TIROIRS BOURRES EN TERMINALE D

Jean LEFORT

Une classe de Terminale D, très faible à mon goût : peu ou pas de motivation pour l'étude scolaire en général, passivité totale en classe...

Comme le rôle du professeur est justement de motiver ses élèves, j'essayais régulièrement de proposer des problèmes qui me semblaient intéressants ou qui semblaient pouvoir piquer leur curiosité. Je n'avais guère eu de succès sauf à propos des équations différentielles. Manque de flair pédagogique ?!

J'aborde le chapitre *"dénombrements"* du programme sous forme d'exercices très classiques puis en conclusion de l'étude des C_n^p je propose le problème suivant :

> **On dispose de n tiroirs, m objets. De combien de façons peut-on ranger ces m objets dans les n tiroirs sachant que chaque tiroir peut recevoir au plus p objets ?**

1) Pour forcer à la recherche cette classe qui baisse les bras trop facilement, je commence par demander ce que l'on entend par *"rangements différents"*. De la discussion que je porte à bout de bras on finit par dégager trois systèmes différents que je schématise par les graphiques ci-après :

*	abc	de		fg		h
	bc		adf		eh	g

C'est le même rangement car il existe dans les deux cas un seul tiroir contenant 3 éléments, deux tiroirs comportant deux éléments...
Ni les tiroirs ni les objets ne sont différenciés.

	1	2	3	4	5	6
*	abc	de		fg		h
	adf	bc		eh		g

C'est le même rangement car dans un tiroir de numéro donné il y a dans les deux cas le même nombre d'éléments.
Les tiroirs sont différenciés mais pas les objets.

	1	2	3	4	5	6
*	abc	de		fg		h
	bac	ed		fg		h

C'est le même rangement car seul l'ordre des objets dans les tiroirs change. **Tiroirs et objets sont différenciés.**

Je propose de traiter le problème avec la deuxième définition (objets indifférenciés dans des tiroirs numérotés).

2) **On traite le cas p = 1.** Aucune difficulté, c'est une application directe du calcul des combinaisons. On trouve C_n^m .

3) **On traite le cas p = 2.** Il n'est pas question, dans un premier temps, de trouver une formule générale, et je le signale aux élèves en leur disant qu'il faut d'abord se contenter de remplir case par case le tableau ci-dessous:

m \ n	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

a) Toutes les cases ne sont pas à remplir ; il y a impossibilité lorsque le nombre d'objets est trop grand : m $>$ pn.
On hachure donc toutes les cases pour lesquelles m $>$ 2n.

b) On remarque que si il y a exactement pn (ici 2n) objets, alors il faut *"bourrer"* tous les tiroirs et il n'y a évidemment qu'une solution possible.

c) On remplit ensuite le tableau par ligne. On trouve que
* pour m = 1 il y a n possibilités
* pour m = 2 il y a $C_n^1 + C_n^2$ possibilités
* pour m = 3 il y a $C_n^3 + 2C_n^2$ possibilités et enfin
* pour m = 4 il y a $C_n^4 + 3C_n^3 + C_n^2$ possibilités.

Il a fallu du temps pour mettre en évidence ces formules qui s'expliquent bien quand on cherche les diverses façons de regrouper m objets. Effectuons la démonstration pour m = 4.

On a : - soit la répartition 1 - 1 - 1 - 1 de C_n^4 façons
- soit la répartition 1 - 1 - 2 de C_n^3 façons mais le "2" peut être placé de 3 façons
- soit enfin la répartition 2 - 2 de C_n^2 façons. D'où le total.

En conclusion provisoire de cette étude, nous avons abouti au tableau de la page suivante.

m \ n	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3		2	7	16	30
4		1	6	19	45
5					
6			1		
7					
8				1	
9					
10					1

d) **Une première hypothèse**

Un élève fait remarquer qu'il semble apparaître une sorte de symétrie dans chaque colonne (au moins dans la 1ère, 2ème et 3ème) et que dans la 3ème colonne on attend un "3" dans la case encore vide. Et qu'on pourrait alors complèter entièrement la 4ème colonne en :

4 - 10 - 16 - 19 - 16 ? - 10 ? - 4 ? - 1.

