

La théorie des groupes classe les motifs plans qui se répètent périodiquement suivant deux directions en 17 types notés par les cristallographes :

$p1$ ,  $pg$ ,  $pm$ ,  $cm$ ,  $p2$ ,  $pgg$ ,  $pmg$ ,  $cmg$ ,  $pmm$ ,  $p4$ ,  $p4g$ ,  $p4m$ ,  $p3$ ,  $p3m$ ,  $p3m1$ ,  $p6$  et  $p6m$ .

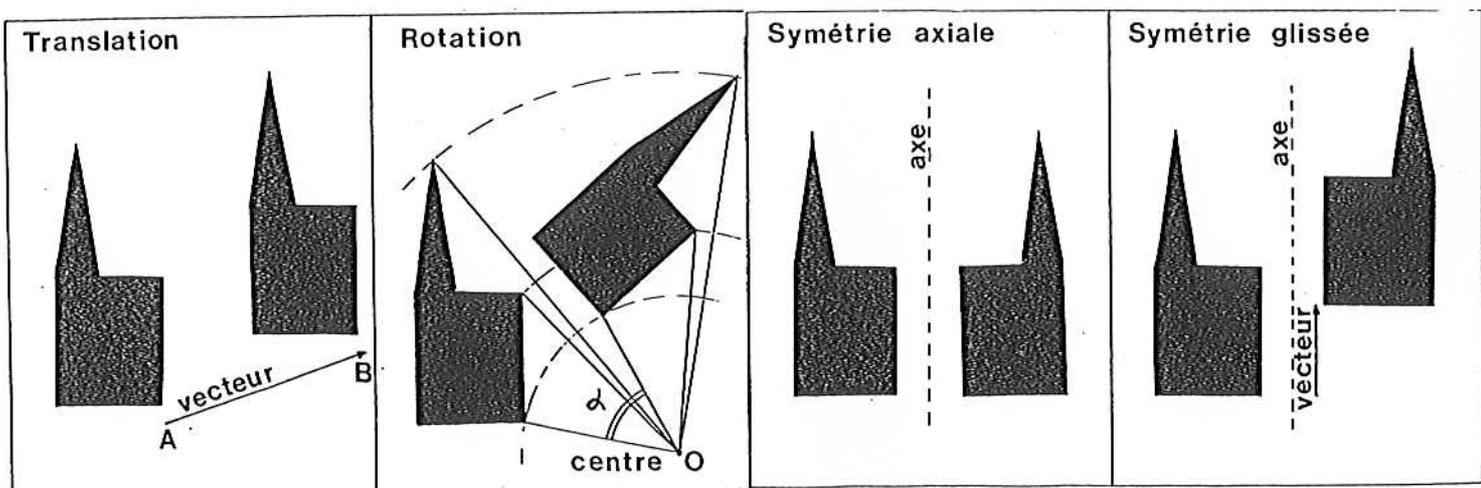
Cette classification est attribuée à Fédorov (1891).

Un algorithme donné par D. Crowe en 1982 (\*\*) permet de déterminer rapidement à quel type appartient un motif donné.

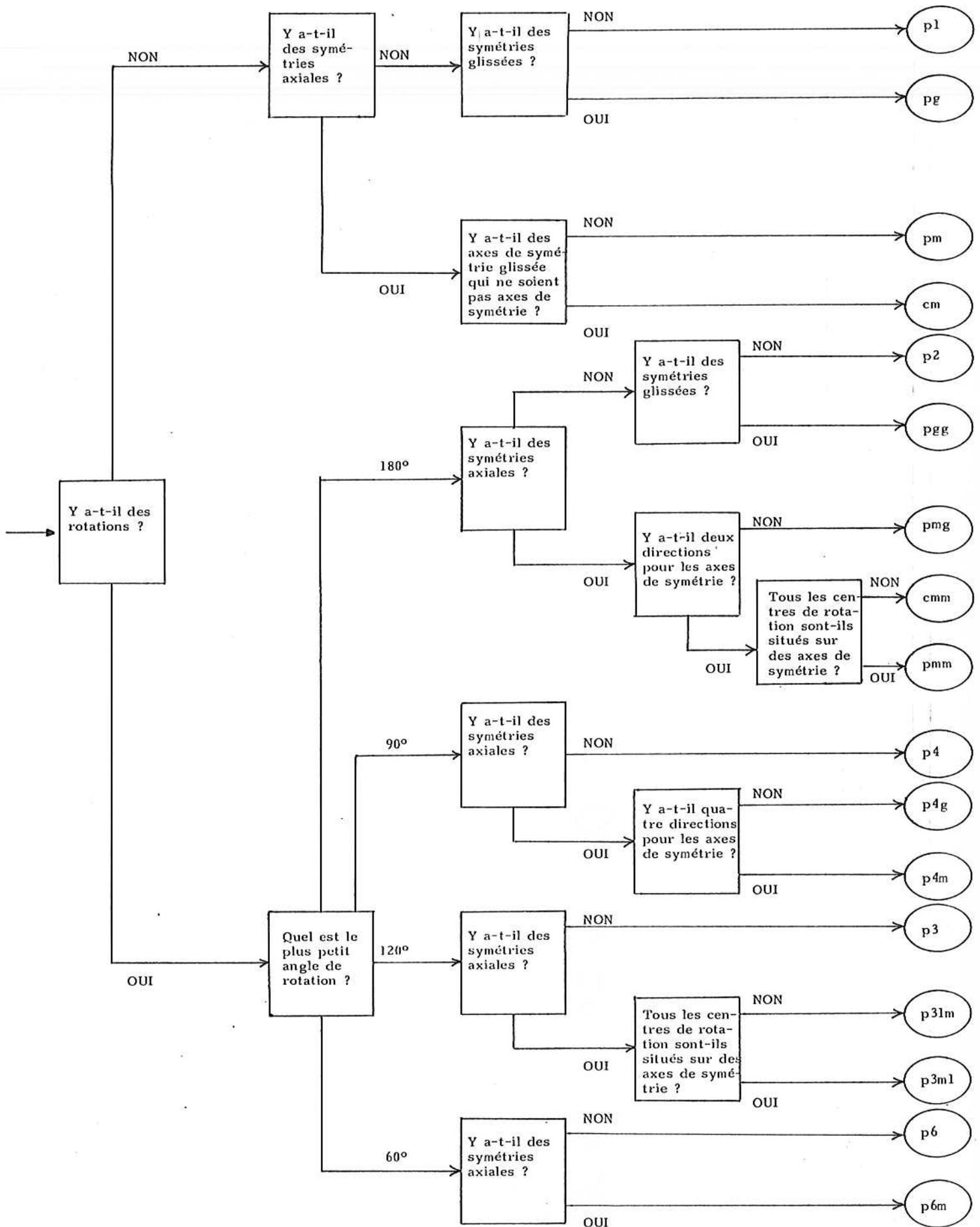
On associe à chaque motif le groupe formé des isométries du plan le laissant invariant. Deux motifs seront du même type quand les groupes qui leur sont ainsi associés sont isomorphes. Les groupes qui apparaissent sont les groupes cristallographiques de la dimension deux, c'est-à-dire les groupes d'isométries du plan dont le sous-groupe des translations est engendré par deux vecteurs non colinéaires. Le théorème de classification utilisé affirme qu'il y en a 17 à isomorphisme près, ou ce qui revient au même, d'après un théorème important de Bieberbach (1910), à conjugaison près dans le groupe de toutes les transformations affines du plan.

