Une occasion manquée dans l'histoire des sciences :

LEIBNITZ AURAIT-IL PU DECOUVRIR LA RELATIVITE ?

Claude COMTE (*)

INTRODUCTION

Il est communément admis que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière, fondé sur l'expérience de Michelson et Morley (1887), est essentiel pour établir la théorie de la relativité einsteinienne.

Cependant, nous allons montrer que la relativité aurait déjà pu être découverte par Leibnitz, à partir des connaissances que l'on avait à son époque, en approfondissant plus encore l'étude du problème qui constitue sa contribution majeure à la physique :

si l'on considère un système de corps soustraits à toute action extérieure et dont les interactions sont des collisions élastiques, existe-t-il des grandeurs qui se conservent au cours de ces interactions, et quelle est la forme de ces grandeurs ?

Les connaissances auxquelles nous faisons allusion sont résumées en un ensemble de principes rassemblés dans le paragraphe 2. Parmi ceux-ci figure un principe fortement suggéré, mais non explicitement formulé par Galilée, **le principe d'équivalence** : Galilée affirmait que les expériences de mécanique effectuées sur la terre ferme étaient identiquement reproductibles dans la cale d'un navire en mouvement uniforme sur une mer calme ; l'expérience de Galilée suggère l'identité des lois de la mécanique dans le référentiel fixe et dans le référentiel

(*) Laboratoire de Spectroscopie - 5, rue de l'Université à Strasbourg (Associé au C.N.R.S.)

et

Groupe de Recherche en Epistémologie et Histoire des Sciences et des Institutions Scientifiques (Equipe de Recherche C.N.R.S.) à Paris

en mouvement uniforme. Leibnitz avait certainement connaissance des travaux de Galilée ; il semble qu'il ait appliqué ce principe pour obtenir la conservation de la quantité de mouvement à partir de la conservation de l'énergie (voir une note de H. Poincaré, référence 3).

Le principe d'équivalence est d'une importante capitale, aussi bien dans l'étude du problème des lois de conservation en mécanique que pour la théorie de la relativité.

Depuis la création de cette théorie par Einstein en 1905, plusieurs chercheurs ont montré que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière était superflu (depuis Ignatowsky, Frank et Rothe (1911) référence 7, jusqu'à J.-M. Lévy-Leblond (1976), référence 5), et que **le principe d'équivalence, combiné avec les autres invariances galiléennes** (énoncées au paragraphe 2), **suffisait pour établir la théorie.**

Autrement dit, le principe d'équivalence mérite d'être vraiment pris au sérieux, et non seulement appelé à la rescousse dans une passe difficile, comme c'est le cas aussi bien chez Leibnitz que dans la dérivation habituelle de la transformation de Lorentz en relativité, car il est doué d'une extraordinaire fécondité.

Dans cet article, nous allons voir ce principe constamment en action pour établir les lois de la mécanique. Nous allons voir la théorie évoluer de la mécanique de Newton et Leibnitz à la mécanique einsteinienne, à la recherche de sa cohérence interne, et pour remédier progressivement à ses insuffisances. Partant de l'addition vectorielle des vitesses en mécanique newtonienne, nous allons être conduits à réviser cette loi. Cette manière d'accéder à la théorie de la relativité n'a pas seulement l'avantage de souligner d'une manière spectaculaire l'importance du principe d'équivalence, elle va également à l'encontre d'une idée bien reçue, selon laquelle la relativité serait avant tout une théorie de l'espace et du temps.

Nous ne nous préoccupons pas ici du problème d'existence de lois de conservation, pour ne pas surcharger l'article ; ce problème très important est traité en référence 6, et fera l'objet d'une prochaine publication.

Comme Descartes et Leibnitz, nous admettons qu'il existe des lois de conservation du type

(1) $$\sum_i m_i f(\vec{x}_i) = \sum_i m_i f(\vec{x}'_i)$$

où m_i sont les masses des corps et $\vec{x}_i$, $\vec{x}'_i$ leurs vitesses dans l'état initial et dans l'état final respectivement. Le problème est de trouver la forme des fonctions $f(\vec{x})$.

