PERIODES : MES LUNAISONS MATHEMATIQUES

Anne MIGUET

I. Au collège, tout en abaissant les zéros ; $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$

Collège de Thann.
Début d'année.
Classe de 3ème.

Pour tâcher de ne pas s'enliser dans l'interminable chapitre 0 des "Rappels" de tout ce qui **devrait** être su (sempiternelle et **périodique** lamentation du professeur) nous tâchons d'aborder avec plus de précision quelques phénomènes déjà rencontrés.

Il s'agit de commenter la stricte inclusion $\mathbb{D} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q}$.

Nous partons de deux définitions très visuelles :

- un $\mathbb{D}$ "horizontal" : $\boxed{2,5873}$ succession finie de chiffres séparés (ou non) par une virgule,
- un $\mathbb{Q}$ "vertical" $\boxed{\frac{3}{5}}$ totem - encore bien vertigineux pour la plupart de mes jeunes disciples - de la fraction.

La série d'exercices proposés :

Ils visent à aboutir à une bonne "pratique" des différentes représentations.

Série 1 $\boxed{} \longrightarrow \boxed{}$

$$10,003 = \frac{10\ 003}{1000}$$

$$10,24 = \frac{1\ 024}{100}$$

$$0,015 = \frac{15}{1000}$$ etc... facile et vite compris

Série 2

motivée en général à partir de la série précédente par des remarques des élèves :

"Madame, on peut simplifier"

$$10,24 = \frac{1\,024}{100} = \frac{256}{25}$$

$$0,015 = \frac{15}{1\,000} = \frac{3}{200}$$

... sur une grande série de tels exercices on cherche alors à caractériser les dénominateurs obtenus.

On peut alors en général profiter de leurs découvertes pour conclure :

> **1.** Tout décimal admet une écriture fractionnaire où le dénominateur est une puissance de 10.
> **2.** Toute fraction dont le dénominateur après simplification, n'admet dans sa décomposition en facteurs premiers que les facteurs 2 et 5 est un décimal.

Série 3

Cette troisième série d'exercices aura pour but d'affermir par la pratique la seconde assertion de nos résultats et de faire se recoller chez les élèves les deux points de vue :

a) je pose la division, j'abaisse les zéros, ... la division s'arrête (arrivée à un reste nul),

b) j'utilise la décomposition en facteurs premiers du dénominateur, et un peu de calcul algébrique sur les fractions et les puissances.

(N.B. : dans leur grande majorité, les élèves préfèrent a) et résistent à b). La série 3 en séduit cependant quelques-uns et conduit à l'idée de période.)

Exemple :

$\frac{3}{125}$ par a)

$$\begin{array}{r|l} 3 & 125 \\ \cline{2-2} 30 & 0,024 \\ 300 & \\ 500 & \\ 000 & \end{array}$$

par b) $$\frac{3}{125} = \frac{3}{5^3} = \frac{3 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{3 \times 8}{10^3} = \frac{24}{1\,000} = 0,024$$

II. Découverte de la période : "le mythe de l'éternel retour"

La recherche

En général les élèves sont alors mûrs et motivés pour la suite de l'exploration. Les questions arrivent d'ailleurs par les deux bouts :

- *"Et si la division ne s'arrête jamais ?"*
- *"Et si le dénominateur contient d'autres facteurs premiers que 2 et 5 ?"*

Il est bon alors de proposer beaucoup d'exemples : ils trouvent tout seuls : *"ça recommence toujours pareil"*.

$\frac{1}{3} = 0,\underbrace{3}\underbrace{3}\underbrace{3}\ldots\ldots$ période de $\underbrace{1 \text{ pas}}$

$\frac{5}{7} = 0,\underbrace{714285}_{6}\underbrace{714285}_{6}7\ldots\ldots$ période de $\underbrace{6 \text{ pas}}$

$\frac{7}{275} = 0,02\underbrace{54}_{2}\underbrace{54}_{2}\underbrace{54}_{2}$ période de $\underbrace{2 \text{ pas}}$

$\frac{1}{17} = 0,\underbrace{0588235294117647}_{16}\underbrace{0588235\ldots\ldots}$ période de $\underbrace{16 \text{ pas}}$.

