1)^n + 1$$

et par suite, en remplaçant  $n$  par  $n+1$  et  $p$  par  $p+1$ , il vient :

---

(\*) Par exemple, mais ce n'est pas nécessaire, les polyèdres convexes.

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p C_{n+1}^{p+1} = 1 + (-1)^{n+1}$$

Ce qui est bien la formule annoncée puisque  $C_{n+1}^{p+1}$  est le nombre de  $p$ -faces du  $n$ -simplexe.

Maintenant, on sait qu'un polygone peut être obtenu par juxtaposition de triangles, un polyèdre par juxtaposition de tétraèdres et plus généralement un... polytope (c'est le terme consacré) résultera de l'assemblage de  $n$ -simplexes.

Quand on assemble deux triangles le long de l'un de leurs côtés, le côté commun et deux sommets coïncident. Sur le total du nombre de sommets et du nombre de côtés des deux triangles il faut supprimer deux côtés et deux sommets (Fig. 12). Ajouter de la même manière un triangle à un polygone revient à ajouter un sommet et un côté.

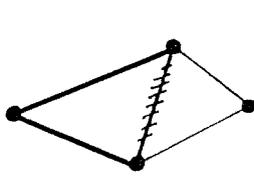


Fig. 12

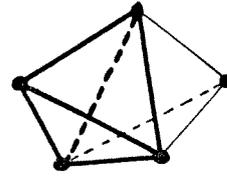
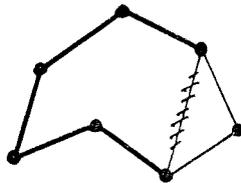


Fig. 13

Sur le total du nombre de sommets, d'arêtes et de faces des deux tétraèdres, il faut supprimer 3 sommets, 3 arêtes et deux faces (Fig. 13). Cela revient à ajouter seulement 1 sommet (au lieu de 4), 3 arêtes (au lieu de 6), et 2 faces (au lieu de 4). La relation d'Euler n'a pas changé puisqu'il faut ajouter  $1-3+2 = 0$  au premier membre.

Passons en dimension 4. Si nous accolons deux 4-simplexes le long d'un tétraèdre commun (formant une de leurs 3-faces ou cellules), il faudra supprimer cette cellule commune. Il y aura alors coïncidence des sommets, arêtes et faces de ce tétraèdre. Sur le total des sommets, arêtes, faces et cellules, il faudra ôter 4 sommets, 6 arêtes, 4 faces et 2 cellules (celle qui est commune aux deux tétraèdres, et qui est comptée une fois pour chacun d'eux, donc deux fois en tout). Cela revient à ajouter seulement  $5-4 = 1$  sommet,  $C_5^2 - C_4^2 = C_4^1 = 4$  arêtes,  $C_5^3 - C_4^3 = C_4^2 = 6$  faces, et enfin  $C_5^4 - 2 = 3$  cellules. La relation d'Euler n'a pas changé puisqu'il faut ajouter  $1 - 4 + 6 - 3 = 0$  au premier membre.

La généralisation à une dimension quelconque ne pose plus de difficulté . Je rappelle seulement au lecteur qu'il ne s'agit pas d'une démonstration mais d'une argumentation heuristique. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que le polyèdre auquel on ajoute successivement des tétraèdres peut avoir une forme telle que le nouveau tétraèdre entre en contact par deux ou trois faces. Il faudrait donc étudier à chaque fois ces nouveaux cas qui se multiplient avec la dimension.

## § 6. POLYTOPES REGULIERS

On sait qu'il y a une infinité de polygones réguliers, mais seulement 5 polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, l'octaèdre régulier, le cube, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier (bien qu'on puisse augmenter ce nombre en construisant des polyèdres non convexes - il y a 4 étoilés réguliers - ou seulement semi-réguliers). Que se passe-t-il en dimension supérieure ? On trouve exactement six polytopes réguliers en dimension 4. En voici la liste (Fig. 14) :

sommets	5	16	8	24	120	600
arêtes	10	32	24	96	720	1200
faces	10	24	32	96	1200	720
cellules	5	8	16	24	600	120
	A	B	C	D	E	F

Fig. 14

A est le 4-simplexe et B est le 4-cube. On peut ajouter à cette liste 10 polytopes étoilés à 4 dimensions.

Mais dès que l'on passe en dimension 5 ou plus, il n'y a plus que 3 polytopes réguliers (correspondant à A, B et C) qui sont le  $n$ -simplexe, le  $n$ -cube et son dual, équivalent de l'octaèdre. Précisons un peu ce qu'on entend par dualité : pour un polyèdre, on prend le centre de chaque face et on le joint au centre des faces contiguës. Le polyèdre ainsi obtenu a autant de sommets que le précédent avait de faces et les arêtes des deux polyèdres sont en nombre égal. On dit alors que les deux polyèdres sont duaux l'un de l'autre : le tétraèdre est son propre dual, le cube et l'octaèdre sont duaux l'un de l'autre ainsi, par ailleurs, que le dodécaèdre et l'icosaèdre. Pour un polytope régulier de dimension  $n$ , on prend le centre de gravité de chacune des  $(n-1)$ -faces et on le joint au centre de gravité des  $(n-1)$ -faces contiguës. On obtient ainsi un nouveau polytope qui a un nombre de sommets égal au nombre des  $(n-1)$ -faces du premier polytope et on voit sans trop de peine (!?) que son nombre d'arêtes (de 1-faces) est égale au nombre de  $(n-2)$ -faces du premier, son nombre de 2-faces à celui de  $(n-3)$ -faces du premier, etc... Ces deux polytopes sont dit duaux l'un de l'autre. En dimension 4, B et C sont duaux ainsi que E et F ; A et D sont leur propre dual.

On sait que le dual du cube est l'octaèdre. En dimension  $n$ , le dual du  $n$ -cube est un polytope dont les coordonnées des sommets sont très simples puisqu'il s'agit des points dont une seule coordonnée vaut  $\pm a$  et toutes les autres 0. (Ce sont les points d'intersections des axes avec l'hypersphère (\*) de rayon  $a$ ). En voilà le dessin en dimension 4 (Fig. 15). Chaque sommet est joint à tous ceux qui ne sont pas diamétralement opposés. Les cellules de ce polytope sont des octaèdres dont l'un est mis en évidence sur le dessin. On peut facilement calculer l'hypervolume de ce type de polytope et on trouve :

$$\frac{(2a)^n}{n!}$$

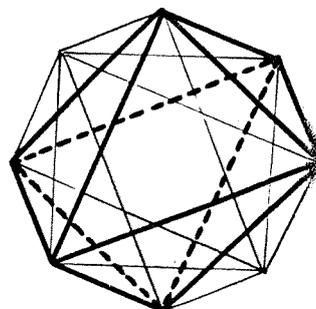


Fig. 15

### § 7. CA TOURNE ROND

On a parlé l'une ou l'autre fois d'hypersphère. Le lecteur aura compris ce dont il s'agit sans que j'aie besoin de lui faire un dessin fort peu utile en l'occurrence car les projections d'une sphère ou d'une hypersphère sur le plan sont des cercles et si la projection est oblique on verra une ellipse ce qui n'avance pas beaucoup dans la compréhension du problème.

Si  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sont les  $n$  coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$ , l'équation de l'hypersphère centrée à l'origine et de rayon  $R$  est :

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2.$$

On peut calculer l'hypervolume de cette hypersphère et même l'hypersurface, l'hyperpérimètre, ... en descendant d'une dimension à chaque étape. Contentons-nous des deux premières mesures. Un calcul pas trop difficile pour ceux qui savent utiliser les intégrales multiples conduit à :

$$\left. \begin{aligned} V_{2p} &= \frac{2^p \pi^p 1.3.5. \dots (2p-1)}{2.4.6. \dots 5(2p)} R^{2p} \\ V_{2p+1} &= \frac{2^{p+1} \pi^p}{1.3.5. \dots (2p+1)} R^{2p+1} \end{aligned} \right\} \text{ pour l'hypervolume ;}$$

$$S_n = n \cdot V_n \cdot (1/R) \quad \text{pour l'hypersurface.}$$

On peut facilement inscrire une hypersphère de rayon  $R$  dans un hypercube d'arête  $2R$ . Le rapport des volumes, des hypervolumes plus exactement, de l'hypersphère à l'hyper-

(\*) Le lecteur aura compris que le préfixe "hyper" signifie seulement qu'on se trouve en dimension supérieure à 3.

cube tend vers 0 quand le nombre de la dimension augmente. Ceci peut s'expliquer par le fait que le nombre de sommets de l'hypercube augmentant avec la dimension, il faut raboter d'autant plus de coins pour tailler une hypersphère à partir de l'hypercube. Il ne reste finalement pas beaucoup de matière !

#### § 8. QUELQUES FIGURES OUBLIEES

On ne peut pas continuer indéfiniment un article sur la quatrième dimension. Seulement, nombreux sont les points qu'on laisse ainsi dans l'ombre, points facilement abordables à ce niveau : les analogues des cylindres ; les développements des polytopes ; les pavages... Tous sujets qui mènent à la réalisation de magnifiques figures mais pas toujours très lisibles. Qu'on songe aux polytopes réguliers à 600 sommets ou à 720 arêtes ! Je ne donne donc ici que trois figures supplémentaires :

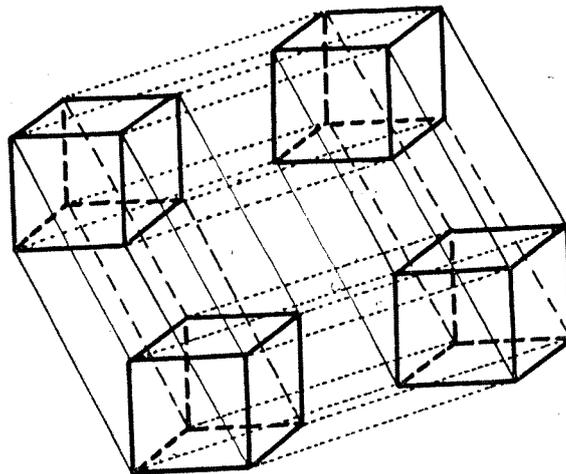


Fig. 16

Projection plane d'un 5-cube où l'on a privilégié la lecture des arêtes au détriment de la justesse de la projection. De tels schémas interviennent dans les architectures d'ordinateurs.