On vérifie rapidement deux cas particuliers :

m = 5, n = 3 et m = 6, n = 4 qui satisfont bien à cette *"symétrie"*.

Je montre alors que la *"symétrie"* pourrait être plus forte si on ajoutait une ligne m = 0 qui évidemment ne contiendrait que des "1" ce qui est assez naturel (il n'y a qu'une façon d'avoir tous les tiroirs vides !).

e) **Une deuxième hypothèse**

m \ n	1	2	3	4	5	
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3		2	7	16	30	50
4		1	6	19	45	90
5			3	16*	51	
6			1	10	45*	
7				4*	30*	
8				1	15*	90*
9					5*	50*
10					1	21*
						6*
						1

dans ce tableau, les cases marquées * sont remplies en fonction de la 1ère hypothèse.

La première hypothèse est insuffisante pour remplir la case m = 5, n = 5.

Les élèves proposent différents nombres, tous multiples de 5 jusqu'à ce que l'un d'eux propose 51. Il a fait le calcul explicite.

Le tableau est alors complet pour n < 5 et je propose une recherche de remplissage systématique analogue à la construction du triangle de Pascal.

Différentes solutions sont proposées qui après quelques tests sont rejetées par la classe.

Enfin, un élève propose le schéma suivant :

	c	
		b
	a	A

$A = a + b - c$

On complète par des "0" les cases impossibles et la 1ère colonne commençant par trois "1".

Cette hypothèse, après quelques essais, remporte l'adhésion de tous les élèves.

4) Conclusion provisoire

A la fin de cette première séance, la classe a abouti à deux hypothèses. En notant N_n^m le nombre de façons de ranger m objets dans n tiroirs avec 2 objets au plus par tiroir, ces hypothèses s'écrivent :

$$N_n^m = N_n^{2n-m}$$

et

$$N_n^m = N_{n-1}^m + N_n^{m-1} - N_{m-3}^{n-1} \quad .$$

Je propose aux élèves de rechercher une démonstration de ces deux propositions pour le cours suivant...

5) Un échec pédagogique

Au cours suivant, je constate un désintérêt total pour ce problème. Personne n'a rien cherché. Lassitude ? Peut-être, mais surtout personne ne ressent la nécessité d'une démonstration. Cela s'est déjà produit de nombreuses fois dans le cours et se reproduira encore. Ces élèves assimilent vérifications nombreuses et démonstrations, attitude que je ne peux admettre en terminale scientifique mais contre laquelle je suis bien désarmé.

J'hésite alors à leur parachuter une démonstration qui ne les intéresse manifestement pas. J'opte finalement pour une demi-mesure : je donne la démonstration de la première hypothèse ($N_n^m = N_n^{2n-m}$), démonstration que l'on trouvera ci-après et me contente d'annoncer que pour la 2ème hypothèse il est plus facile de démontrer que :

$$N_n^m = N_{n-1}^m + N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2} \, .$$

Il y a alors un regain d'intérêt de la part des élèves. J'entends même un *"comment se fait-il que je n'ai pas trouvé ça, c'est beaucoup plus simple"*. Mais cet intérêt disparaît dès que je propose la démonstration du passage de cette dernière formule à celle proposée au cours précédent. Seuls trois élèves se mettront au travail quand j'aurai écrit au tableau les deux lignes :

$$N_n^m = N_{n-1}^m + N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2}$$

$$N_n^{m-1} = N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2} + N_{n-1}^{m-3}$$

pour aboutir au résultat cherché.

Que fallait-il faire pour motiver ces élèves à la démonstration ?

6) Compléments pour les collègues

a) $\mathbf{N_n^m = N_n^{2n-m}}$. On peut toujours supposer que les m objets sont répartis dans les tiroirs de la façon suivante :

. 2k objets dans k tiroirs contenant chacun 2 objets

. l objets dans l tiroirs contenant chacun 1 objet.