Définitions et quelques propriétés

Les exemples nombreux si possible sont choisis pour faciliter l'introduction des définitions et des remarques importantes suivantes :

A. Deux définitions :

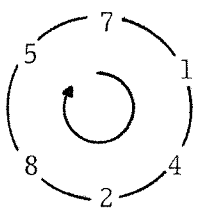
On définit la **période** p : le nombre de chiffres de la succession qui se répète à l'infini.

On définit le **cycle** : la suite ordonnée des chiffres qui se répète.

(N.B. : ces définitions sont courantes, pas absolument universelles : en particulier dans les dictionnaires qui abordent la notion mathématique de période d'une fraction il y a souvant confusion entre période et cycle.)

B. Quelques cycles :

Il sera bon de représenter effectivement le cycle (exemple : celui de $\frac{1}{7}$)



ainsi et de vérifier en étudiant successivement les développements de $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ ....., $\frac{6}{7}$ que ce cycle est **unique** (seul son début dans le développement varie).

La définition du cycle et sa visualisation réellement circulaire se fait à partir d'exemples comme celui assez simple des $7^{-1} = \frac{1}{7}$. Il sera intéressant de refaire la même exercice en cherchant les développements décimaux des $11^{-1} = \frac{1}{11}$ ($\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$, ..., $\frac{10}{11}$).

On trouvera toujours une période de 2 et 5 cycles possibles :

$\binom{0}{9}$ $\binom{1}{8}$ $\binom{2}{7}$ $\binom{3}{6}$ $\binom{5}{4}$

C. Un majorant simple de la période de $\frac{k}{q}$:

k, q $\in \mathbb{N}^*$, k et q premiers entre eux, q premier avec 10.

Les élèves semblent enclins à penser que ce majorant est **10.** D'où l'utilité d'avoir introduit assez tôt (malgré le caractère un peu fastidieux de l'opération) un exemple comme $\frac{1}{17}$ (période de 16).

On peut leur montrer facilement que ce majorant est **(q - 1).**

Ceci vient des deux remarques :

R 1. On observe la succession non pas des chiffres du quotient mais des **restes** dans la division posée. Le phénomène "*boucle*" ou "*cycle*" apparaît la première fois qu'on écrit un **reste** qui avait déjà été écrit à un pas précédent, à partir de l'épuisement des chiffres significatifs du dividende (c'est-à-dire à partir du moment où "*l'on abaisse les zéros*").

(N.B. : cette clause restrictive est importante à souligner, les élèves se demandant souvent où commence réellement le phénomène cyclique ; nous préciserons encore au paragraphe suivant.)

Exemple : je pose 1

$$\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \hline 30 & 0,\underbrace{142857}\ldots \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r|l} 491 & 7 \\ \hline 01 & 70,\underbrace{142857}\ldots \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

R 2. Le reste 0 est exclu car il signifierait que la division s'arrête, c'est-à-dire que $\frac{k}{q} \in \mathbb{D}$, donc $\frac{k}{q} = \frac{K}{10^n}$ soit q divise 10^n qui a été exclu.

Donc, les seuls restes possibles sont : 1, 2..., q-1. Il y a q-1 restes distincts possibles. Donc, au bout de au plus **q-1** étapes je dois nécessairement retrouver un reste déjà rencontré.

D. Mise au point sur le rôle des facteurs 2 et 5 éventuellement présents dans le dénominateur.

On commence ici par commenter l'exemple donné au début :

$$\frac{7}{275} = 0,02\,\underbrace{54}\,\underbrace{54}\,\underbrace{54} \qquad \text{or} \qquad 275 = 5^2 \times 11$$

Je simplifierai l'étude de cette fraction ainsi :

$$\frac{7}{11 \times 5^2} = \frac{7 \times 2^2}{11 \times 5^2 \times 2^2} = \frac{28}{1100} = \frac{0,28}{11}$$

soit en généralisant à l'aide des deux remarques suivantes :

R'1. $\frac{k}{q}$ et $\frac{k}{q \times 10^n}$ ont clairement même période et même cycle (décalage de n crans d'une virgule).