## PRETENDUES ASYMPTOTES ET VRAIES EQUATIONS

Une enquête dans la Géométrie de Pascal

par Eric CHANEY

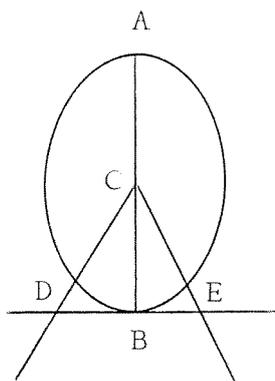
## PASCAL A-T-IL TROUVE LES ASYMPTOTES DE L'ELLIPSE ?

L'indice qui sert d'amorce à l'enquête est un passage d'une lettre datée du 20 mai 1656, signée par Carcavy, et destinée à Huygens :

"Monsieur Pascal ayant aussi donné les asymptotes de l'Ellipse, du cercle et de la parabole..."

Diable ! Pascal et ses contemporains avaient-ils déjà l'audace d'introduire les droites imaginaires dans le plan ? Si une telle hypothèse s'avérait, une petite bombe serait lâchée dans l'histoire des sciences : les nombres imaginaires circulaient sous le manteau à la fin du XVIIe, on parlait sans complexes d'éventuels points imaginaires au XVIIIe, mais c'est avec Monge, et surtout Poncelet que les éléments isotropes, droites en particulier, font leur entrée sur scène.

Un mois plus tard, Carcavy reprend la plume à l'adresse de son collègue hollandais, et évite ainsi à l'enquêteur moderne de tomber dans le ridicule de l'hypothèse précédente :



"... c'est aussi lui [Pascal] qui a remarqué les deux lignes qui ont les mêmes propriétés dans le cercle et dans l'Ellipse que les asymptotes dans l'hyperbole, dont la construction est toute semblable.

Car soit l'Ellipse AEB, dont le diamètre soit ACB, et soit menée la touchante DBE, coupée en D et en E, en sorte que le rectangle DBE soit égal au quart de la figure, ayant mené les lignes CD, CE, du centre C, elles auront les mêmes propriétés dans ces deux sections que les asymptotes dans l'hyperbole."

Mieux qu'un mégot retrouvé sur les lieux du crime, le dessin qui illustre ce texte va fournir une piste sûre, sous réserve d'un décodage rigoureux :

- . "touchante" se traduit sans difficulté,
- . "rectangle" peut faire trébucher l'enquêteur inexpérimenté, surtout devant trois points alignés. Il ne s'agit pas d'un rectangle géométrique, mais du produit de deux nombres positifs non nécessairement égaux. En l'occurrence, le produit  $DB \cdot BE$ .

- . "figure" est plus redoutable encore. Son emploi remonte à Apollonius de Perge (225 A.C.). Pour une conique à centre le terme désigne le couple formé d'une part par la longueur du diamètre focal, d'autre part par le "côté droit", ou "paramètre", c'est-à-dire la longueur de la corde passant par l'un des foyers, et perpendiculaire à l'axe focal (fig. 1). "Rectangle de la figure", ou par abréviation "figure", désigne alors le produit de ces deux longueurs. Le terme paramètre est encore parfois utilisé de nos jours, désignant la demi-longueur de la corde.

La partie constructive de la lettre de Carcavy s'interprète alors ainsi :

On mène deux rayons depuis le centre d'une ellipse, qui coupent la tangente perpendiculaire à l'axe focal  $AB$  en  $D$  et  $E$ , de façon que :

$$DB \cdot BE = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot 2p \quad (2p \text{ désigne le "côté droit"})$$

Alors la même construction, opérée sur une hyperbole, fournit les asymptotes (fig. 1 et 2).

Pour que l'analogie ait un sens, il faut que les rayons soient symétriques par rapport à l'axe focal. Autrement dit que :

$$DB = BE$$

Les constructions étant éclaircies, il faut en venir au coeur de l'affaire : Pascal aurait affirmé que les droites  $CD$  et  $CE$  ont les "mêmes propriétés" pour l'ellipse et l'hyperbole. Il faut donc pousser la recherche dans son oeuvre géométrique. A propos des coniques, celle-ci consiste en :

\* Un "Essai sur les coniques", rédigé à l'âge de seize ans, édité en 1640, qui valut à son auteur une précoce célébrité et l'inimitié de Descartes. Il comporte un joyau : la propriété des hexagones inscrit dans une "section conique propre", quelle que soit celle-ci.

Fig. 1

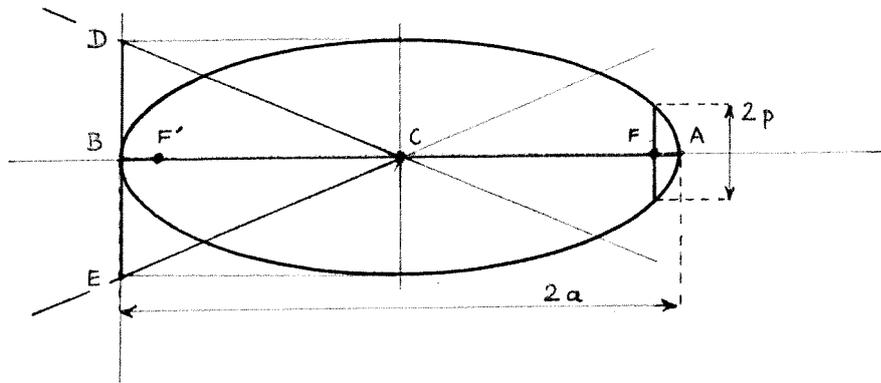


Fig. 2

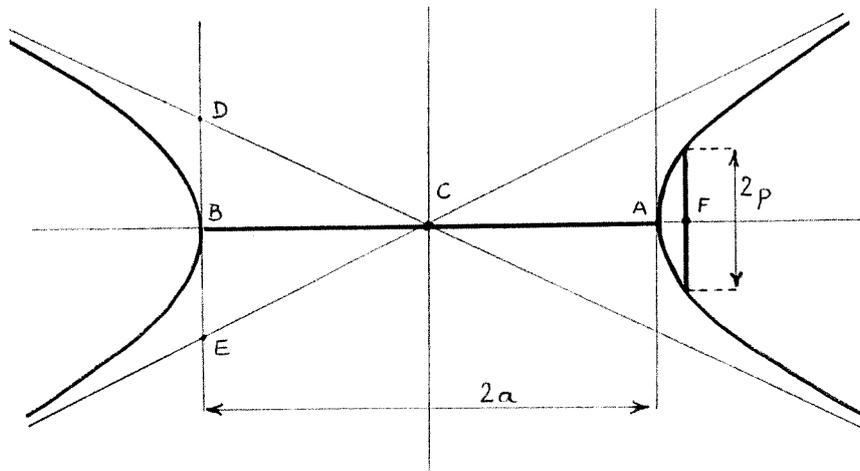
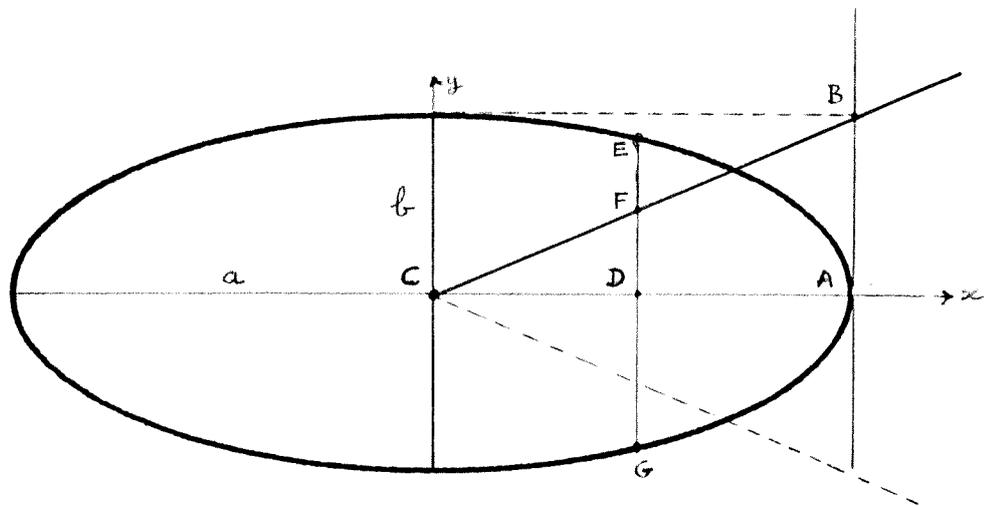


Fig. 3



\* Plusieurs "Traité des coniques", bien plus substantiels, et qui ne nous sont pas parvenus. Une lettre de Leibniz, en donne le contenu, et le traité sur "la génération des sections coniques" nous est connu par la copie qu'en fit faire l'inventeur du triangle harmonique.

L'essai de jeunesse fournit une suite sérieuse à la piste suivie depuis Carcavy. On y lit en effet :

"... si, dans le plan de l'hyperbole ou de l'ellipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mène la droite AB, touchante au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre CA, on prenne la droite AB dont le carré soit égal au quart du rectangle de la figure, et qu'on mène CB, alors, quelque droite qu'on mène, comme DE, parallèle à la droite AB, coupante la section en E, et les droites AC, CB, les points D, F, si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB ; et dans l'hyperbole, la différence des mêmes carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB."