(\*) Ces notes sont issues d'une conférence faite pour l'Education Permanente en novembre 1983.

(\*\*) "The Geometry of African Art III. The smoking pipes of Begho". The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift. Springer Verlag 1982.



Les isométries du plan



ALGORITHME DE D. CROWE POUR LA DÉTERMINATION DES 17 GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES DU PLAN

type p1



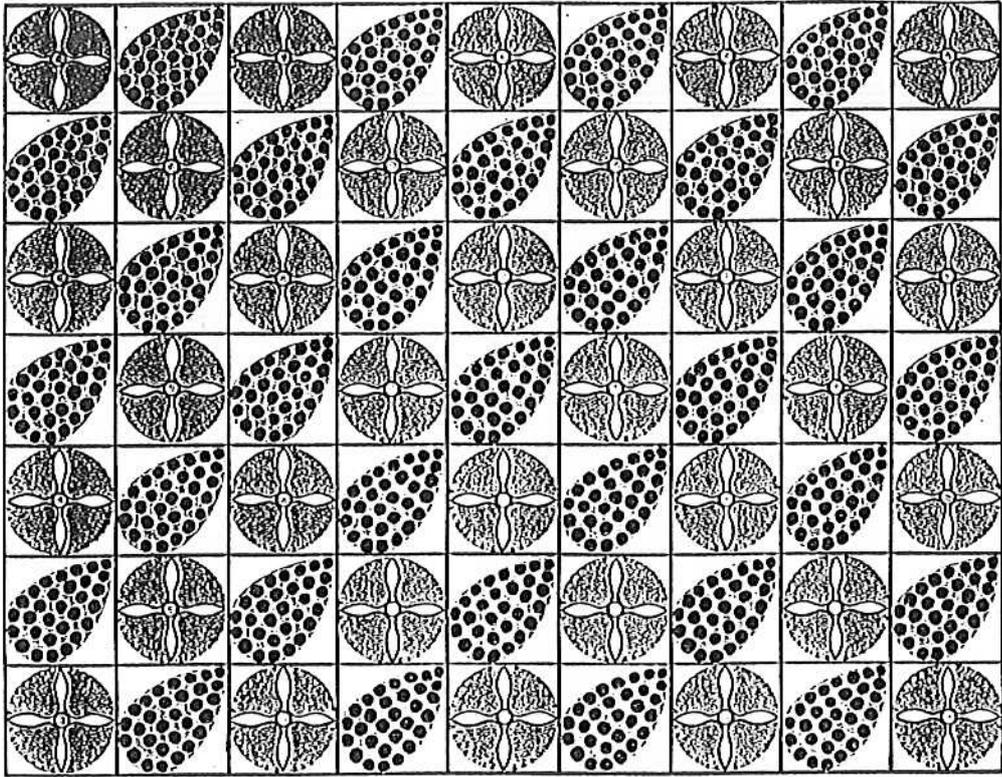
Couverture de bande dessinée : "Rumeur sur le Rouergue", par J.Tardi

type  
pg



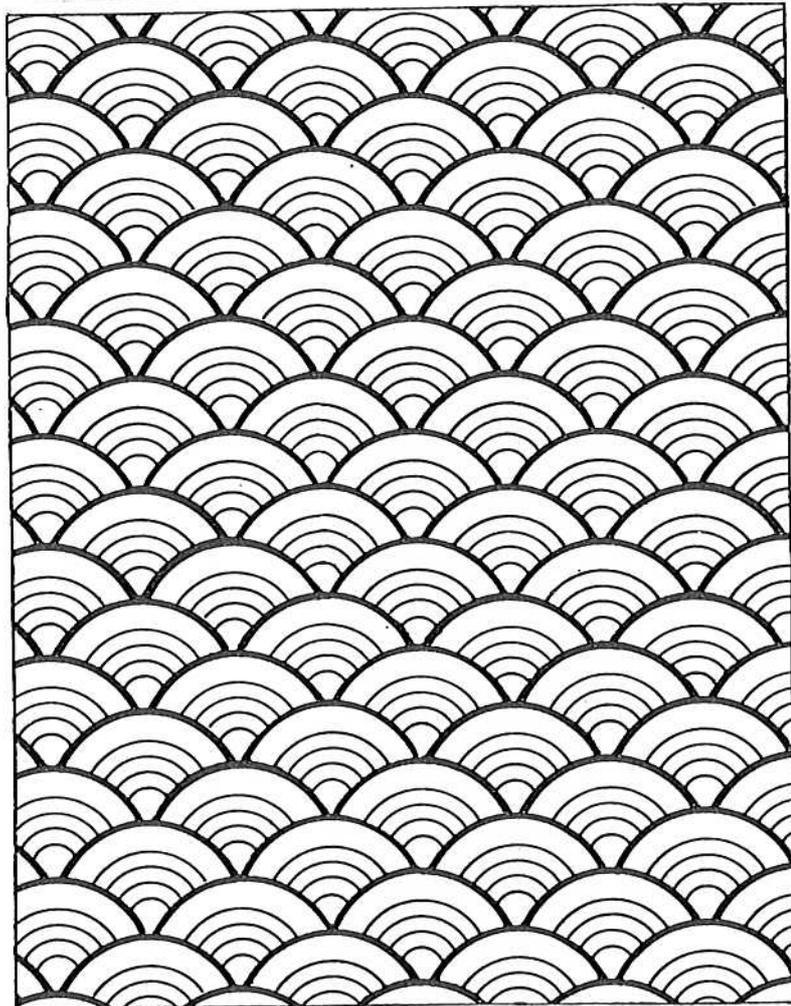
M.C. Escher . Etude pour la lithographie Rencontre. 1944