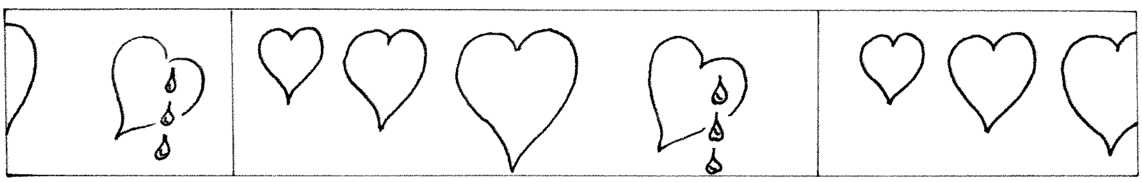
R'2. Si une fraction m' est donnée sous la forme $\frac{k}{Q}$ avec $Q = qq'$ où q premier avec 10 et $q' = 2^\alpha \times 5^\beta$; $\alpha , \beta \in \mathbb{N}$.
Alors j'écrirai :

$$\frac{k}{Q} = \frac{k \times 2^{\sup(\alpha,\beta)-\alpha} \times 5^{\sup(\alpha,\beta)-\beta}}{Q \times 2^{\sup(\alpha,\beta)-\alpha} \times 5^{\sup(\alpha,\beta)-\beta}}$$

$$= \frac{k \times 2^{\sup(\alpha,\beta)-\alpha} \times 5^{\sup(\alpha,\beta)-\beta}}{q \times 10^{\sup(\alpha,\beta)}}$$

fraction dont l'étude (à une virgule près) se ramène au cas générique cité en C.
(N.B. : il est évidemment vivement déconseillé d'adopter le formalisme ci-dessus avec des élèves de 3ème. Quelques exemples bien sentis suffiront à convaincre.)

J'achèverai cette partie "*pédagogique*" en racontant ce qu'ont fait mes classes après quelques séances consacrées à ces recherches : un petit résumé me racontant ce qu'ils en avaient retenu. De plus, à titre d'ouverture sur l'extra-mathématique, je leur avais demandé de me trouver, employés dans d'autres domaines des sens pourtant voisins des mots *période, périodique, cycle, cyclique !*
Les résultats furent palpitants, fort instructifs et parfois pleins d'imagination et d'intelligente fantaisie.
Ainsi ce petit dessin (plus fignolé que celui qu'infidèlement je reproduis) :



le cycle de l'amour

III. Genèse d'une petite étude : de la pédagogie à la théorie des groupes en passant par l'ordinateur et la coopération conjugale

A force d'avoir abaissé des zéros avec mes élèves, je me posais quelques petites question :

1) Ne peut-on faire mieux que ce **majorant** (q-1) de la période de $\frac{k}{q}$?

2) Pour un même dénominateur q, la période varie-t-elle avec le numérateur (dans la mesure où celui-ci reste premier avec q ?)

... J'envisageais déjà diverses *"conjectures"* quand ...

Mon mari Jacques BRODY (professeur de mathématiques en TC au lycée Montaigne de Mulhouse) me met entre les mains un livre de programmes pour TI 57(*).
J'y trouve un programme (joint en annexe) me donnant la période de $\frac{p}{q}$.
Tel le physicien, avant de chercher à prouver, j'expérimente.
(Ma TI 57 a parfois tourné dix bonnes minutes avant d'afficher les plus grosses périodes).

fraction	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13^2}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17^2}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{19^2}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{37}$
période	1	1	6	42 = 7×6	2	22 = 2×11	6	78 = 6×13	16	272= 16×17	18	342= 18×19	22	3

Nous attaquons alors Jacques et moi l'étude algébrique du problème.
Les conjectures nous étant venues par l'expérimentation, nous établissons ensemble la **proposition suivante** :

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, premier avec 2 et 5

- Toutes les fractions $\frac{k}{q}$ où k est premier avec q ont la même période p_q.
- p_q est toujours un **diviseur** de $\varphi(q)$

φ étant la fonction indicatrice d'Euler (**).

(*) Jacques Deconchat - 35 programmes pour TI 57 - Collège - Poquettes et Maths.