On retrouve le "quart du rectangle de la figure", et si l'on veut bien remplacer le produit DB . BE de Carcavy par  $AB^2$  (notation de Pascal), la droite CB n'est autre que "l'asymptote" de l'ellipse selon Carcavy.

#### CHERCHER DERRIERE L'ASYMPTOTE

Une difficulté de taille subsiste : il n'est nulle part question d'asymptote chez Pascal. La piste serait-elle un "holsweg" ?

Un parallèle est pourtant établi dans le texte de Pascal, entre ellipse et hyperbole :

$$DE^2 + DF^2 = AB^2 \text{ pour l'ellipse}$$

$$DE^2 - DF^2 = AB^2 \text{ pour l'hyperbole.}$$

Que signifiaient ces relations, valables pour un point E quelconque de la conique, si on étudiait celle-ci dans un repère constitué des diamètres principaux, le demi-diamètre focal valant a, et l'autre b ? (Fig. 3).

Le "rectangle de la figure" s'évalue ainsi :

$$AA' \cdot 2p = 2a \cdot 2 \frac{b^2}{a} = 4b^2$$

D'où :

$$AB^2 = \frac{1}{4} (AA' \cdot 2p) \Leftrightarrow AB = b.$$

La droite CB a donc pour équation  $y = \frac{b}{a} x$

Si E, point courant de l'ellipse a pour coordonnées (x,y), on obtient :

$$DE^2 = y^2 \quad \text{et} \quad DF^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$$

D'où :

$$DE^2 + DF^2 = AB^2 \Leftrightarrow y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'enquête méritait d'être menée !

Car si l'on n'a pas aperçu la queue d'une asymptote, on vient de constater que, grâce à la droite auxiliaire CB, Pascal a établi (le premier semble-t-il) les équations générales de l'ellipse et de l'hyperbole.

Une morale et deux remarques conclueront cette petite enquête :

Morale : Celà vaut la peine de chercher, au risque de trouver autre chose que le but escompté.

Remarque 1 : Une idée communément reçue est ici bien mise à mal : à l'époque de Descartes, et après la publication de son traité de géométrie (1637), l'usage de "coordonnées cartésiennes" n'a aucun sens : c'est dans le plus orthodoxe style d'Apollonius que Pascal donne l'équation de l'ellipse.

Remarque 2 : Au facteur imaginaire i près, la droite CB est bien une asymptote de l'ellipse, et certaines propriétés de cette droite (et du diamètre conjugué) évoquent des propriétés des asymptotes de l'hyperbole. Mais en l'absence de tout texte de Pascal, il n'est pas possible d'en dire plus sur ce que cet esprit subtil et tourmenté entendait éventuellement par "asymptote" de l'ellipse.

### Bibliographie

- . Pascal                      Oeuvres complètes. Ed. de la Pléiade
- . Kokiti Hara                L'oeuvre mathématique de Pascal  
Osaka University. Vol. XXI Mars 1981
- . Georges Glaeser    Cours de 3e cycle. Chap. V (nouvelle version, à paraître)

---

 LES FICHES CUISINE DE TONTON LULU

QU'EST CE QU'UN PETIT GROS ?

ou

Les statistiques ça peut aussi faire réfléchir !

 par Jacques LUBCZANSKI
 

---

Nous publions dans ce numéro la première de deux "fiches cuisine" de J. Lubczanski qui anime à l'ENSET le séminaire "Enseignement et mathématiques". L'ensemble de ces fiches sera publié chez Cédic en 1986. L'Ouvert remercie l'auteur d'avoir bien voulu l'autoriser à publier celles relatives aux statistiques.

L'OUVERT

Non, les statistiques ne sont pas forcément d'ennuyeuses colonnes de chiffres ou des graphiques hachurés pleins de pourcentages.

Et pas non plus un aléa de la théorie des probabilités, plus ou moins compréhensible. Mais c'est aussi l'occasion de répondre à des questions, à l'aide d'outils mathématiques simples et variés : raisonnement autant que calcul ; géométrie autant qu'algèbre.

La question du jour : "qu'est-ce qu'un petit gros ?" est celle-ci : une population étant donnée par les poids et tailles des individus qui la composent, peut-on déterminer un sous-ensemble des "petits gros" ?

Avec quel critère mathématique ?

Avec quelle validité ?

Le problème évoqué ici est celui de la classification d'individus à deux variables, d'êtres à deux dimensions ; ce problème se pose non seulement aux statisticiens mais aussi à tous les scientifiques (biologistes, médecins, sociologues...), et souvent avec plus de deux variables : les méthodes sont alors les mêmes que celles que je vais exposer, mais on "voit" moins bien ce qu'on fait.

AU DEBUT ETAIT LE NUAGE... (représentation des données) 

Pour se fixer les idées, et pour que vous puissiez vérifier les calculs, donnons-nous une fois pour toutes une population qu'on va étudier dans tout ce qui suit. Prenons-la de faible effectif : 10 individus répondant aux doux noms de A, B, C, D, E, F, G, H, I et J dont voici les poids et tailles :

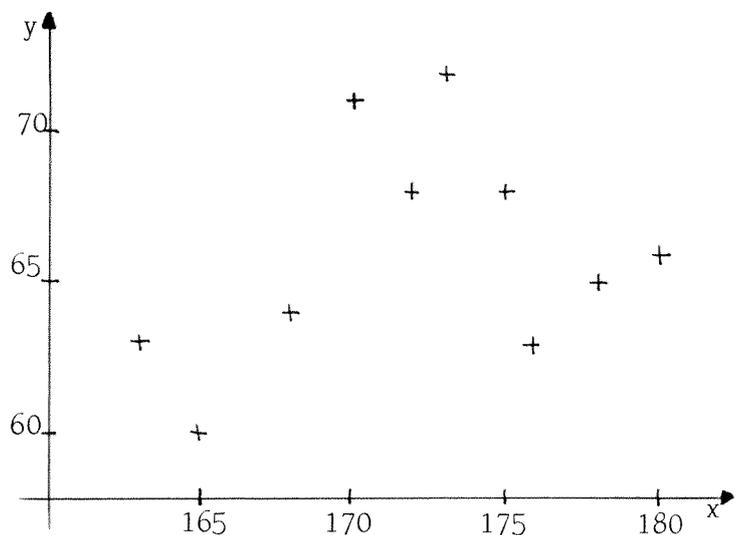
nom	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
taille (cm)	163	168	170	165	173	172	176	178	180	175
poids (kg)	63	64	71	60	72	68	63	65	66	68

On commence par faire un dessin, ou plutôt une carte de la population : chaque individu est représenté par un point de coordonnées  $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})$ , où  $x$  est la taille et  $y$  le poids de l'individu.

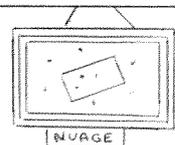
(On a donc fait le choix d'une échelle).

L'ensemble de ces points s'appelle le nuage des points représentant notre population.

La première préoccupation du statisticien est de faire une description de ce nuage. Et décrire, en l'occurrence, signifie résumer : on va résumer le nuage par une figure géométrique plus simple...



LE NUAGE VU PAR L'ART ABSTRAIT ! (Réduction des données)



### 1. Centre du nuage

Le centre du nuage en sera le point moyen : celui dont l'abscisse est la moyenne des abscisses et dont l'ordonnée est la moyenne des ordonnées.

Dans notre exemple si on note  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  ces valeurs, on obtient  $\bar{x} = 172$  et  $\bar{y} = 66$ .

Soit  $\Omega$  le centre du nuage.

Désormais, on va se placer dans un repère d'origine  $\Omega$ , d'axes parallèles aux axes initiaux.

Si  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées d'un point dans ce nouveau repère, on a donc :

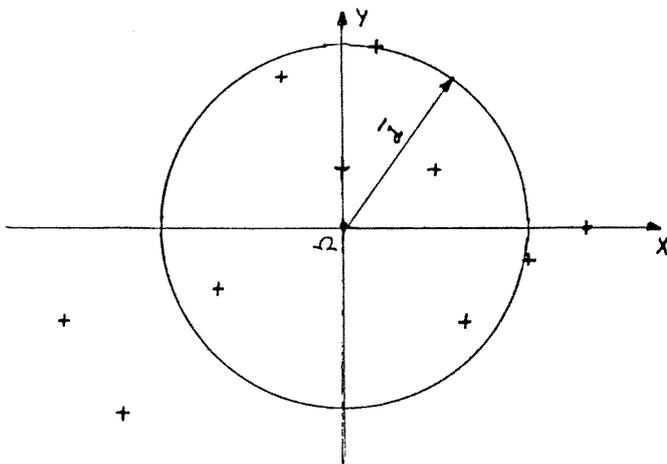
$$X = x - \bar{x} \text{ et } Y = y - \bar{y}.$$

On dit aussi qu'on a centré les variables  $x$  et  $y$  :  $X$  et  $Y$  sont des variables centrées ; leur moyenne est nulle.

Tout se passe comme si on repartait des données en  $X$  et  $Y$  :

nom	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	-9	-4	-2	-7	+1	0	4	6	8	3
Y	-3	-2	+5	-6	+6	+2	-3	-1	0	2

## 2. Résumé du nuage par un cercle



L'idée est simple : on calcule les distances  $\Omega A, \Omega B, \Omega C \dots \Omega J$ , puis on calcule leur moyenne  $\bar{d}$  :

Le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\bar{d}$  est un résumé du nuage.

On trouve ici  $\bar{d} \approx 5,9$ .

Si pour calculer la moyenne des distances, on n'utilise plus la moyenne arithmétique mais la moyenne quadratique (c'est-à-dire moyenne des carrés puis racine de cette moyenne), on trouve alors  $\bar{d}' \approx 6,4$ .