type  
pm



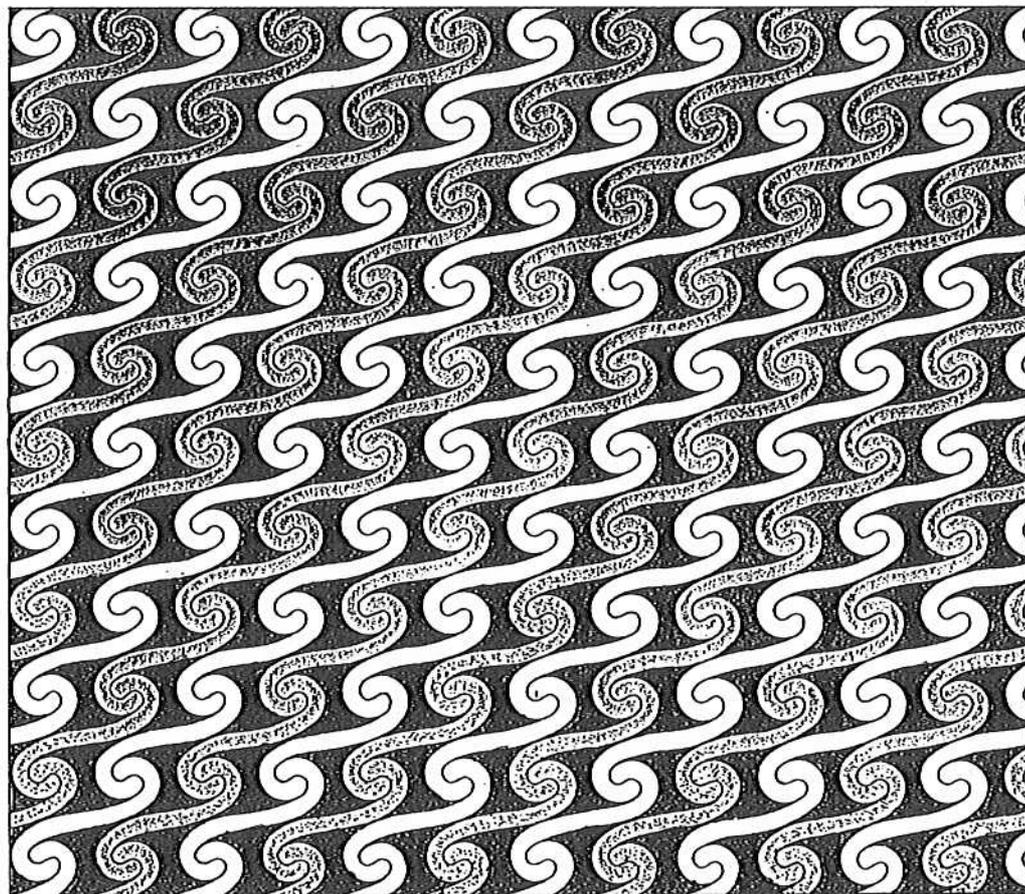
Plafond du tombeau d'Amenekhat

type cm



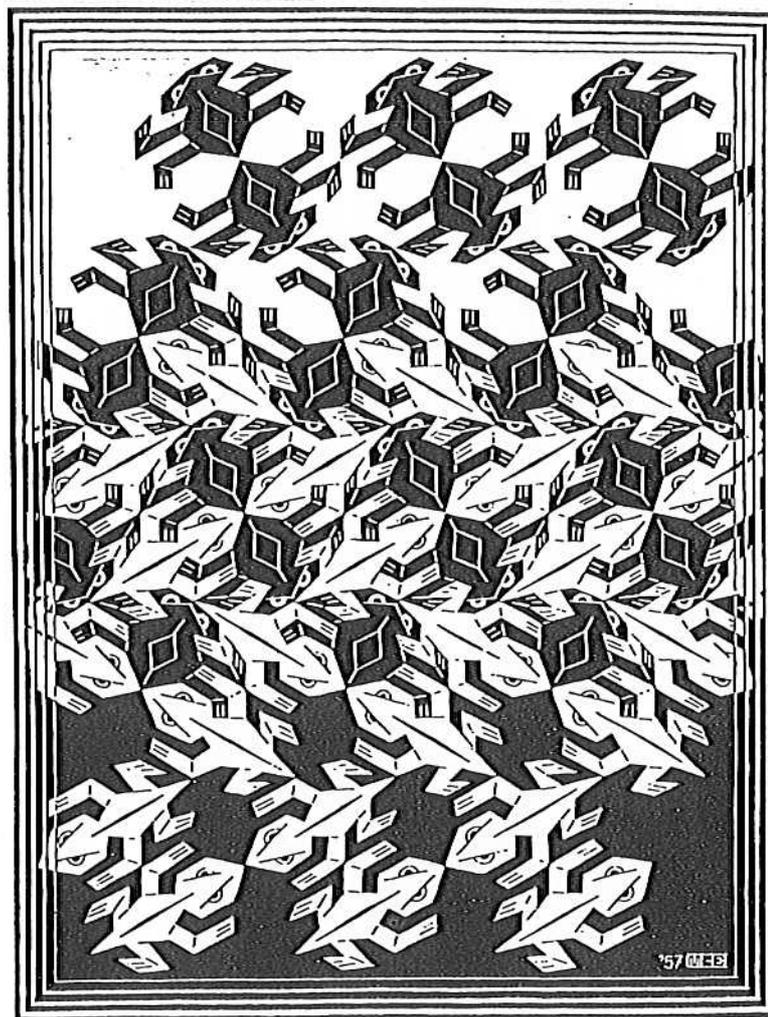
Extrait de "Allover Patterns", par C.P. Hornung (Dover, N.Y.1975)