Descartes croyait que dans un système de corps la **"quantité de mouvement"** définie par $\sum_i m_i \|\vec{x}_i\|$ se conserve (références 1, 3 et 4). Leibnitz a fait voir au contraire que ce n'est pas cette quantité qui se conserve, mais d'une part ce qu'il appelle la **"quantité d'action motrice"**, égale à la **"force vive"**, (c'est-à-dire l'énergie cinétique en termes modernes), et d'autre part la **"quantité de progrès"** $\vec{p} = m\vec{x}$ (appelée **impulsion** ou quantité de mouvement en termes modernes).

Leibnitz établit l'expression de l'énergie cinétique à partir d'une observation de Galilée sur la chute des corps (référence 2, Discours de Métaphysique, § 12) : lorsque la hauteur de chute est quadruple, la vitesse est double, et comme il faut autant d'énergie cinétique pour élever une masse de quatre livres à la hauteur d'une toise que pour élever une livre à quatre toises, il aboutit à la conservation de la quantité $\Sigma \frac{1}{2} mx^2$.

Il faut rendre homage à Leibnitz pour avoir formulé la loi de conservation de l'énergie aussi clairement que c'était possible à son époque. Cependant l'énergie cinétique est déterminée à partir d'une observation qui pouvait comporter une certaine erreur expérimentale. Le principe d'équivalence auquel il semble recourir pour déduire la conservation de l'impulsion de celle de l'énergie aurait sans doute constitué un fondement plus solide. Comme cette déduction est introuvable dans les écrits de Leibnitz (il y fait seulement allusion dans une lettre à Bernoulli du 28 janvier 1696), on peut lire ce qui suit comme un essai de reconstitution. Nous proposons une démarche qui ne fait appel qu'à des procédés élémentaires : nous décrivons une expérience de collisions, que nous analysons ensuite.

En bref, le problème est le suivant :

> **Quelles sont les formes possibles de l'énergie e(x) compatibles avec le principe d'équivalence ?**

§ 1. DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE

Soient deux paires de corps se mouvant selon la même ligne droite (figure 1). Dans l'état initial, les corps **P** et **P'** de masses égales **m** ont des vitesses opposées $\vec{x}$ et $-\vec{x}$ tandis que les corps **Q** et **Q'** de masses égales **M** sont au repos.

Réf. 1. G.W. LEIBNITZ — La Monadologie (Librairie Delagrave)

Réf. 2. G.W. LEIBNITZ — Discours de Métaphysique (Librairie Philosophique J. Vrin)

Réf. 3. H. POINCARE — Note sur les principes de la Mécanique dans Descartes et dans Leibnitz (en appendice de la référence 1.)

Les quatre corps sont des agrégats de corpuscules constitués de la même matière et liés infiniment faiblement les uns aux autres.

On assiste à une succession de collisions élastiques dont le déroulement est le suivant :

Tout d'abord les corpuscules constituant **P** et **Q** d'une part, **P'** et **Q'** d'autre part entrent en collision. Sous l'effet du choc, les corps se désintègrent en une gerbe de corpuscules. Dans le détail, le processus de collision est très compliqué, à cause de la possibilité de collisions multiples entre les corpuscules, menant à toute une gamme de vitesses de sortie possibles pour ceux-ci.

On suppose que les collisions ont lieu de façon parfaitement symétrique à gauche et à droite du plan de symétrie $\mathcal{P}$. Les corpuscules issus de **P** et **Q** rencontrent ceux issus de **P'** et **Q'** sur ce plan et rebroussent chemin. Ils peuvent encore rencontrer d'autres corpuscules se dirigeant vers $\mathcal{P}$, revenir vers $\mathcal{P}$ où ils rebondissent, et ainsi de suite ...