Et on peut prouver que  $\Omega$  est le point du plan qui minimise  $\bar{d}'$ . La valeur minimale de  $\bar{d}'$  s'appelle la variance totale du nuage. On y reviendra plus loin.

## 3. Résumé par un rectangle parallèle aux axes

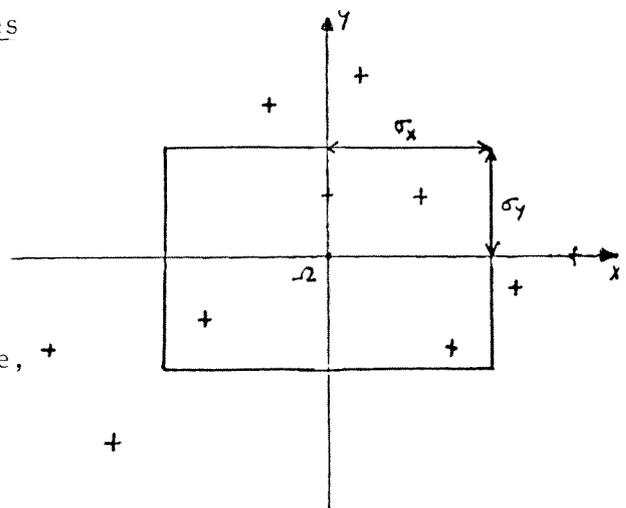
Au lieu de chercher la distance moyenne à l'origine, on cherche les distances moyennes à chacun des axes.

Pour ne pas à avoir à faire de calculs sur les valeurs absolues  $|X|$  et  $|Y|$ , on utilise la moyenne quadratique :

on calcule la moyenne des  $X^2$ , puis sa racine, notée  $\sigma_x$ .

Et de même pour les  $Y^2$ , d'où  $\sigma_y$ .

Ici on trouve :  $\sigma_x \approx 5,25$  et  $\sigma_y \approx 3,6$ .



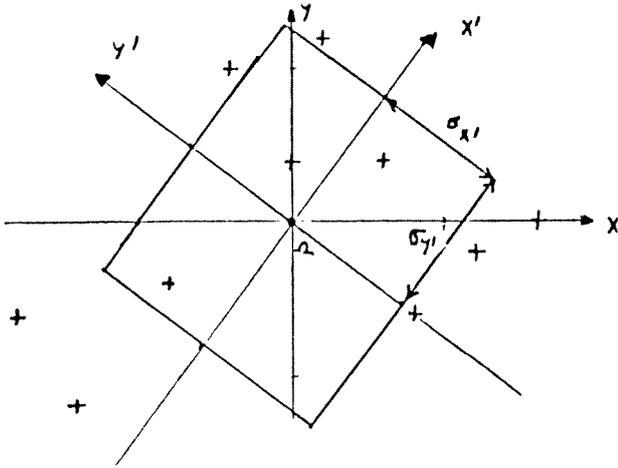
Le rectangle centré en  $\Omega$ , de côtés  $2\sigma_x$  et  $2\sigma_y$  résume le nuage.

$\sigma_x$  s'appelle l'écart type de X (et aussi de x);  $\sigma_y$  l'écart type de Y (et de y).

Les carrés des écarts types  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$  sont les variances de X et Y (et aussi de x et y).

La somme  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$  est la variance totale du nuage.

#### 4. Résumé par un rectangle quelconque



On continue à chercher les distances moyennes à chacun des axes, mais pour des axes quelconques passant par  $\Omega$  : en d'autres termes, on reprend le calcul du paragraphe précédent, après avoir fait tourner les axes.

Faisons-le sur un exemple : prenons comme nouvel axe  $\Omega x'$  la droite  $Y = 4/3X$  et pour nouvel axe  $\Omega Y'$  la droite  $Y = -3/4X$ .

On a :  $X' = 3/5X + 4/5Y$

$Y' = -4/5X + 3/5Y$

ce qui permet de calculer les coordonnées des points du nuage dans le repère  $(\Omega, \Omega X', \Omega Y')$  :

nom	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$X'$	-7,8	-4	2,8	-9	5,4	1,6	0	2,8	4,8	3,4
$Y'$	5,4	2	4,6	2	2,8	1,2	-5	-5,4	-6,4	-1,2

Alors le calcul donne  $\sigma_{X'} \approx 4,9$  et  $\sigma_{Y'} \approx 4,25$  : d'où un nouveau rectangle.

. Remarquons d'abord qu'on aurait pu obtenir ces dernières valeurs beaucoup plus vite :

$$\sigma_{X'}^2 = \overline{X'^2} = \overline{(3/5 X + 4/5 Y)^2} = \frac{9}{25} \overline{X^2} + \frac{24}{25} \overline{XY} + \frac{16}{25} \overline{Y^2} = \frac{9}{25} \sigma_X^2 + \frac{24}{25} \overline{XY} + \frac{16}{25} \sigma_Y^2$$

Il aurait donc suffi de calculer la moyenne des XY : ce nombre s'appelle la covariance de X et Y et se note  $\sigma_{XY}$ .

Ici  $\sigma_{XY} = 6,1$  d'où  $\sigma_{X'}^2 \approx \frac{9}{25} \times 27,6 + \frac{24}{25} \times 6,1 + \frac{16}{25} \times 12,8 \approx 24,1$  on retrouve

bien  $\sigma_{X'} \approx 4,9$ .

. Comparons le rectangle obtenu à celui du paragraphe précédent : il est plus "carré", moins aplati.

Lequel, de ces deux rectangles, donne une meilleure description du nuage ?

Pour le statisticien, la meilleure description est celle qui est la plus interprétable ; si, par exemple, le rectangle était complètement aplati, réduit à un segment de droite, l'interprétation serait aisée : il existerait alors une relation du premier degré entre X et Y (l'équation de la droite supportant le rectangle) : la connaissance de X nous donnerait Y et vice versa. Dans ce cas (idéal) on dirait que X et Y sont parfaitement corrélés (et alors le nombre  $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$  qui s'appelle le coefficient de corrélation de X Y vaudrait 1 ou -1).

C'est donc dans cette direction qu'on va chercher : on va faire tourner les axes de façon à obtenir le rectangle le plus aplati possible.

Ici notre choix des axes  $\Omega X'$  et  $\Omega Y'$  n'est pas terrible, puisque le rectangle obtenu est moins aplati que celui qu'on avait.

##### 5. Recherche du rectangle le plus aplati

Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle ( $\Omega X, \Omega X'$ ) : exprimons, en fonction des données et de  $\alpha$  les côtés du rectangle qui résume le nuage, dans le repère ( $\Omega X', \Omega Y'$ ) :

$$\text{On a : } X' = \cos \alpha X + \sin \alpha Y$$

$$Y' = -\sin \alpha X + \cos \alpha Y$$

$$\sigma_{X'}^2 = X'^2 = (X \cos \alpha + Y \sin \alpha)^2 = X^2 \cos^2 \alpha + 2XY \sin \alpha \cos \alpha + Y^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Or } \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha ; 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \text{ et } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

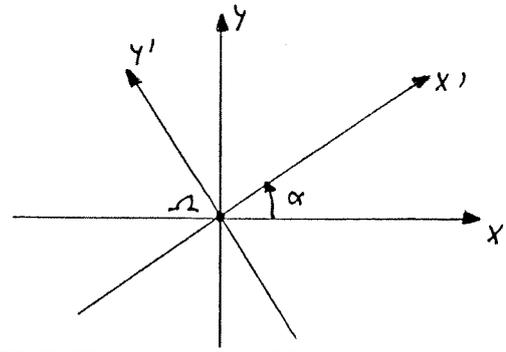
$$\text{D'où } \sigma_{X'}^2 = \frac{1}{2} (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) + \sigma_{XY} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} (\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) \cos 2\alpha$$

$\sigma_{X'}$  prendra une valeur extrême en même temps que  $\sigma_{XY} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} (\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) \cos 2\alpha$ . Cette expression est du type:  $a \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha$ .

On peut donc la transformer en  $A \cos (2\alpha - \varphi)$  où  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  ;  $\cos \varphi = \frac{b}{A}$  ;  $\sin \varphi = \frac{a}{A}$ .

Alors  $\sigma_{X'}$  sera minimum lorsque  $\cos (2\alpha - \varphi) = -1$  et maximum lorsque  $\cos (2\alpha - \varphi) = +1$ .

Pour connaître la valeur de  $\sigma_{Y'}$ , remarquons qu'il suffit de remplacer, dans l'expression de  $\sigma_{X'}$ ,  $\alpha$  par  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  : alors  $2\alpha - \varphi$  est remplacé par  $2\alpha - \varphi + \pi$  : le cosinus qui valait -1 vaut 1 et celui qui valait 1 vaut -1.



Il s'ensuit que lorsque  $\sigma^2_{X'}$ , est minimum,  $\sigma^2_{Y'}$ , est maximum, et vice versa.