type  
p2



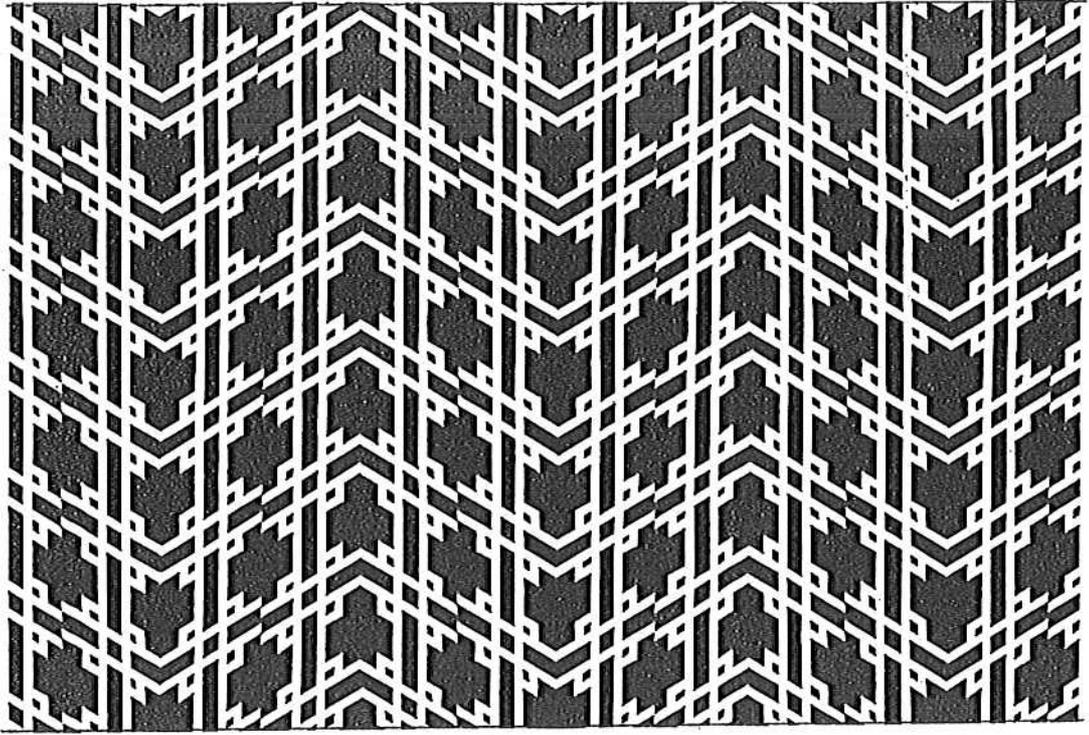
Plafond du tombeau d'Amenemhat

type pgg



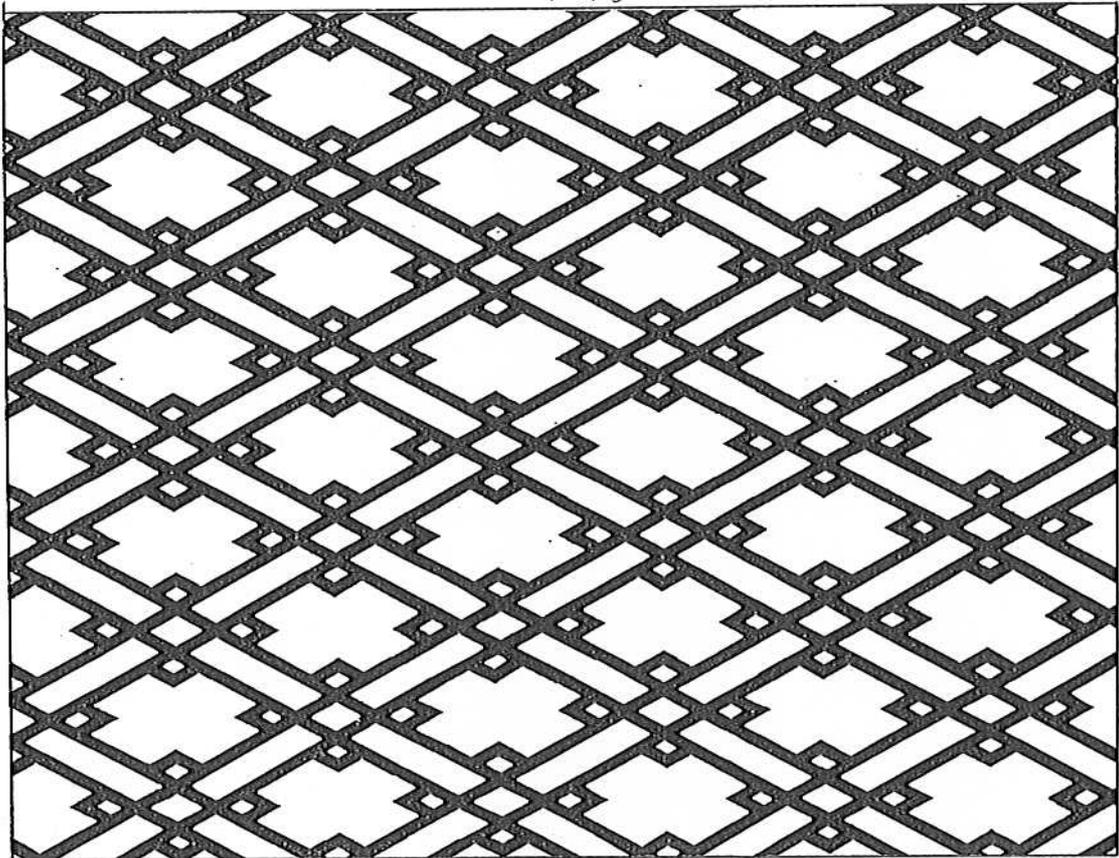
M.C. Escher, Rem-  
plissage périodique  
d'un plan V, 1957

type  
pmg

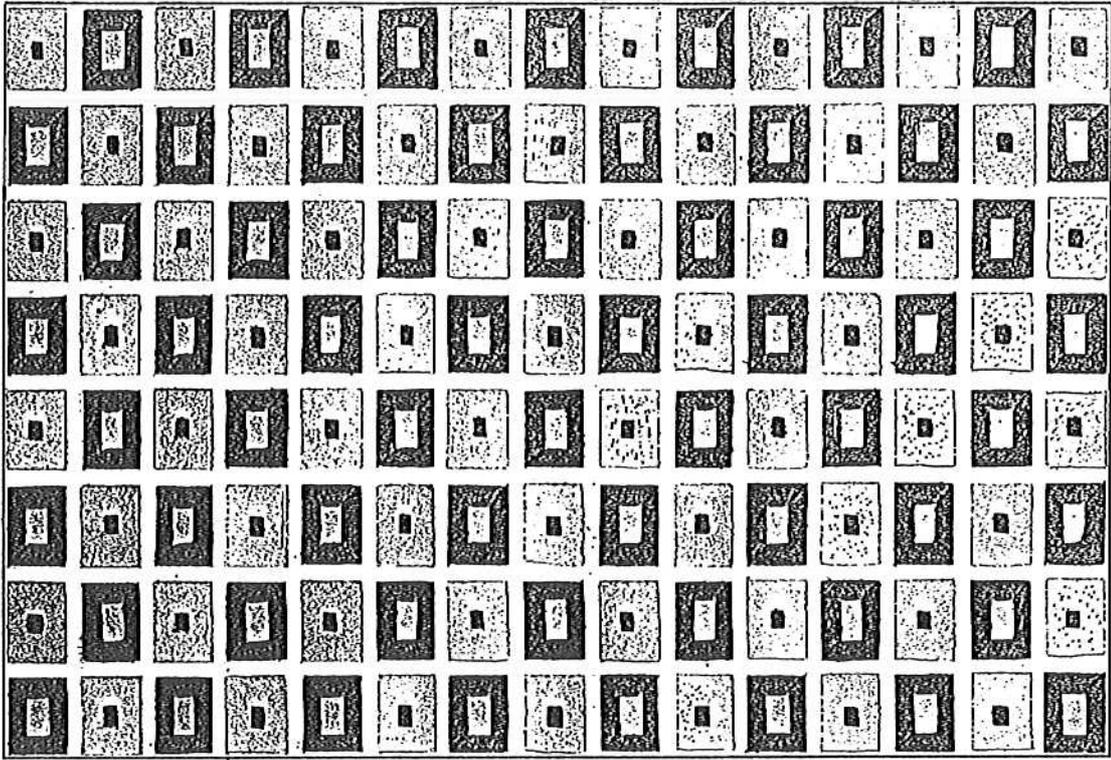


Extraits de "Allover Patterns"