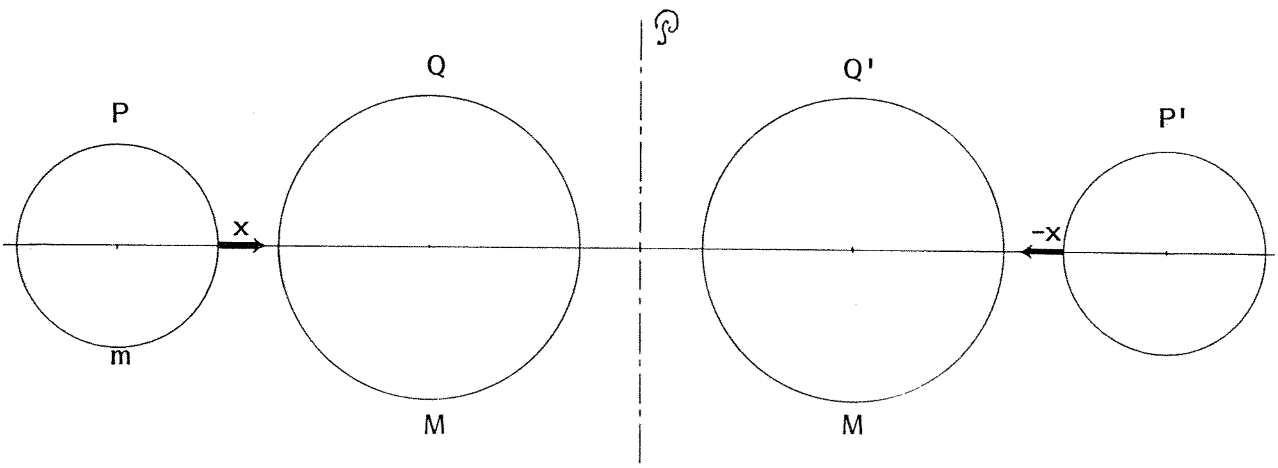

figure 1 : Expérience de "collisions symétriques"

Lorsque les collisions s'arrêtent, on a deux faisceaux de corpuscules qui partent symétriquement vers la droite et la gauche. Dans le faisceau qui part vers la droite, on distingue **N** petits agrégats de masses quelconques m_i, liées seulement par la condition $\sum_i m_i = M + m$ et de vitesses $\vec{z}_i$. Dans le faisceau partant vers

Réf. 4. G.W. LEIBNITZ Dynamica (Leibnitzens mathematische Schriften, Vol. VI)

Réf. 5. J.M. LEVY-LEBLOND One more derivation of the Lorentz transformation (American Journal of Physics, 44, 271 - 1976) la gauche, on a les mêmes masses avec les vitesses $-\vec{z_i}$. On suppose de plus que toutes les vitesses finales $\vec{z_i}$ sont colinéaires avec $\vec{x}$.

Dans l'expérience considérée, la relation de conservation (1) s'écrit :

$$(2) \qquad m \left[f(x) + f(-x)\right] + 2Mf(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[f(z_i) + f(-z_i)\right]$$

Vérifiée trivialement par toute fonction impaire, cette relation ne permet d'étudier que les fonctions conservatrices **paires**, telle l'énergie du système.

Pour terminer cette description, remarquons que le plan $\mathcal{P}$ peut être remplacé par une paroi de masse infinie, ce qui nous dispense de la délicate réalisation d'une symétrie parfaite entre les deux côtés de $\mathcal{P}$.

§ 2. LES HYPOTHÈSES NÉCESSAIRES POUR L'ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE SONT LES SUIVANTES :

a) les invariances galiléennes

On suppose que l'expérience est effectuée dans un référentiel idéal pour l'étude des lois de la mécanique, doué de propriétés d'invariance remarquables. L'existence possible de tels référentiels a été suggérée par Galilée. Les propriétés d'invariance des référentiels galiléens sont les suivantes (nous ne nous préoccupons pas ici du problème très intéressant de savoir si certaines des propriétés énoncées peuvent être déduites des autres) :

i) homogénéité de l'espace:
les lois de la mécanique ne changent pas si l'on fait subir une translation au laboratoire où on les établit expérimentalement ;

ii) isotropie de l'espace :
les lois de la mécanique ne changent pas si l'on fait subir une rotation au laboratoire ;

iii) géométrie :
la géométrie de l'espace est euclidienne dans un référentiel galiléen ;

iv) uniformité du temps :
les lois de la mécanique ne dépendent pas de la date à laquelle les expériences sont effectuées ;

v) principe d'inertie :
la vitesse d'un corps en mouvement libre est invariable en grandeur et en direction ;

vi) **principe d'équivalence :**

- le référentiel lié à un corps en mouvement libre est également un référentiel galiléen ;
- il n'existe aucune expérience effectuée à l'intérieur d'un référentiel galiléen qui permette de détecter son mouvement par rapport à un autre référentiel galiléen ;
- les lois de la mécanique ne subissent aucune variation par changement de référentiel galiléen.