On a bien affaire au rectangle le plus aplati possible. Calculons-le pour notre population :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X'} &= 20,2 + 6,1 \sin 2\alpha + 7,4 \cos 2\alpha \\ &= 20,2 + A \cos(2\alpha - \varphi)\end{aligned}$$

où  $A \approx 9,59$  et  $\varphi \approx 40^\circ$

$\sigma^2_{X'}$ , est maximum quand  $2\alpha - \varphi = 0$

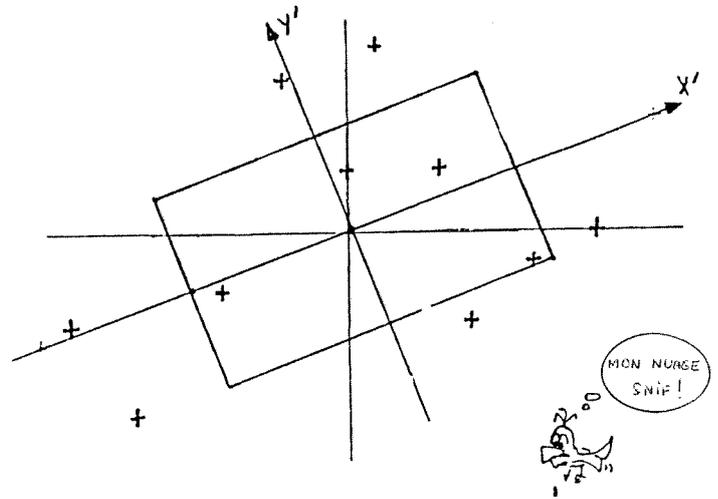
soit  $\alpha = \frac{\varphi}{2} \approx 20^\circ$

Alors  $\sigma^2_{X'} \approx 20,2 + 9,59 \approx 29,79$

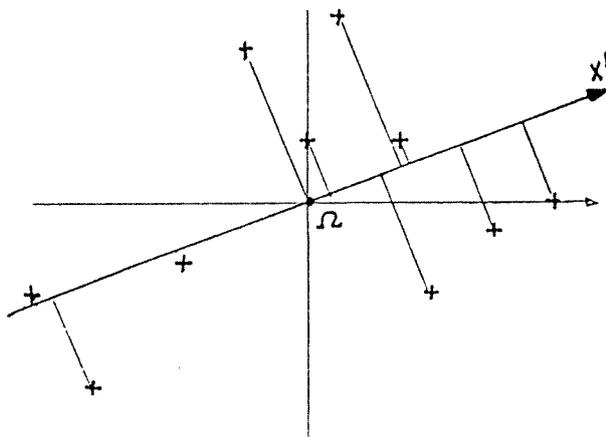
d'où  $\sigma_{X'} \approx 5,5$ .

Et  $\sigma^2_{Y'} \approx 20,2 - 9,59 \approx 10,61$

d'où  $\sigma_{Y'} \approx 3,3$ .



## 6. Appellations contrôlées !



Avec la méthode exposée ci-dessus, nous entrons dans un domaine d'appellations contrôlées !

La droite  $\Omega$   $X'$  est la droite la plus proche des points du nuage : la distance moyenne (quadratique) des points du nuage à cette droite est la plus petite possible ( $\sigma_{Y'} \approx 3,3$ ).

Elle s'appelle droite des moindres carrés du nuage ou aussi droite de régression orthogonale. Nous verrons

au paragraphe suivant ce que peut être une régression pas orthogonale.

Si on prenait la distance moyenne (arithmétique), on trouverait une autre droite la plus proche des points du nuage. Mais le calcul fait intervenir le minimum d'une somme de valeurs absolues, qui est techniquement difficile à traiter.

Enfin, on peut remarquer que la somme  $\sigma^2_{X'} + \sigma^2_{Y'}$ , ne dépend pas de  $\alpha$  : elle vaut  $\sigma^2_X + \sigma^2_Y$ . En d'autres termes, cette quantité, la variance totale du nuage, est invariante par rotation des axes, ce qui explique que quand  $\sigma^2_{X'}$ , est maximum, alors  $\sigma^2_{Y'}$ , est minimum. Cela signifie aussi que la diagonale de tous les rectangles a la même longueur  $2 \sqrt{\sigma^2_X + \sigma^2_Y}$ .

Pour les curieux, je signale que le nuage possède un autre invariant par rotation, qui est  $\sigma^2_X \sigma^2_Y - \sigma^2_{XY}$ . (Pour les savants : derrière ceci ce cache une matrice et ses valeurs propres...).

### 7. Résumé par un parallélogramme

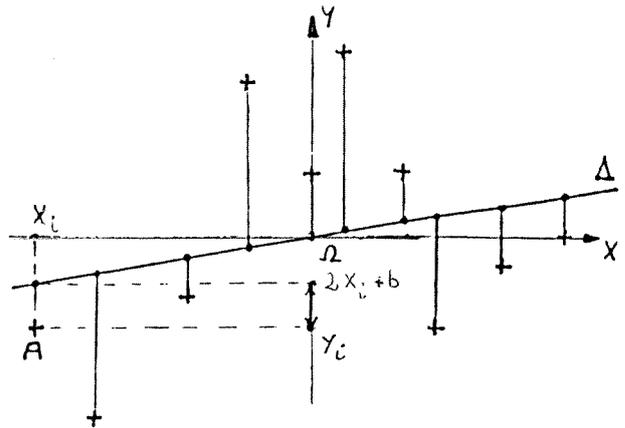
Comme dans le paragraphe précédent, on va chercher à minimiser la distance moyenne des points du nuage à une droite  $\Delta$ .

La différence tient à ce qu'on va mesurer les distances, non plus orthogonalement à  $\Delta$ , mais parallèlement à l'axe  $\Omega Y$ .

Ici encore, la moyenne quadratique va être utilisée, de préférence à la moyenne arithmétique.

Supposons que l'équation de  $\Delta$  soit du type  $Y = aX + b$ .

Si  $(X_i, Y_i)$  sont les coordonnées d'un point du nuage, la distance "verticale" de ce point à la droite  $\Delta$  est  $|Y_i - (aX_i + b)|$  : voir le dessin ci-dessus, pour le point A.



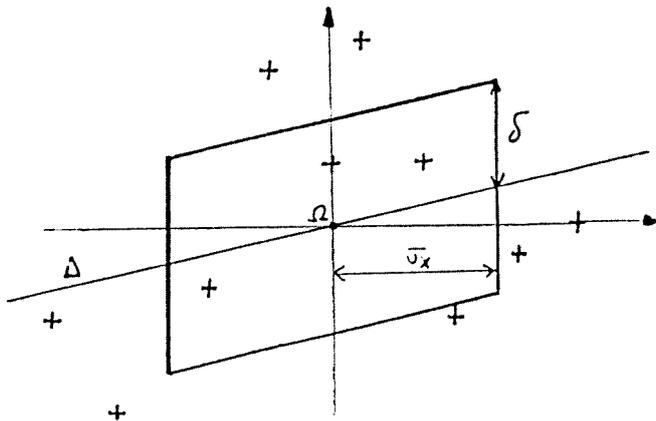
La moyenne des carrés de ces distances est :  $\overline{[Y - (aX + b)]^2} = \overline{Y^2 - 2Y(aX + b) + (aX + b)^2}$

Soit :  $Y^2 - 2aXY - 2bY + a^2 X^2 + 2abX + b^2$

Or  $\overline{Y} = \overline{X} = 0$ , on trouve donc :  $\sigma_Y^2 - 2a \sigma_{XY} + a^2 \sigma_X^2 + b^2$ .

Remarquons d'abord que, pour que cette expression soit minimale, il faut que  $b = 0$ , c'est-à-dire que  $\Delta$  passe par le centre du nuage  $\Omega$ , ce qui n'était pas a priori évident.

Ensuite, il nous reste un trinôme du second degré en  $a$ , qui admet un minimum pour  $a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$  : la droite  $\Delta$  cherchée a donc pour équation  $Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \cdot X$ .



Le minimum vaut alors  $\sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}$

et la distance moyenne est

$$\sigma = \sqrt{\sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}}$$

Dans notre exemple, on trouve  $Y \approx 0,22 X$  et la distance  $\sigma$  vaut à peu près 3,4.

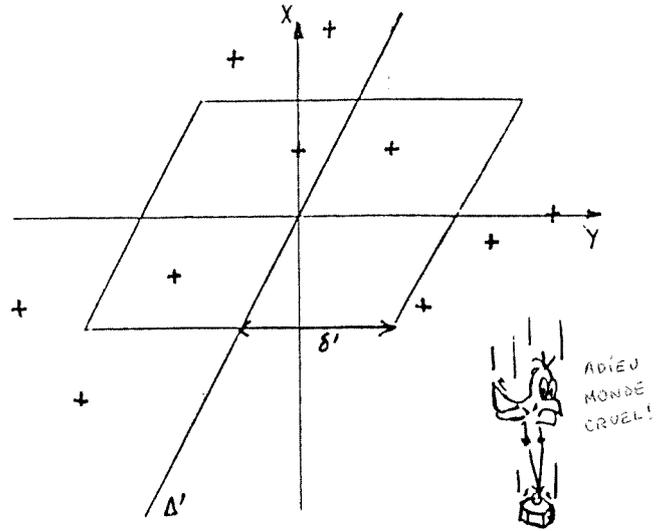
Alors c'est un parallélogramme centré en  $\Omega$  de côté vertical  $2\sigma$ , de dimension horizontale  $\sigma_X$ , qui résume le nuage.

L'appellation contrôlée de  $\Delta$  est "droite de régression de Y en X", et la méthode s'appelle méthode de régression linéaire.

Bi en entendu, on peut échanger les rôles de X et Y et calculer la droite de régression de X en Y, dont l'équation est  $X = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} Y$  et la distance moyenne est alors  $\sqrt{\sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}}$ .

On obtient une autre droite et un autre parallélogramme pour résumer le nuage.  
 Dans notre exemple, on trouve  $X \approx 0,484$   
 et  $\sigma' \approx 5$ .

Voilà : on a fait le tour des principales façons de décrire, de résumer un nuage. Laquelle choisir ?  
 Et après cette phase de réduction des données, quelle analyse peut-on faire ?