type  
cmm

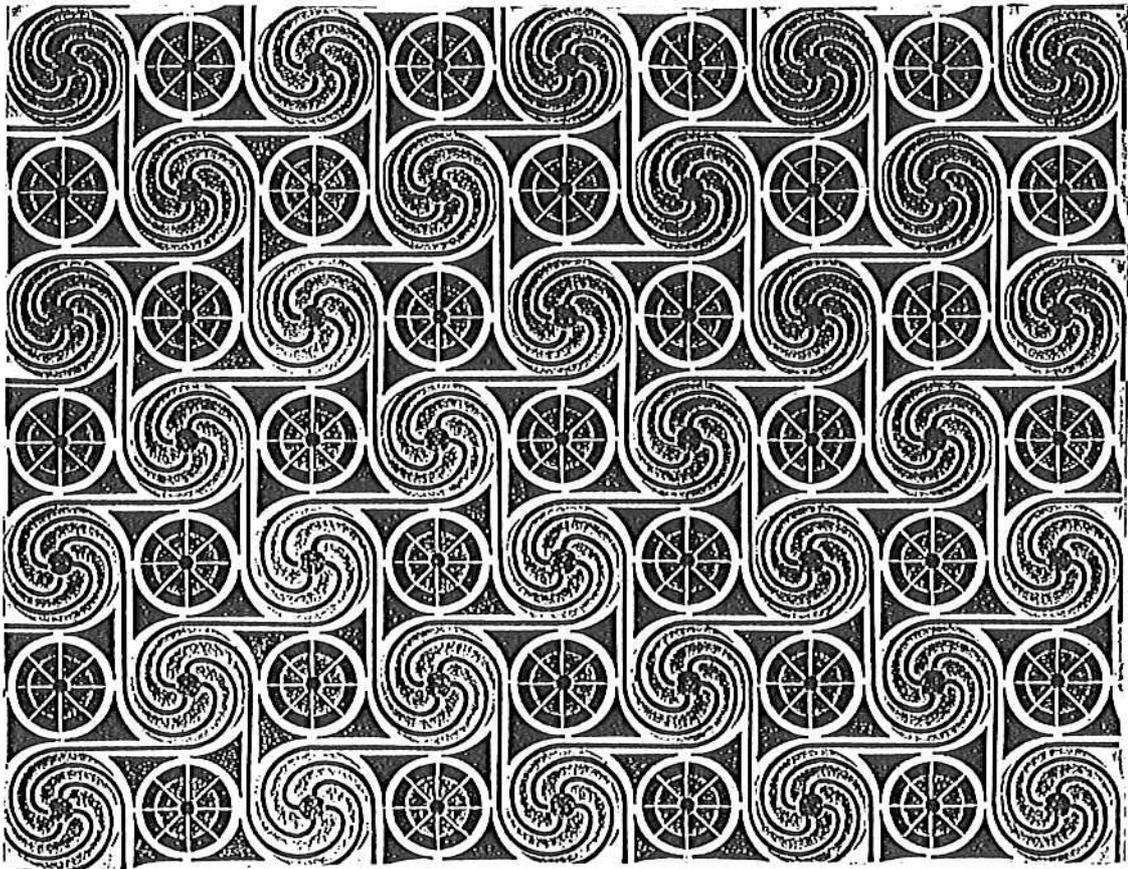


type  
pmm



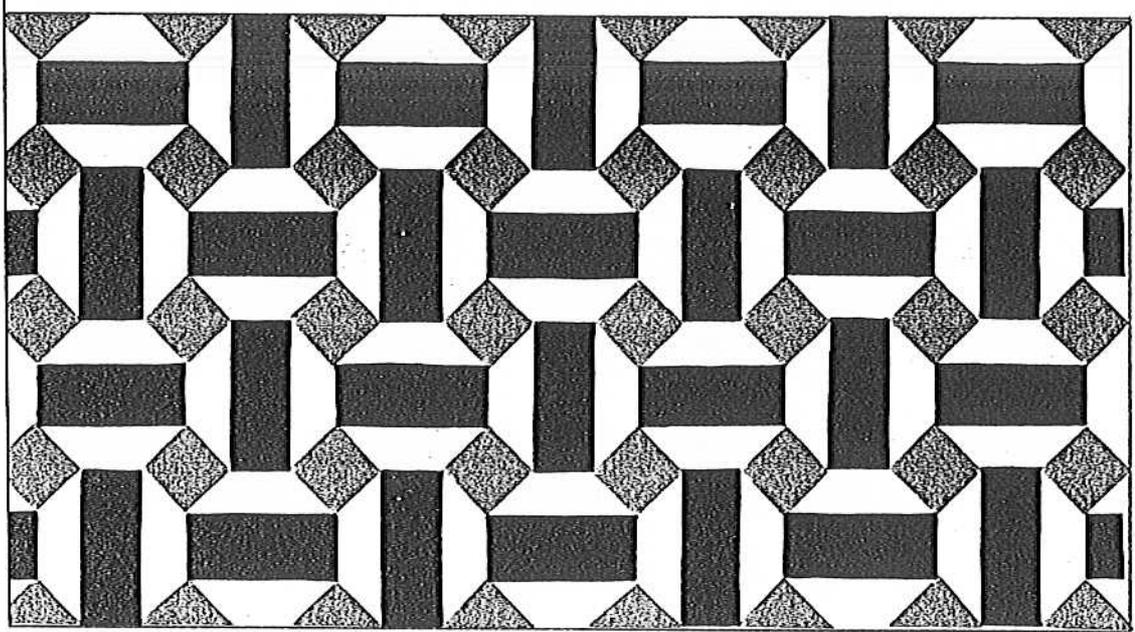
Plafond du tombeau d'Ameneheb

type  
p4



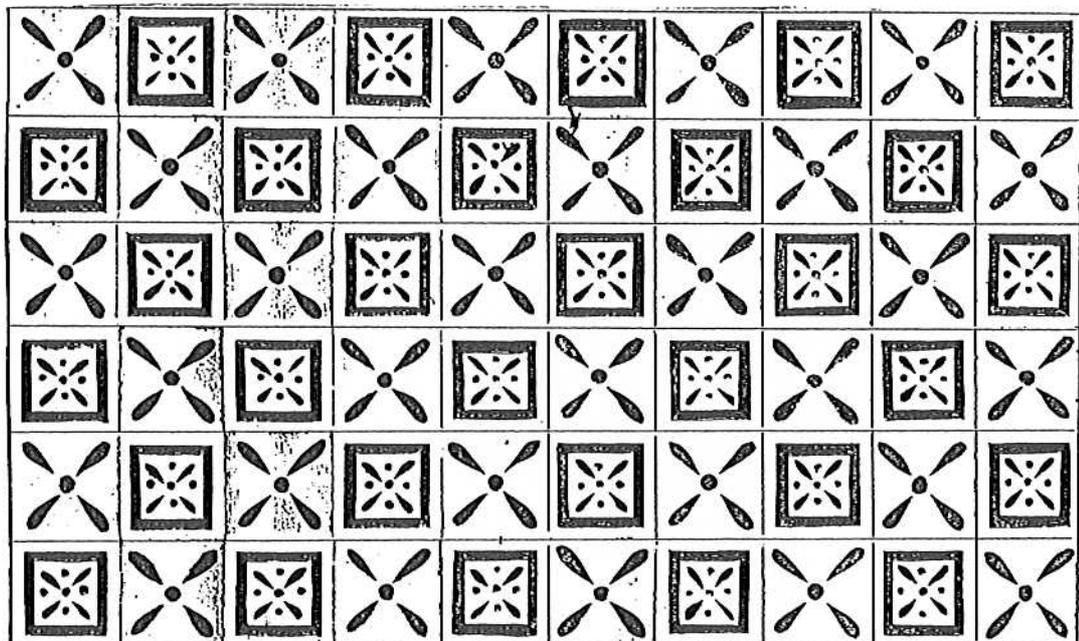
Plafond du tombeau de Nekht-Min

type  
p<sup>4g</sup>



