SUR LE PROBLEME DES TREIZE BOULES

E. EHRHART

En 1952, Van der Waerden et Schütte ont démontré (dix pages dans les Mathematische Annalen) qu'on ne peut entourer une boule de 13 boules de sa taille qui la touchent *. Le problème était ouvert depuis Newton, mais naturellement on savait alors déjà qu'on peut le faire avec 12 boules.

Nous allons retrouver *"naïvement"* la solution *"régulière"* pour 12 boules et montrer élémentairement l'existence d'une infinité d'autres solutions irrégulières. Le tout sans calcul.

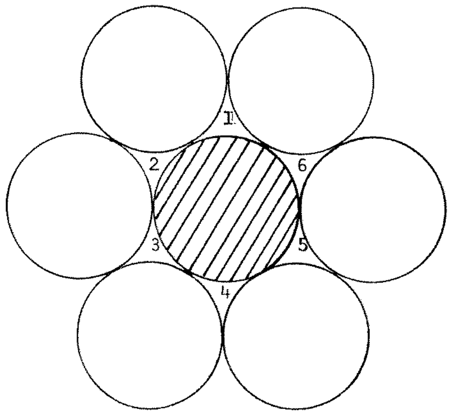
Dans la suite il sera sous-entendu que toutes les boules intervenantes ont même rayon r. Pour réaliser matériellement l'entourage régulier, on peut prendre des billes, que l'on maintient sur un support par une goutte de colle et par une ceinture scotch.

I. Entourage rigide

Posons sur un plan horizontal une boule et six boules qui la touchent. On formera ainsi six trous 1, 2, 3, 4, 5, 6. Plaçons ensuite trois boules sur les trous 1, 3, 5. On montre facilement que chacune d'elles touche les deux autres. Imaginons maintenant qu'on appuie sur les trous 4, 6, 2 un triplet de boules symétrique du précédent par rapport au centre de la boule centrale. On aura bien alors 12 boules touchant la treizième.

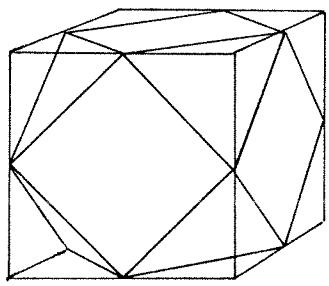
---

* Voir la couverture de l'Ouvert n° 36 (Sept. 84) et l'article d'E. Chaney : *"Comment ranger des balles de Ping-Pong"*, p. 32.



Leurs centres sont les sommets d'un polyèdre semi-régulier, dont les faces sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux et dont les 24 arêtes sont égales à 2r.

Ce polyèdre est donc le **cube tronqué**, dont la figure ci-dessous montre les arêtes apparentes. Ses sommets sont les milieux des arêtes du cube (c). (C'est le fameux cuboctaèdre d'Archimède, familier aux cristallographes.)

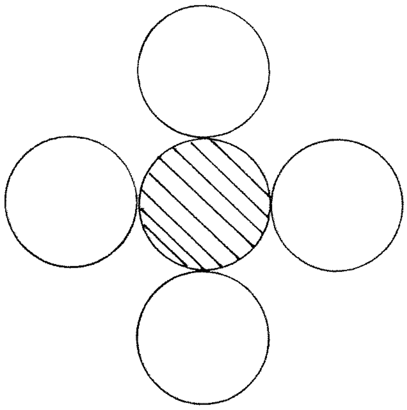


Remarques :

1) En adjoignant de même à tout cube du réseau de base (c) ses treize sphères, on voit qu'on obtient un **empilement régulier de sphères**, dont chacune est tangente à ses 12 voisines.

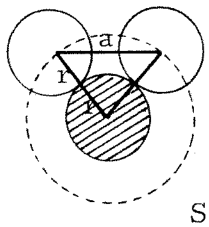
2) En appuyant le triplet inférieur de boules sur les mêmes trous que le triplet supérieur, on obtient un **second entourage rigide.**

3) Si dans la figure ci-dessous (4 boules en croix touchant la centrale) on appuie dans les interstices 4 boules en haut et 4 boules en bas, on obtient aussi un entourage rigide convenable de 12 boules. **Il est identique à l'entourage régulier** vu plus haut. Ceci s'observe aisément sur le cuboctaèdre d'Archimède, où apparaissent les symétries d'ordre 4 et celles d'ordre 6.



II. Entourage déformable

On sait que l'arête a d'un icosaèdre régulier (12 sommets, 20 faces triangulaires, 30 arêtes) est plus longue que le rayon 2r de sa sphère circonscrite (S).



Les 12 boules de rayon r centrées en ses sommets constituent donc un entourage convenable de la boule centrale. Les boules périphériques étant disjointes, on obtient encore un entourage convenable en déplaçant légèrement leurs centres sur (S). **Il existe donc une infinité d'entourages irréguliers convenables.** Ils dépendent de $12 \times 2 = 24$ paramètres !

Remarques :

1) Pour la réalisation matérielle on prendra cette fois des balles de ping-pong. On marquera sur l'une d'elles les sommets d'un icosaèdre régulier inscrit, et on collera aux marques les 12 balles périphériques.

2) Nous avons montré qu'il existe un entourage déformable convenable constitué par deux couronnes de 5 boules, plus une boule de part et d'autre. **Mais il entre dans la famille précédente.**

Sur l'empilement aléatoire.

Il y a une vingtaine d'années, on a fait à Strasbourg, au laboratoire de Mécanique des Fluides, l'expérience suivante :

On remplit un gros tuyau d'un grand nombre de billes de verre égales, que l'on tasse par secousses rythmiques. En répétant l'expérience plusieurs fois dans les mêmes conditions (même nombre de billes), on constate :

1) le niveau de l'empilement est remarquablement stable ;

2) la vitesse d'écoulement d'eau à travers l'empilement varie de manière appréciable d'une expérience à l'autre.

Conclusion (prévisible ?) : **Dans un empilement aléatoire de sphères égales leur disposition varie, malgré une densité sensiblement constante .**

Rappelons que les densités approchées des empilements aléatoire et régulier sont respectivement 0,63 et 0,74 et que, curieusement, la question de l'empilement le plus dense reste ouverte.