### CRITIQUE DE L'ART ABSTRAIT ! (Analyse des données)



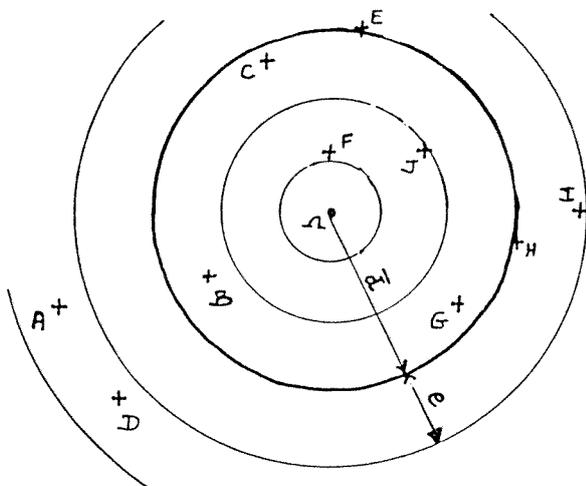
L'analyse des données, l'interprétation de la description qu'on a faite du nuage, consiste à répartir les individus de notre population en catégories.

On va chercher à réaliser une partition de la population en "classes".

Il existe de nombreuses méthodes ; limitons-nous aux méthodes issues des descriptions que nous avons faites ; les autres méthodes feront l'objet d'une prochaine "fiche cuisine".

### LE NUAGE COUPÉ EN TRANCHES (Analyse par lignes de niveau)

#### 1. Description par un cercle



On trace des cercles concentriques, de centre  $\Omega$ , et dont les rayons sont en progression arithmétique.

Ici, on a tracé le cercle "résumé" de rayon  $\bar{d}$  et les cercles de rayon  $\bar{d} - 2e$ ,  $\bar{d} - e$ ,  $\bar{d} + e$ ,  $\bar{d} + 2e$ .

On obtient la partition suivante :

$\{F, J\}$  ;  $\{B, C, G\}$  ;  $\{E, I, H\}$  ;  $\{A, D\}$  .

On peut classer les individus selon leur éloignement de  $\Omega$  :

F ; J ; B ; C ; G ; H ; E ; I ; D ; A.

Au lieu de tracer les cercles, on peut se contenter de calculer les distances à  $\Omega$  : pour un point M de coordonnées  $\left(\frac{X}{Y}\right)$ , on a  $\bar{d} = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

Cela nous permet de substituer les lignes de niveau à un indice  $\bar{d}$ .

Pour un individu de taille T (cm) et de poids P (kg), on calculera donc l'indice

$$\bar{d} = \sqrt{(T - 172)^2 + (P - 66)^2}$$

soit encore  $\bar{d} = \sqrt{T^2 - 344T + P^2 - 132P + 33940}$  : de quoi impressionner les foules !

Derrière cette formule savante se cache alors le postulat qu'il y a un poids idéal et une taille idéale dont il "faut" se rapprocher : plus votre indice est élevé, plus vous êtes anormal !

Cette affirmation d'un idéal unique, semble passée de mode, pour ce qui est du poids et de la taille. Elle ne permet pas de séparer les "petits gros" des autres.

2. Description par un rectangle :

Qu'a-t-on fait ?

On a observé l'ombre du nuage sur un axe qui tourne.

Ou, ce qui revient au même, on a tourné autour du nuage, et on a observé sa silhouette.

Celle-ci se déforme, dépend de notre position, de notre point de vue.

En particulier il y a deux positions extrêmes :

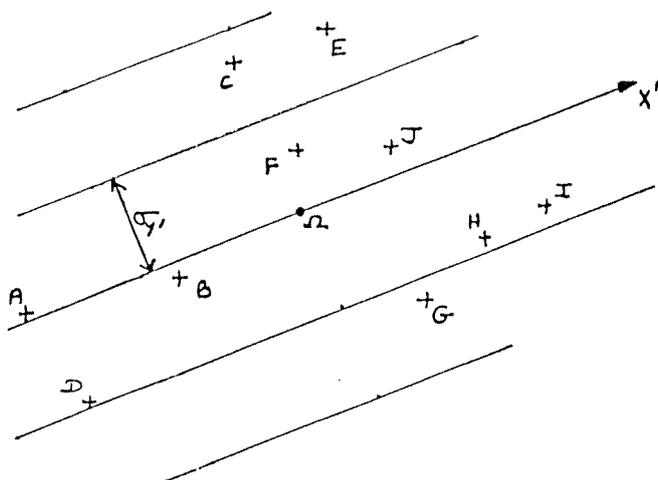
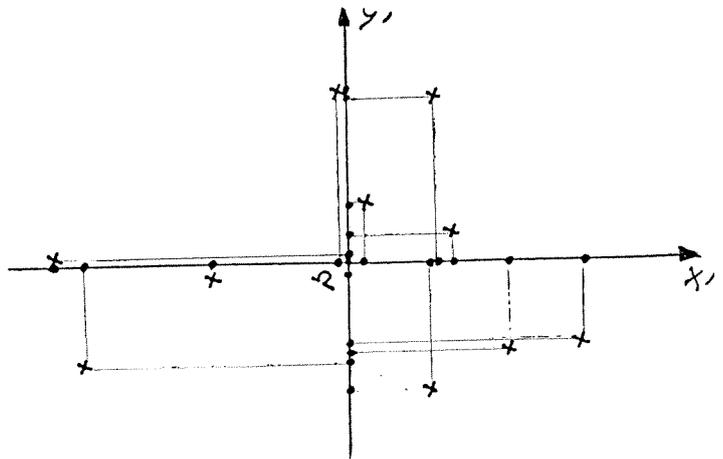
l'une où la silhouette est la plus ramassée, et l'autre où elle est, au contraire, la plus dispersée.

Par contre, on a vu que la variance totale ne dépendait pas du "point de vue" adopté.

La valeur maximale de la variance de l'ombre du nuage,  $\sigma_{X'}$ , valait 29,79, soit 74 % de la variance totale : on dit que l'axe  $\Omega X'$  explique 74 % de la variance du nuage.

Et on ne peut pas faire mieux.

Quant aux 26 % de variance qui restent, ce sont ceux qui vont nous permettre de classer les individus de notre population !



Les lignes de niveau sont des droites parallèles à  $\Omega X'$ , distantes entre elles de  $\sigma_{Y'}$ .

On obtient la partition suivante :

$\{C, E\}$  ;  $\{A, F, J\}$  ;  $\{D, B, H, I\}$  ;  $\{G\}$  .

Et la classification (selon les valeurs de  $|Y'|$ ) :

nom :	A	B	J	F	I	H	D	G	E	C
Y' :	0,26	0,51	0,85	1,88	2,74	2,99	3,24	4,19	5,30	5,38

Le principe est simple : une fois qu'on a "expliqué" la ressemblance entre les individus par la direction  $\Omega X'$ , on les classe par leur distance à cet axe.

En d'autres termes, l'équation de  $\Omega X'$  représente alors la relation "idéale" entre X et Y : à savoir dans notre cas  $Y' = 0 \Leftrightarrow -\sin \alpha X + \cos \alpha Y = 0 \Leftrightarrow 0,940Y - 0,342X = 0$ .

On peut ici encore remplacer le tracé des lignes de niveau par le calcul d'un indice  $|Y'|$  :

$$|Y'| = |0,940 Y - 0,342X| = |0,940(P - 66) - 0,342 (T - 172)| \quad \text{si P est le poids} \\ = |0,940 P - 0,342 T - 3,192| \quad \text{et T la taille.}$$

Derrière cette formule (savante ?) se cache donc le postulat qu'il existe une relation linéaire entre la taille et le poids, dont il faut se rapprocher.

Là encore, plus votre indice est élevé, plus vous êtes anormal !

Ce genre de formule est très répandu (en général sans les valeurs absolues), sous la forme  $P = aT + b$  représentant le poids "idéale" en fonction de la taille. Les nombres a et b dépendent évidemment de l'échantillon qui a servi à le calculer : est-il représentatif ? et de quoi ?

Peut-on définir un ensemble des petits gros ?

Oui, et c'est facile :

Il suffit de trouver un indice qui croît avec le poids et décroît avec la taille.

Or la coordonnée  $Y'$  vérifie ces propriétés :

Plus  $Y'$  est élevé, plus on est petitgros ; pour  $Y' = 0$  on est normal.

Et pour  $Y'$  négatif, on entre dans la catégorie des grands maigres.

Il reste à fixer le seuil à partir duquel on est un petit gros. Pour notre population, le seuil  $\sigma_{Y'}$  est discriminatoire.

Alors on a la partition :  $\{C, E\}$  : petits gros  
 $\{A, B, D, F, I, J, H\}$  : normaux  
 $\{G\}$  : grands maigres.

Pour une analyse plus fine, on peut tracer un réseau plus serré de lignes de niveau : on obtiendra alors des classes plus nombreuses.

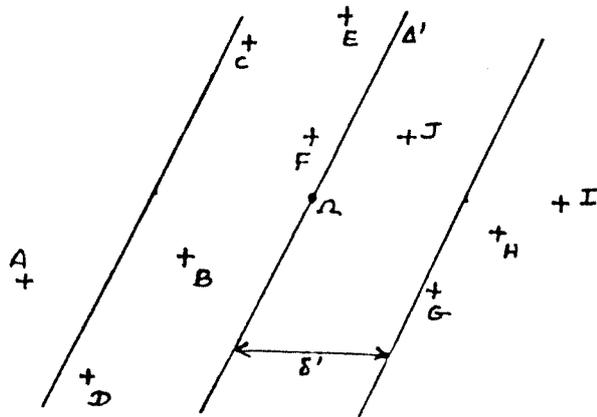
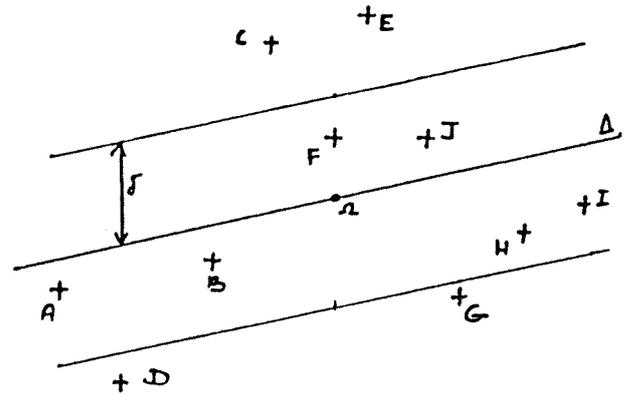
### 3. Description par un parallélogramme

Le principe est rigoureusement le même que précédemment : la direction des lignes de niveau est alors celle de la droite de régression linéaire utilisée.