b) loi de composition des vitesses

Considérons un corps en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{x}_1$ dans un référentiel galiléen R_1 . Ce référentiel est lui-même en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{y}$ par rapport à un second référentiel galiléen R . La vitesse $\vec{x}$ du corps par rapport à R_2 est donnée par une loi de composition des vitesses $\vec{x}_1$ et $\vec{y}$.
Nous admettons **provisoirement** que cette loi de composition des vitesses est l'addition vectorielle

(3) $\qquad \vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{y}.$

Cette loi découle du caractère absolu du temps dans la physique newtonienne. La notion de temps absolu est fondée sur la possibilité de synchroniser les horloges de tous les observateurs quelle que soit leur situation dans l'univers. Newton a montré que si l'on admet la possibilité de **propagations instantanées** de messagers matériels ou d'information d'un point à un autre, alors la synchronisation des horloges peut être effectuée d'une manière parfaite, et on a la loi (3).

Inversement, la loi de composition (3) implique la possibilité de propagations instantanées. En effet, par composition itérée N fois d'une même vitesse $\vec{x}$, on peut obtenir une vitesse $N\vec{x}$ aussi grande que l'on veut.

(Remarquons qu'il ne faut pas confondre la composition vectorielle des vitesses (3) avec la décomposition d'une vitesse en composantes selon les axes d'un repère cartésien dans un certain référentiel.)

c) additivité et conservation de la masse

Dans les processus de collision élastiques que nous considérons, la structure interne des corps ne change pas. Nous admettons que la masse de chaque corps est invariable dans ces processus. En outre, nous admettons que la masse d'un système de corps libres **au repos les uns par rapport aux autres** est la somme des masses de ses constituants.

d) propriétés de l'énergie

Nous admettons ici les propriétés suivantes de l'énergie cinétique (ces propriétés peuvent être démontrées, voir la référence 6) :

i) l'énergie cinétique d'un corps libre ne dépend que du module de sa vitesse ;

ii) l'expression de l'énergie cinétique d'un corps de masse m est $me(x)$; elle est définie quelle que soit la vitesse x et de plus on a $e(0) = 0$ et $e(x) > 0$ lorsque $x \neq 0$;

iii) l'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques de ses parties.

Pour un système de corps de masses m_i et de vitesses x_i , l'énergie cinétique est $\sum_i m_i \; e(x_i)$. Pour une distribution de masse en fonction de la vitesse donnée par $dm = c(\vec{x})d^3x$ cette expression devient

$$(4) \qquad \iiint c(\vec{x})\, e(x)\, d^3x$$

et nous admettons que l'intégrale écrite a un sens quelle que soit la distribution $c(\vec{x})$, sous réserve que $\iiint c(\vec{x})\, d^3x$ converge. **Cela revient à admettre que la fonction $e(x)$ est intégrale. .** **intégra**

Nous verrons plus loin que cette hypothèse d'intégrabilité de l'énergie cinétique est d'une importance capitale pour la détermination de la forme de cette grandeur. En effet, **la continuité et la dérivabilité à tout ordre de la fonction $e(x)$ pourront être déduites, alors qu'elles sont habituellement postulées**

§ 3. ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE

L'analyse de l'expérience décrite au § 2 va nous permettre de découvrir la forme de la fonction d'énergie cinétique $e(x)$.

La conservation de l'énergie cinétique dans le référentiel où la description est faite s'écrit :

$$(5) \qquad m\, e(x) = \sum_i m_i\, e(z_i)$$

C'est la relation (2), compte tenu de la parité de $e(x)$, et de ce que $e(0) = 0$.