(**) $\varphi(q)$ est le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ mais aussi le nombre d'entiers compris entre 1 et q-1 qui sont premiers avec q.

Démonstration :

Je pose $k = r_0 \leqq q-1$ (je suppose atteint le premier reste utile)

• r_0 est premier avec q. En effet, si k premier avec q, $k = bq + r_0$, alors r_0 premier avec q.

• Je pose la division

$$\begin{array}{l|l} r_0 & q \\ \quad r_1 & \overline{0,b_0b_1 \quad b_k \ \ldots} \\ \quad\quad r_2 & \\ \quad\quad\quad \cdot & \\ \quad\quad\quad\quad \cdot & \\ \quad\quad\quad\quad\quad \cdot \ r_{k+1} & \end{array}$$

les abaissements de 0 se traduisent par les égalités :

$$\begin{cases} 10r_0 = b_0q + r_1 \\ 10r_1 = b_1q + r_2 \\ \vdots \\ 10r_k = b_qq + r_{k+1} \end{cases}$$

Soit, en congruences modulo q (ou dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} 10r_0 \equiv r_1(q) \\ 10r_1 \equiv r_2(q) \\ \vdots \\ 10r_k \equiv r_{k+1}(q) \quad \text{En particulier } r_k \equiv 10^k r_0(q). \end{cases}$$

• Soit k le premier indice pour lequel r_k est égal à l'un des restes précédents :

$$r_k = r_i \qquad 0 \leqq i < k$$

donc

$$10^k r_0 \equiv 10^i r_0(q)$$

r_0 et 10 sont premiers avec q (c'est-à-dire inversibles dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$).

Je peux donc simplifier :