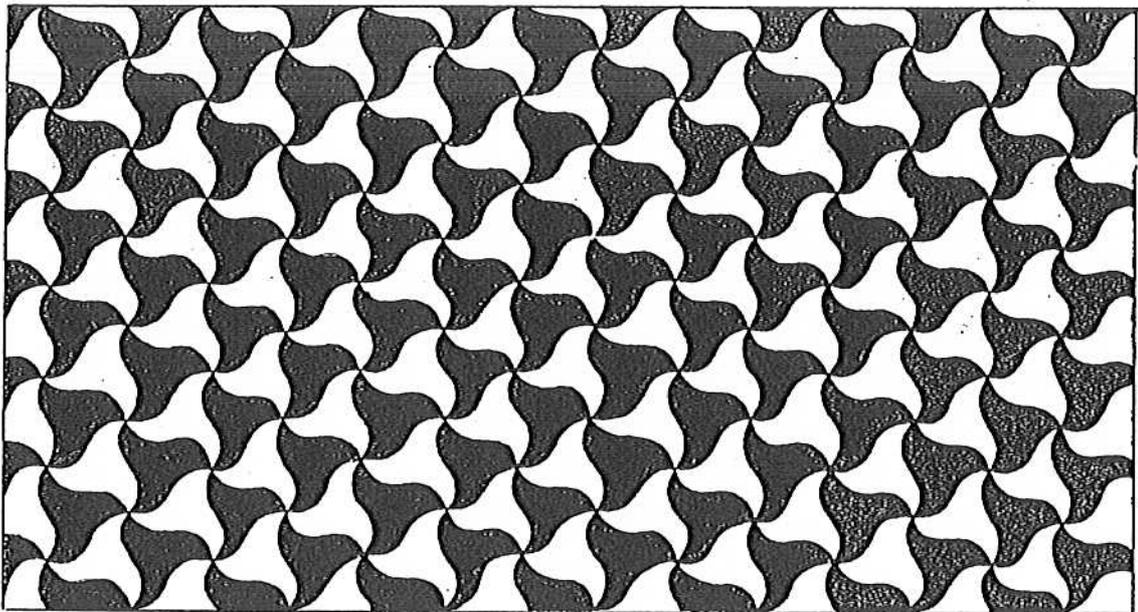
Motif décoratif arabe

type  
p<sup>4m</sup>

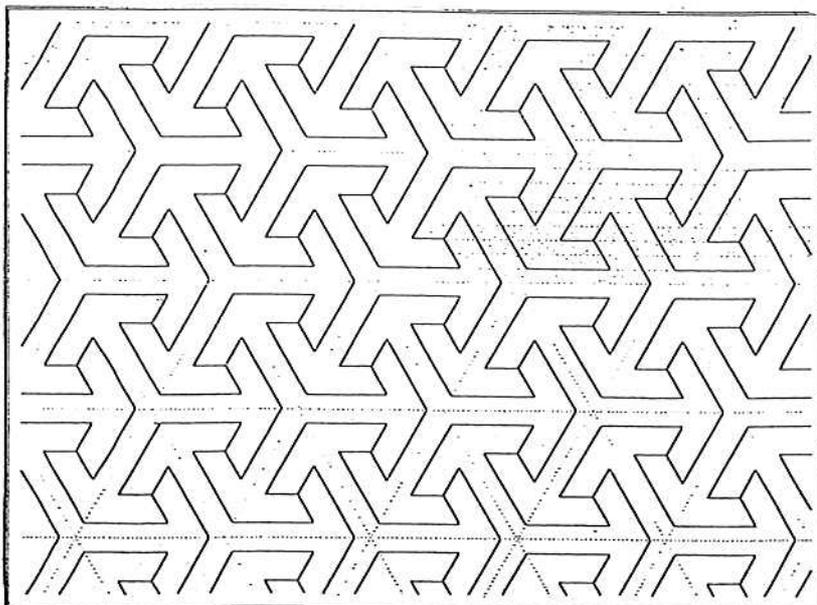


Plafond du tombeau d'Amenemant

type  
p3

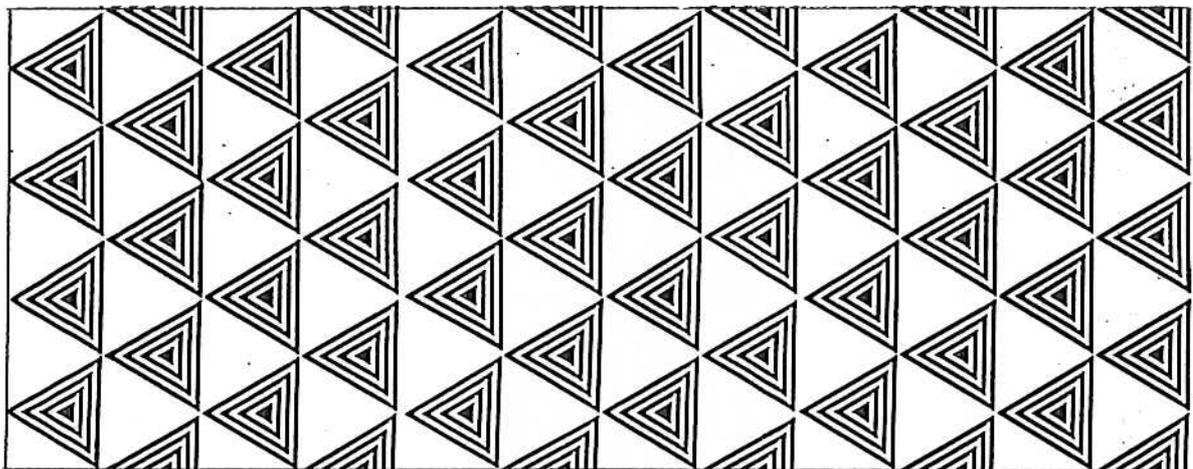


type  
p31m



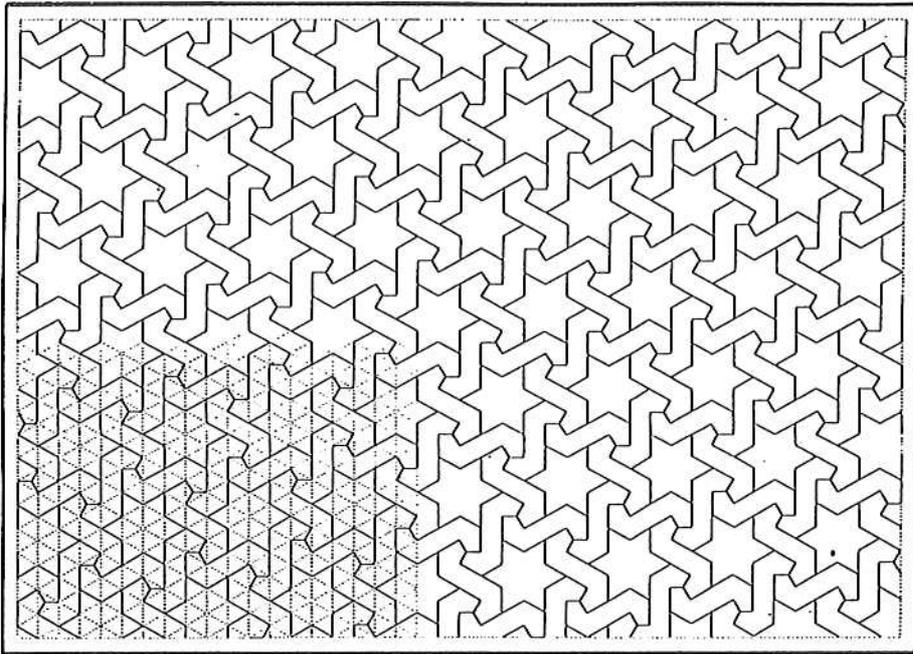
Motifs arabes (les  