Rappelons que pour une vitesse initiale x donnée, les vitesses finales z_i et les masses m_i des corpuscules peuvent varier assez largement, sous réserve que la masse soit conservée :

(6) $$m + M = \sum_i m_i$$

Dans un second référentiel galiléen en mouvement à la vitesse $-y$ par rapport au précédent, toutes les vitesses sont augmentées de y et la conservation de l'énergie s'écrit :

$$m\left[e(x+y) + e(-x+y)\right] + 2Me(y) = \sum_i m_i \left[e(z_i+y) + e(-z_i+y)\right]$$

Nous venons d'appliquer le principe d'équivalence : la masse et la fonction d'énergie $e(x)$ sont les mêmes dans le second référentiel galiléen.

On a avantage à réécrire cette relation sous la forme :

(7) $$m\,E_y(x) = \sum_i m_i\,E_y(z_i)$$

La quantité $E_y(x) = e(x+y) + e(-x+y) - 2e(y)$ s'interprète comme l'énergie du mouvement interne de deux corps de masse unité ; la relation (7) traduit simplement la conservation de l'énergie du mouvement interne de l'ensemble des corpuscules.

Supposons que les vitesses finales z_i prennent N valeurs données. Une telle gamme de vitesses finales pourra être réalisée avec différents choix des masses m_i : il est toujours possible de trouver N choix linéairement indépendants de l'ensemble des masses m_i, soit m_i^j où $j = 1$ à N, tels que les $e(z_i)$ soient solution unique du système d'équations linéaires à déterminant non nul :

$$m\,e(x)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix}m_i^j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(z_1)\\e(z_2)\\ \vdots\\e(z_N)\end{bmatrix}$$

Chacune des équations de ce système garantissant la conservation de l'énergie pour un certain choix des masses m_i.

Il apparaît que les $E_y(z_i)$ sont solution du système analogue :

Cas α) : en dérivant (10) deux fois par rapport à y, puis en annulant y, on passe à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2} = \gamma^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \left(\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2}\right)(x=0)$$

Nous ne pouvons retenir que la solution paire et positive de cette équation :

(13) $\varepsilon(x) = \mathrm{ch}\,\gamma x \quad , \quad e(x) = \mathrm{ch}\,\gamma x - 1$

La solution (β) de Leibnitz apparaît comme un cas limite de cette dernière. En effet, si γ est infiniment petit, on a :

$$e(x) = \mathrm{ch}(\gamma x) - 1 \cong \gamma^2 \frac{x^2}{2}$$

§ 5. DÉRIVATION DE L'IMPULSION, PAR DÉRIVATION !

Ayant établi la dérivabilité à tout ordre de l'énergie au paragraphe précédent, nous pouvons maintenant déduire l'expression de l'impulsion par différenciation. En effet, lorsque la relation de conservation $\sum_i m_i\, e(x_i) = \sum_i m_i\, e(x'_i)$ est vérifiée dans un certain référentiel galiléen, dans le référentiel galiléen en mouvement uniforme à la vitesse infinitésimale $-\delta y$ par rapport au précédent, la relation de conservation $\sum_i m_i\, e(x_i + \delta y) = \sum_i m_i\, e(x'_i + \delta y)$ est nécessairement vérifiée aussi, et par différence nous obtenons au premier ordre par rapport à δy : $\sum_i m_i\, p(x_i) = \sum_i m_i\, p(x'_i)$, où $p(x) = \frac{de}{dx} = \gamma\, \mathrm{sh}\, \gamma x$, fonction impaire, n'est autre que l'impulsion. La répétition de l'argument ne fournit pas de nouvelle loi de conservation ; en effet, on a : $\frac{dp}{dx} = \gamma^2 \varepsilon(x)$ dans le cas α, et $\frac{dp}{dx} = 1$ dans le cas β.

(Fin de la première partie)

Note de l'OUVERT :

Le lecteur l'aura déjà deviné, ces deux mécaniques sont celles de Newton (cas β)) et la mécanique relativiste (cas α)).
La deuxième partie de l'article de Claude COMTE (à paraître dans l'OUVERT N° 37) examinera "les mystères de la deuxième solution". Il faudra au passage obtenir la fameuse équivalence entre masse et énergie, puis s'interroger sur la véritable signification du paramètre x, considéré jusqu'ici comme une vitesse.
A cette occasion, un point de vue nouveau sera apporté sur ce concept familier.
Il permettra d'affranchir la vitesse de l'espace et du temps !