Le tracé des lignes de niveau peut être remplacé par le calcul de l'indice  $i = |Y - aX|$ , distance du point de coordonnées  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  à la droite de régression de Y en X, si c'est cette dernière qu'on utilise : dans notre exemple on aura  $i = |Y - 0,22 X|$  d'où la classification différente de la précédente :

nom :	A	B	J	I	F	H	G	D	C	E
i :	1,01	1,11	1,34	1,77	2	2,32	3,88	4,45	5,44	5,78

La partition de la population a changée :  
 $\{C, E\}$  ;  $\{F, J\}$  ;  $\{A, B, H, I\}$  ;  $\{D, G\}$   
 Et si les petits gros, au seuil d'un écart type  $\sigma$ , sont toujours  $\{C, E\}$ , D rejoint la catégorie des grands maigres.  
 A titre de curiosité, utilisons à présent l'autre droite de régression linéaire :



Nous voici face à une nouvelle partition :  
 $\{A\}$  ;  $\{B, C, D, E, F\}$  ;  $\{J\}$  ;  $\{G, H, I\}$   
 et à une nouvelle classification par les valeurs de  $i' = |X - a'Y|$  avec

$$a' = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma^2_Y} \approx 0,48$$

nom :	F	E	J	B	D	C	G	H	A	I
i' :	0,95	1,86	2,09	3,05	4,14	4,38	5,43	6,48	7,57	8

Quant aux petits gros, si on reste au seuil d'un écart type  $\sigma'$ , seul A en fait partie.  
 Par contre, cette fois, le groupe des grands maigres est  $\{G, H, I\}$ .

Quelle description choisir alors ? Et quelle interprétation ?  
 La réponse du statisticien : toutes à la fois, mais en ne conservant que les conclusions communes.

Si on exclut la description par un cercle, qui ne semble pas convenir à notre problème, quelles sont les conclusions communes aux trois régressions ?

G est un "grand maigre" ; B, F et I sont "normaux".

Et c'est tout ! Avec un seuil un peu plus bas pour la dernière régression, C serait encore un petit gros : disons que C est presque un petit gros !

Non ! Les aventures du petit gros ne sont pas terminées !

Vous le retrouverez dans une prochaine fiche cuisine de tonton Lulu :

"Lutte des classes dans un nuage..."

A bientôt !

DE L'ENTREE EN 6° AU PASSAGE EN 1<sup>ère</sup>

Examens de passage dans l'Académie

Transmis par M. SILVESTRE

## § 1. ADMISSION EN 6° (1 H. COEFF. 1)

OPERATIONS

$$645,6 \times 3,05 \qquad 3,75 + 200 + 0,6 + 1,25$$

$$18,1 : 36,2 \qquad 370,06 - 85,4$$

SENS DES OPERATIONS

Pour chaque problème, écris en ligne, sans la compter, l'opération que tu ferais pour trouver la réponse.

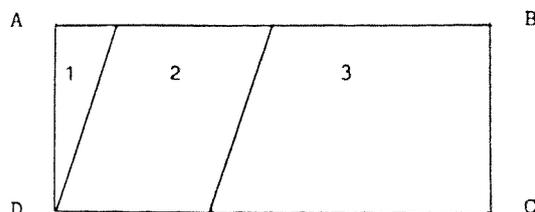
- 1) J'achète 4 baguettes de pain à 2,05 F l'une. Combien dois-je payer ?
- 2) J'achète un poste de télévision valant 4 500 F. Le marchand me reprend mon vieux poste pour 500 F. Combien vais-je payer ?
- 3) Marc est né en 1959 ; quel âge avait-il en 1982 ?
- 4) 5 personnes ont déjeuné au restaurant ; la dépense totale a été de 250 F. Quel est le prix d'un repas ?
- 5) La recette d'une séance de cinéma est 2 820 F. Le prix d'une place est 12 F. Quel est le nombre de spectateurs ?
- 6) J'achète un bidon de 3 l d'huile pour 36 F. Je paie avec un billet de 50 F. Quelle somme me rend-on ?
- 7) Le tour Nivernais-Morvan se court en 3 étapes. 1ère étape 125 km ; 2ème étape 160 km ; 3ème étape 230 km. Quelle est la distance totale parcourue en km ?
- 8) Dans cet exercice tu poses la question puis l'opération en ligne.  
J'ai acheté 4 m de tissu qui valent 120 F.

PROBLEMES

- A. La salle de repas d'une cantine scolaire comprend 4 rangées de 5 tables, chaque table a 6 places.
- Fais un dessin de la salle avec les tables.
  - Combien peut-on au maximum recevoir d'enfants ?
  - Si 280 enfants doivent manger à la cantine, combien faut-il de services ?
- B. Un carré a 120 m de périmètre ; calcule la mesure du côté puis l'aire de ce carré.

GEOMETRIE

Donne le nom précis du quadrilatère ABCD et des figures 1,2,3.



## § 2. APPEL EN FIN DE 5°. ADMISSION EN 4° (1 H. COEFF. 2)

EXERCICE I

Calculer

- a)  $0,01 \times 12 - (-123) \times (-0,02)$   
 b)  $(-0,1)^2 + (-0,023) \times 10^2$   
 c)  $|-6 + 5| - |2 + 8 - 14|$   
 d)  $12,4 + (-1,3 - 4,7) - 5 \times 0,7$

puis classer par ordre croissant les résultats obtenus.

EXERCICE II

- a) Calculer le p. g. c. d. de 26 et 91 ; l'utiliser pour écrire l'expression  $26x - 91$  sous la forme d'un produit.  
 b) Factoriser  $7x^2 + 21x - 14xy$

EXERCICE IIIConstruire un parallélogramme ABCD tel que  $AB = 6 \text{ cm}$   $BC = 4 \text{ cm}$   $\hat{B} = 105^\circ$ Placer un point M sur le segment [AD] tel que  $AM = 1,5 \text{ cm}$ 

Mener par M la parallèle à la droite (BD) ; elle coupe la droite (AB) en N

Mener par N la parallèle à la droite (AC) ; elle coupe la droite (BC) en P

Mener par P la parallèle à la droite (BD) ; elle coupe la droite (DC) en Q

Mener par Q la parallèle à la droite (AC) ; elle coupe la droite (AD) en un point R.

EXERCICE IVSoit l'ensemble  $E = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3\}$   
et l'application f de E dans  $\mathbb{Z}$ 

$$f : E \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto f(x) = (-3)x$$

- 1) Déterminer les images  $f(x)$  ces éléments  $x$  de E.
- 2) Représenter graphiquement l'application f en choisissant des axes perpendiculaires et l'unité égale à 1 cm.
- 3) a) Résoudre dans E l'équation  $-3x = 6$   
Quel est l'antécédent de 6 par l'application f ?  
b) 3 a-t-il un antécédent par l'application f ?

EXERCICE V

On verse deux litres d'eau dans une casserole cylindrique de 10 cm de rayon.

- a) Donner en  $\text{cm}^3$  le volume d'eau.
- b) Calculer l'aire de la base (prendre 3,14 comme valeur approchée de  $\pi$ ).
- c) Calculer la hauteur de l'eau dans la casserole (on donnera le résultat à 1 mm près).

## § 3. APPEL EN FIN DE 3°. ADMISSION EN 2° (2 H. COEFF. 4)

Exercice I :

On considère les applications  $f$  et  $g$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définies par :

$$f(x) = -3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{5}x + 10$$

- 1) Calculer  $f(-2)$ ,  $f(\frac{1}{2})$ ,  $g(-3)$ ,  $g(-\frac{1}{3})$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :
  - a) L'équation  $f(x) = g(x)$
  - b) L'inéquation  $f(x) < g(x)$
- 3) Tracer les représentations graphiques des applications  $f$  et  $g$  dans un plan muni d'un repère orthonormé.  
Retrouver graphiquement le résultat de 2) a).

Exercice II :

Soient les fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = (3x-2)^2 - (1-2x)^2$$

$$g(x) = x^2 + 1 - 2x + 3(x-1)(2x+3) + 2(1-x)$$

- 1) Ecrire  $f(x)$  et  $g(x)$  sous forme de polynômes réduits et ordonnés.
- 2) Ecrire  $f(x)$  et  $g(x)$  sous forme de produits de polynômes du premier degré.
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = g(x)$ .

Exercice III :

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dont l'unité est le cm,

on donne les points  $A(3,6)$   $B(4,-2)$   $C(-\frac{7}{2}, -2)$

- 1) Faire une figure : placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- 2) Exprimer les vecteurs  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- 3) Déterminer le vecteur  $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC}$ .
- 4) Construire le point  $S$  tel que  $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB}$ . Quelles sont les coordonnées de  $S$  ?  
Que peut-on dire des points  $S$ ,  $O$ ,  $C$  ? Justifier.
- 5) Montrer que les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  sont orthogonaux.
- 6) Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle  $OAB$ .
- 7) Etablir une équation de la droite passant par  $B$  et de vecteur directeur  $\vec{OA}$ .