$$10^{k-i} \equiv 1 \ (q)$$

• Soit $k-i = k'$ avec $0 < k' \leqq k$

or $10^{k'} \equiv 1 \ (q)$

donc $10^{k'} r_0 \equiv r_0 \equiv r_{k'} \ (q)$

or $r_0 \equiv r_{k'}(q)$ et $1 \leqq r_0 \leqq q-1$

$\qquad\qquad\qquad 1 \leqq r_{k'} \leqq q-1$

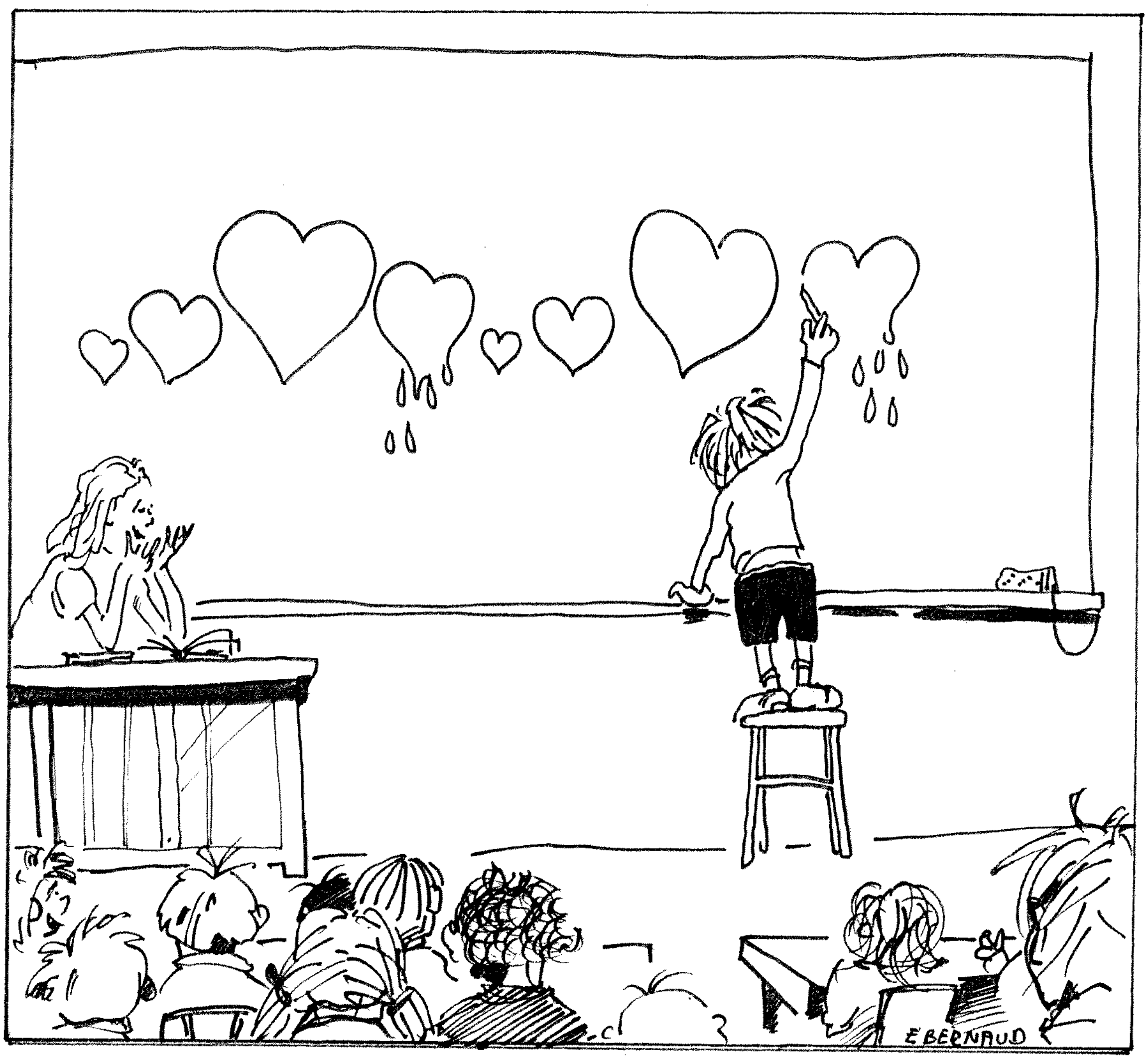
donc $r_0 = r_{k'}$
donc $k' = k$ et $i = 0$ (car k est le plus petit indice où un reste r_k est égal à l'un des restes précédents).
Ceci prouve encore que k que nous noterons désormais p_q est indépendant de r_0 puisqu'il peut se définir comme le plus petit entier > 0 tel que $10^k \equiv 1$ (q).

Pour parler plus algébriquement :
si G_q est le groupe des unités (éléments inversibles) de l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (l'ordre de G_q est φ (q) précisément) alors $10 \in G_q$ (q premier avec 10) et p_q est l'ordre du sous groupe de G_q engendré par 10 :

$$10,\ 10^r\ \ldots,\ 10^{p_q} = 1$$

D'après le **théorème de Lagrange** : p_q divise φ (q).

C.Q.F.D.



Additif : une petite amélioration

Pour q quelconque, p_{q^2} divise $q \cdot p_q$

Démonstration :

$$p_q \text{ vérifie } 10^{p_q} = 1 + \alpha q$$

j'élève à la puissance q :

$$10^{q.p_q} = (1 + \alpha q)^q$$
$$= 1 + C_q^1 \alpha q + q^2$$
$$= 1 + q^2 \alpha + q^2$$
$$10^{q.p_q} \equiv 1 \ (q^2)$$

donc p_{q^2} divise $q.p_q$

C.Q.F.D.

Exemple d'amélioration :

$p_n = 2 \rightarrow p_{121}$ divise $2 \times 11 = 22$ (meilleur que (121) = 110)

$p_{13} = 6 \rightarrow p_{169}$ divise $6 \times 13 = 78$ (meilleur que (169) = 156)

Annexe : le programme cherchant la période de $\frac{a}{b}$ (données : a et b avec

```
STO1     ← entrée de a
R/S
STO2     ← entrée de b
2
STO0
2ndLbl2
2ndCt
RCL1
:
RCL2
-
2ndInvInt
2ndx=
GTO9
=
×
RCL2
=
InvSUM1
RCL1
2nddsz
2ndExc5
STO7
RCL5
2ndx=7
GTO3
1
SUM4 ←
2ndInvLog
2ndPrd1
GTO2    (période stockée en mémoire 4)
2ndLbl3
RCL4 ←
R/S
```