deux se trouvent  
à l'Alhambra)

type  
p3m1



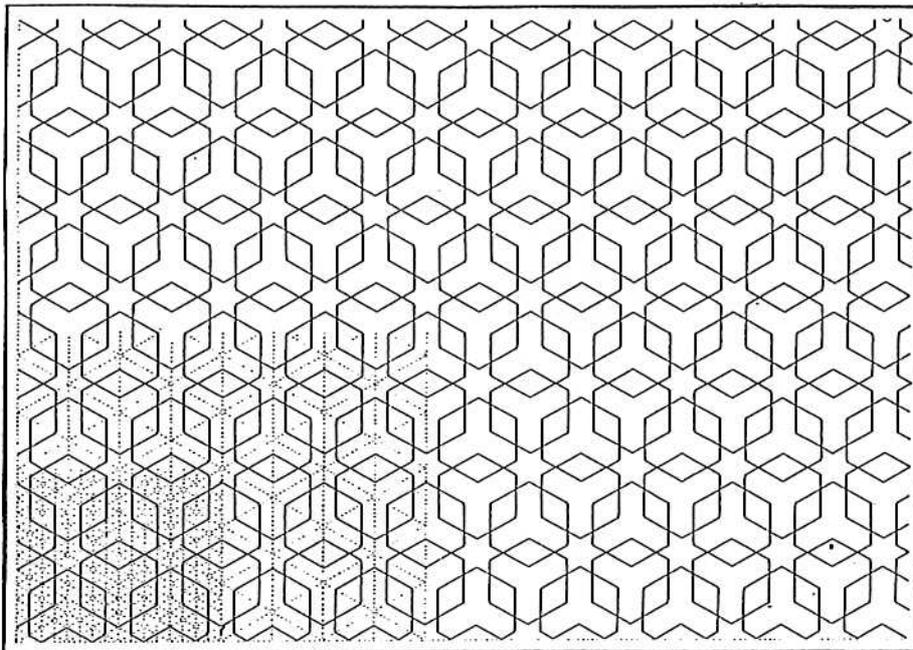
extrait de "All-over Patterns"

type  
p6



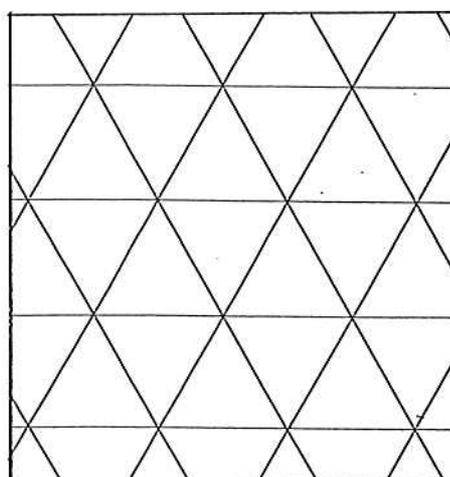
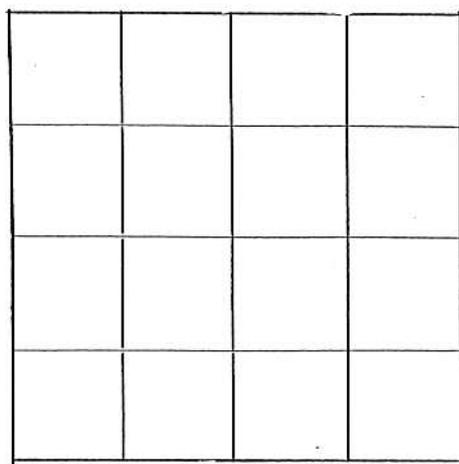
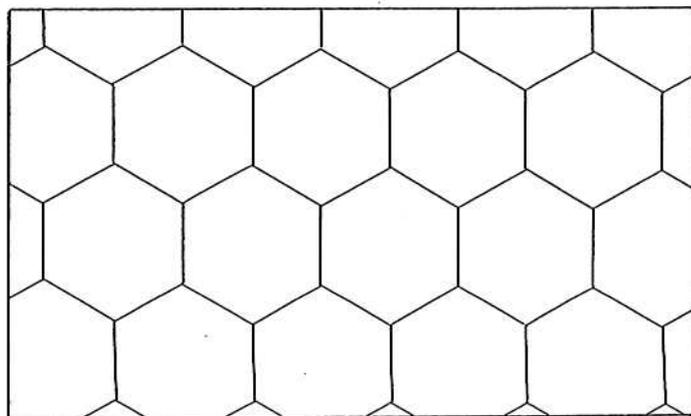
Motifs arabes