On a donc $m = 2k + l$ et il y a $k + l$ tiroirs occupés et $n - (k+l)$ vides.

Remplaçons alors le contenu de chaque tiroir par son complément à 2. On obtient alors :

. k tiroirs vides

. l tiroirs contenant chacun 1 objet

. $n - (k+l)$ tiroirs contenant chacun 2 objets.

Au total il y a : $2\left[n - (k+l)\right] + l$ objets soit $2n - 2k - l$ ou encore $2n - m$ objets.

Il est clair que cette manoeuvre établit une bijection entre les rangements de m objets et ceux de $2n - m$ objets ce qui achève la démonstration.

Remarque : Cette méthode est tout à fait analogue à l'une de celle utilisée pour la démonstration de $C_n^m = C_n^{n-m}$ et se généralise au cas de p objets par tiroir en remplaçant le complément à 2 par le complément à p. On a donc avec une notation évidente :

$$N_{n,p}^m = N_{n,p}^{pn-m}$$

b) $\mathbf{N_n^m = N_{n-1}^m + N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2}}$. Isolons un tiroir particulier. Trois cas se présentent :

. Il est vide et les m objets se répartissent dans les $(n-1)$ tiroirs restants de N_{n-1}^m façons différentes.

. Il contient 1 objet et les $(m-1)$ objets restants se répartissent dans les $(n-1)$ autres tiroirs de N_{n-1}^{m-1} façons différentes.

. Il contient 2 objets et les $(m-2)$ autres se répartissent dans les $(n-1)$ tiroirs restants de N_{n-1}^{m-2} façons différentes.

Ces trois cas étant exclusifs, on a bien la relation indiquée.

Remarque : Un raisonnement analogue conduit dans le cas général avec p objets au plus par tiroir à :

$$N^m_{n,p} = N^m_{n-1,p} + N^{m-1}_{n-1,p} + N^{m-2}_{n-1,p} + \dots + N^{m-p}_{n-1,p} .$$

c) **Formule du trinôme.** Comment calculer $(x^2 + x + 1)^n$.

Chacun des n facteurs peut être assimilé à un tiroir et l'exposant du terme choisi dans ce facteur au nombre d'objet dans ce tiroir (2, 1 ou 0). Ainsi présenté on a :

$$(x^2 + x + 1)^n = \sum_{m=0}^{m=2n} N^m_n . x^m .$$

En donnant à x différentes valeurs numériques on obtient de nombreuses relations. Par exemple pour x = 1 on trouve :

$$\sum_{m=0}^{m=2n} N^m_n = 3^n .$$

Ou pour x = i ($i^2 = -1$) on trouve :

$$\sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m . N^{2m}_n + i . \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m . N^{2m+1}_n = i^n$$

ou pour x = j, etc...

Remarque : On généralise sans difficulté pour obtenir :

$$\left(\sum_{k=0}^{p} x^k \right)^n = \sum_{m=0}^{pn} (N^m_{n,p}) x^m .$$

d) **Quelques tableaux**

p = 2

m \ n	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3		2	7	16	30	50
4		1	6	19	45	90
5			3	16	51	126
6			1	10	45	141
7				4	30	126
8				1	15	90
9					5	50
10					1	21
11						6
12						1
13						

p = 3

m \ n	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56
4		3	12	31	65	120
5		2	12	40	101	216
6		1	10	44	135	336
7			6	40	155	456
8			3	31	155	546
9			1	20	135	580
10				10	101	546
11				4	65	456
12				1	35	336
13					15	216
14					5	120
15					1	56
16						21

.....

De même que pour le triangle de Pascal, on peut trouver une infinité de relations à l'intérieur de ces tableaux ou entre ces tableaux. Voici quelques propositions :

. Pour p = a et p = b, quelles sont les lignes identiques ?

. Existe-t-il une formule pour $N^m_{n,p}$ analogue à $C^m_n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$?

. Y a-t-il une relation simple entre $N^m_{n,p}$ et $N^m_{n,p'}$?