## § 4. BREVET DES COLLEGES (1 H 30 . COEFF. 1)

EXERCICE I

On considère les applications  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f(x) = (x + 3) (5x - 2) - (x + 3) (2x + 5)$$

$$g(x) = (3x + 6)^2 - (2x + 3)^2$$

- 1) a) Ecrire  $f(x)$  et  $g(x)$  sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.  
b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$
- 2) a) Ecrire  $f(x)$  et  $g(x)$  sous forme développée et ordonnée.  
b) Calculer  $f(0)$  puis  $f(\sqrt{3})$  dont on donnera un encadrement sachant que  $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ .  
c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $g(x) = 27$ .

EXERCICE II

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dont l'unité est le cm, placer les points :  
A (2 ; 3) , B (0 ; 1) et C(6 ; -1)

- 1) Calculer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Calculer les coordonnées de son centre K.
- 2) Par K on mène la parallèle à (AB). Elle coupe (BC) en L.  
Préciser, en justifiant, la position du point L sur le segment  $[BC]$  .
- 3) Calculer les distances AB, BC, AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 4) Soit A' le symétrique de A par rapport à L. Calculer les coordonnées de A'.  
Quelle est la nature du quadrilatère ABA'C ?

## § 5. APPEL EN FIN DE 2°. ADMISSION EN 1° (2 H.)

Candidats à l'entrée en Première S : traiter les problèmes 1 et 2  
 Candidats à l'entrée en Première A<sub>1</sub> ou B : traiter les problèmes 1 et 3  
 Candidats à l'entrée en Première A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub> ou G : traiter les problèmes 3 et 4

PROBLEME N°1 Candidats à l'entrée en Premières A<sub>1</sub>, B ou S

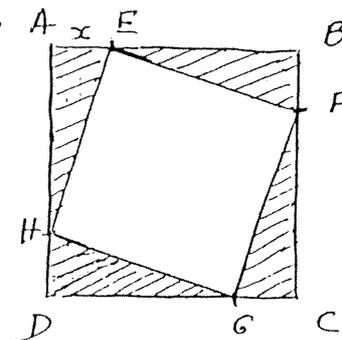
On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto -2x^2 + 4x$

et on désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère ortho-normé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , l'unité de longueur étant le centimètre.

- 1) La courbe (C) admet-elle des points communs avec l'axe des abscisses ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.
- 2) Tracer (C)
- 3) Soit B(2,0)
  - a) Déterminer une équation de la droite ( $\Delta$ ) passant par B de coefficient directeur -1
  - b) ( $\Delta$ ) recoupe (C) en un point E. Déterminer les coordonnées de E
  - c) Tracer ( $\Delta$ )
- 4) Soit F(0,8). Déterminer une équation cartésienne de la droite (BF). Démontrer que  $(BF) \cap (C)$  ne contient qu'un seul point.
- 5) On considère la fonction :  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto -2x|x| + 4x$ 
  - a) Etudier la parité de g.
  - b) Pour quelles valeurs de x a-t-on  $g(x) = f(x)$  ?
  - c) En déduire la représentation graphique de g.

- 6) Soit ABCD un carré de côté 2  
 Soit E un point du segment [AB]. On pose AE=x  
 F,G,H sont respectivement les points des segments [BC], [CD] et [DA] tels que BF = CG = DH = x

- a) Exprimer en fonction de x l'aire S(x) de la partie hachurée
- b) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ? Déduire la réponse des questions précédentes.



PROBLEME N°2 Candidats à l'entrée en Première S

- 1) Placer dans le plan trois points A, B et C tels que AB = 3 cm ; BC = 5 cm ; AC = 4 cm  
 et le barycentre G des points pondérés (A,1) , (B,2) , (C,3).  
 Quelle est la nature du triangle ABC ? (justifier votre réponse).
- 2) Calculer les distances GA, GB, GC.

- 3) On considère l'application  $f: P \xrightarrow{\mathbb{R}^+} \mathbb{R}^+$   
 $M \xrightarrow{\quad} MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$
- a) En posant  $\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA}$ ,  $\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB}$  et  $\vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GC}$ , établir que  
 $f(M) = 6MG^2 + 36$
- b) Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que  $f(M) = 84$  ?  
 Dessiner E.
- 4) On considère le repère  $\mathcal{R}$  du plan tel que dans ce repère on ait A(0,0), B(0,3) et C(4,0).  
 Ecrire une équation de E dans  $\mathcal{R}$  et une équation de la tangente T à E en B.
- 5) Soit H l'homothétie de centre C et de rapport  $-\frac{1}{2}$
- a) On pose  $A' = H(A)$ . Placer le point A'
- b) Dessiner l'image par H de la droite (AG).

PROBLEME N°3 Candidats à l'entrée en Premières A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, B, G  
 =====

- 1) Représenter dans un même repère les droites (d<sub>1</sub>) et (d<sub>2</sub>) d'équations :
- (d<sub>1</sub>) :  $x - 20y = 0$                       (d<sub>2</sub>) :  $3x - 20y - 30 = 0$
- (On prendra pour unités : 0,5 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).
- 2) On appelle C leur point commun. Déterminer les coordonnées de C.
- 3) On considère les points A(10 ;  $\frac{1}{2}$ ) et B(20 ;  $\frac{3}{2}$ )  
 Vérifier que A est élément de (d<sub>1</sub>) et que B est élément de (d<sub>2</sub>).  
 Déterminer une équation de la droite (d<sub>3</sub>) passant par A et B.
- 4) Dans une confiserie, on pratique les réductions suivantes sur tout achat d'un montant x (x en francs)
- si  $x \leq 10$                       la réduction est de 5 %
- si  $10 < x \leq 20$                 la réduction est de 0,50F plus 10 % de la partie du montant x supérieure à 10 F
- si  $20 < x$                         la réduction est de 1,50F plus 15 % de la partie du montant x supérieure à 20 F.

On appelle y le montant de la réduction

- a) Vérifier que si  $x \leq 10$             on a  $y = 0,05x$
- b) Vérifier que si  $10 < x \leq 20$     on a  $y = 0,1x - 0,5$
- c) Déterminer y lorsque  $x > 20$
- d) Représenter dans un nouveau repère la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  et qui associe le montant de la réduction au montant initial de l'achat.
- e) Un client obtient 1 F de réduction. Quel est le montant de son achat ?  
 Quelle est la somme effectivement payée par ce client ?

PROBLEME N°4 Candidats à l'entrée en Premières A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, G  
 =====

DNA = Dernières Nouvelles d'Alsace  
 NA = Nouvel Alsacien

Une enquête auprès de 60 personnes révèle que :

9 personnes ne lisent ni les DNA ni le NA  
 36 personnes lisent les DNA (et peut-être aussi le NA)  
 27 personnes lisent le NA (et peut-être aussi les DNA)

On appelle  $x$  le nombre de personnes lisant à la fois les DNA et le NA  
 $y$  le nombre de personnes ne lisant que les DNA  
 $z$  le nombre de personnes ne lisant que le NA  
 et on note A, B, C respectivement les ensembles ainsi envisagés.

- 1) Déterminer la somme  $x + y + z$ .
- 2) Exprimer  $y$  en fonction de  $x$ .
- 3) Exprimer  $z$  en fonction de  $x$ .
- 4) Déterminer  $x$ ,  $y$  et  $z$ .
- 5) On suppose que dans A, B et C il y a  $\frac{1}{2}$  de femmes. Déterminer le nombre d'hommes lisant un seul des deux journaux.
- 6) Quel est le pourcentage, par rapport à l'ensemble des personnes interrogées, des hommes qui lisent les DNA ?

INFORMATION

---

MATHEMATIQUE POUR LES ELEVES DE 14 A 17 ANS,  
 EST-CE QU'ILS EN ONT VRAIMENT BESOIN ?

---

C'est le thème de la prochaine rencontre de la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) qui aura lieu du 24 au 30 juillet 1986 à Southampton (Angleterre).

Les objectifs sont de développer des recommandations sur le thème et les sous-thèmes. Elles seront présentées aux séances plénières et publiées ainsi que les exposés faits par les conférenciers.

Informations : Peter Bowie, Shalbourne, Marlborough, SN8 3QD, ENGLAND.

COURRIER

De Monsieur Robert VIDAL de Narbonne

Je lis l'article "Réactions en chaîne" de Michel de Cointet (p. 25 de l'"Ouvert" n° 38 de Mars 1985), que je trouve d'ailleurs très intéressant et vais utiliser avec mes secondes.

Juste une remarque double :

① Page 27. Les "bonnes" formules sont :

$$a_n = \frac{(b + a\sqrt{3})^n - (b - a\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

$$b_n = \frac{(b + a\sqrt{3})^n + (b - a\sqrt{3})^n}{2}$$

(si  $n = 1$ , on retrouve  $a_1 = a$  et  $b_1 = b$ ).

② Au bas de cette page, Michel de Cointet écrit : "Dommage que la formule du binôme ne soit pas au programme de Seconde car on peut calculer  $a_8$  et  $b_8$  en l'utilisant et en se passant de calculatrice !". Je suis d'accord avec lui pour regretter que la formule du binôme ne soit pas au programme de Seconde, mais ici on utilise le fait que

$x^8 = ((x^2)^2)^2$  et en tenant compte des expressions conjuguées, il suffit de faire un seul calcul :  $(2 + \sqrt{3})^8 = 18817 + 10864\sqrt{3}$ .

Inutile d'utiliser la formule de Newton.

---

De Monsieur G. REHLINGER d'Eguisheim

Cher marquis,

Serait-ce donc toi "ce professeur d'arithmétique intéressé à l'éducation des jeunes-filles" ?

Je n'ai pu m'empêcher d'y penser et sans autre vérification, j'annonce ouvertement ton nom : Sade !

Eh bien non, cher collègue ; il ne s'agit pas du marquis de Sade. Mais l'idée n'est pas mauvaise. Personne n'a deviné qu'il s'agit de Pierre Choderlos de LACLOS, officier et historien français (1741-1803), dont la réputation est dûe au roman épistolaire : "Les Liaisons Dangereuses", écrit en 1782.