type  
p6m

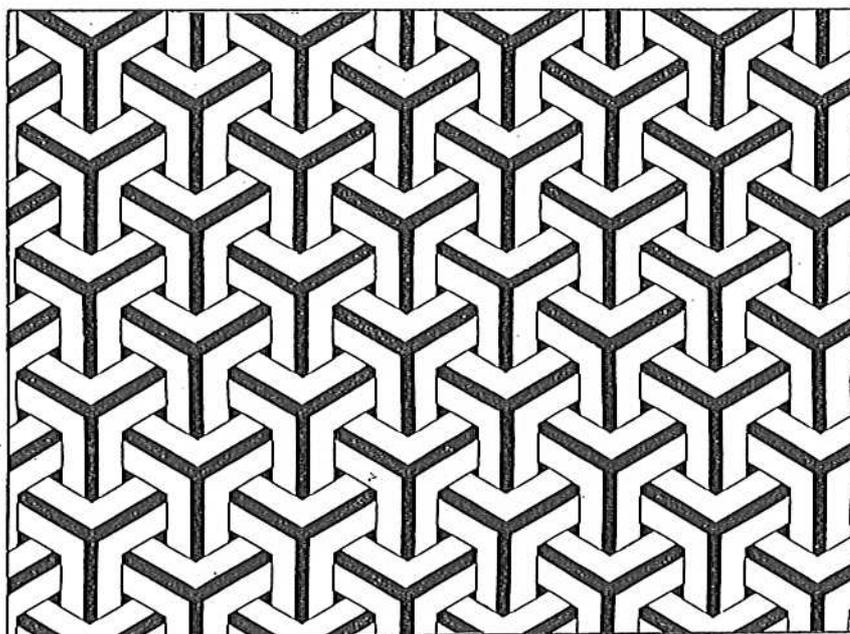


Quelques exercices à traiter avec l'algorithme de D. Crowe :

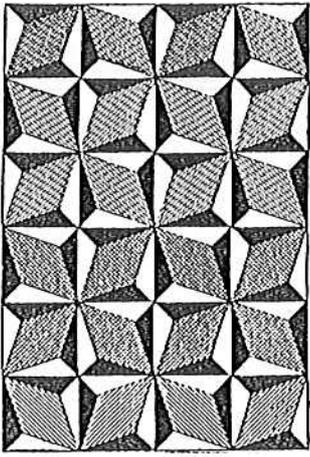
\* *Les pavages réguliers du plan ...*



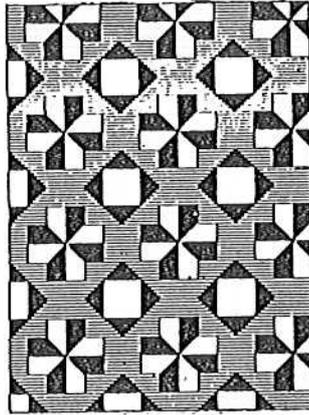
\* *Et quelques autres ...*



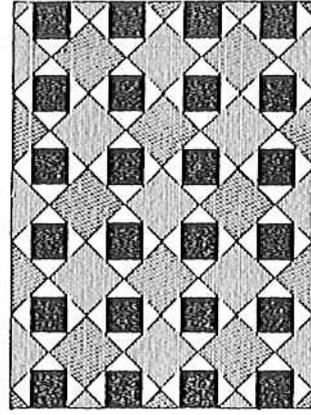
1.



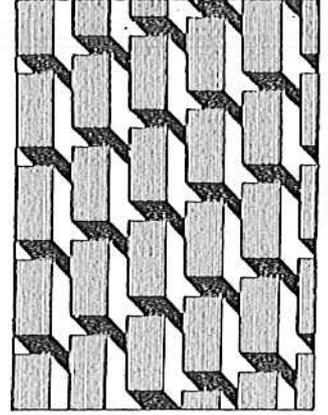
2.



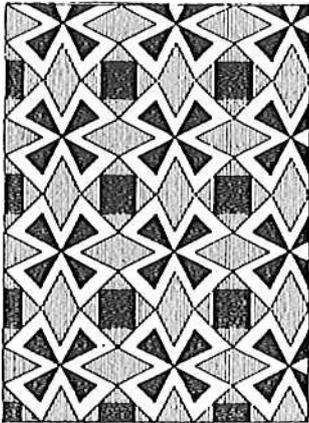
3.



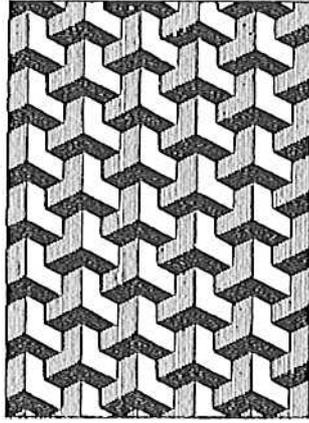
4.



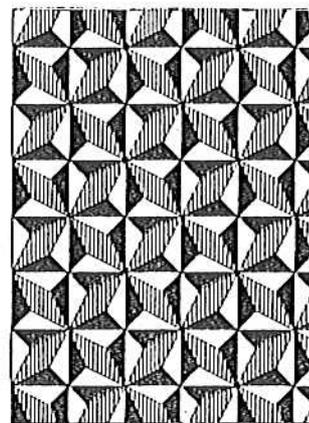
5.



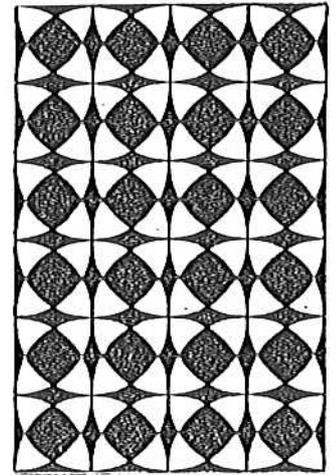
6.



7.



8.



9.

### BIBLIOGRAPHIE

Y. BOSSARD

(\*)

Rosaces, frises et pavages (2 volumes)

Cédic Paris 1977

J. BOURGOIN

(\*)

Les éléments de l'Art arabe, le trait des entrelacs. Firmin Didot et Cie

Paris 1879 - réédité par Dover : Arabic geometric pattern and design. N.Y. 1973

G. JEQUIER

Décoration égyptienne, plafonds et frises végétales du nouvel empire thébain

Librairie centrale d'art et d'architecture Paris 1911

J.L. LOCHER

La vie et l'oeuvre de M.C. Escher

Editions du Chêne Paris 1981

J.L. LOCHER

(\*)

Le monde de M.C. Escher

Editions du Chêne Paris 1981

H. WEYL

(\*)

Symétrie et mathématique moderne

Flammarion Paris 1964.

(\*) : disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.