DE L'ENTRÉE EN 4° AU BACCALAURÉAT C,

LES CRUS 84 DANS L'ACADEMIE

Obligeamment transmis par M. Silvestre, Inspecteur Pédagogique Régional, les textes des différents examens d'appel qui se sont déroulés dans l'académie, sont reproduits ci-après.

D'autre part, la moyenne en mathématiques au Bac. C ayant été de 7/20 dans l'académie, nous publions une analyse de son énoncé, due à Michel de COINTET.

§ 1. APPEL EN FIN DE 5°. ADMISSION EN 4° (1 H. COEFF. 2)

I. Calculez :

$- 3,5 - 1,5 =$

$- 17,3 + 0,6 =$

$(-4)^3 =$

$- 11,2 \times 5 =$

$- 6 \times (-3) + 9 \times (-2) - (-6) \times 6 =$

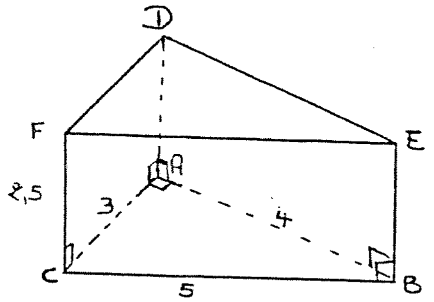
$3 (a - 4 + a^2) - 5 (3 - a^2 + 2 a) =$

II. Calculez de deux façons :

$- 15,2 - (17,3 - 15,2 + 3,7) + (-6,3 - 2,7) =$

$(10 - 6) \times 2 - 6 \times (27 - 9) =$

III.



1) Que pouvez-vous dire des arêtes
. [AB] et [DE] ?
. [AB] et [FC] ?

2) Que pouvez-vous dire de l'arête [BC] et du plan (EFD) ?

3) Que pouvez-vous dire des plans (ABED) et (ACFD) ?

4) Donnez le nom de ce solide.

5) Les dimensions du solide sont données en cm sur la figure. Calculez le volume de ce solide en cm^3 puis en dm^3.

IV. 1) A l'aide de la règle et du compas, tracez un triangle ABC connaissant la longueur des côtés (en cm)
AB = 6 BC = 7 AC = 8

2) Placez le point D pour que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

3) Comment s'appelle un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur ?

V. 1) Décomposez 315 et 168 en produit de facteurs premiers

2) Citez au moins 6 diviseurs de 315

3) Trouvez le PPCM et le PGCD de 315 et 168

4) Complétez en effectuant des divisions euclidiennes

165 = 24 x ... + ...

168 = 24 x ... + ...

171 = 24 x ... + ...

L'un des 3 nombres 165, 168 et 171 est-il multiple de 24 ?
Expliquez pourquoi.

§ 2. APPEL EN FIN DE 3°. ADMISSION EN 2° (2 H. COEFF. 4)

Exercice I :

Soit trois applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 4(x^2 - 4)$$
$$g(x) = 9(x + 2)^2$$
$$h(x) = (x - 2)^2$$

a) Calculer $f(\sqrt{2})$, $g(0{,}05)$, $g(-\frac{5}{3})$, $h(2 - 3\sqrt{2})$.

b) Calculer $g(\sqrt{5}) - h(\sqrt{5})$; donner le résultat sous la forme $a\sqrt{5} + b$ où a et b sont des entiers relatifs.

c) Factoriser $g(x) - h(x)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$g(x) = h(x)$$
$$f(x) = g(x)$$

Exercice II :

Un libraire a vendu 77 livres, les uns à 13 F, les autres à 19 F, pour une somme de 1 211 F.

Combien y a-t-il de livres de chaque sorte ?

Exercice III :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $(x'x)$ l'axe des abscisses et $(y'y)$ l'axe des ordonnées.

1) Construire les droites (D) et (Δ) représentant respectivement les fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -2x + 3$$

2) On pose

$(D) \cap (x'x) = \{A\}$ $(D) \cap (y'y) = \{B\}$	$(\Delta) \cap (x'x) = \{C\}$ $(\Delta) \cap (y'y) = \{E\}$	$(\Delta) \cap (D) = \{H\}$

Calculer les coordonnées des points A, B, C, E, H.

3) Prouver que les droites (BC) et (AE) sont perpendiculaires.

4) La parallèle menée par A à (Δ) coupe $(y'y)$ en F. Former une équation pour la droite (AF) et calculer les coordonnées de F.

5) Calculer les distances BE, BF, BH, BA et vérifier que $\frac{BH}{BA} = \frac{BE}{BF}$

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

§ 3. APPEL EN FIN DE 2°. ADMISSION EN 1ÈRE (2 H.)

* Les candidats à l'entrée en Première S devaient traiter les problèmes 1 et 2.

* Les candidats à l'entrée en Première A_1 ou B devaient traiter les problèmes 1 et 3.

* Les candidats à l'entrée en Première A_2, A_3 ou G devaient traiter les problèmes 3 et 4.

PROBLEME n° 1 Candidats à l'entrée en Première A_1, B ou S

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x+1}$$

et on désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1°) a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) La courbe (C) a-t-elle des points communs avec la droite d'équation $x = -1$, avec la droite des abscisses, avec la droite des ordonnées ? Si oui, calculer les coordonnées de ces points.

2°) Etudier les variations de f sur $]-\infty , -1[$ et sur $]-1 , +\infty[$

Construire dans un même repère la courbe (C) et la droite d'équation $x = -1$

3°) On désigne par d la droite d'équation $y = 1 - x$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et d.

Construire d sur le même graphique que (C).

4°) a) Calculer la différence $f(x) - (1 - x)$

b) Démontrer que pour tout réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right[$

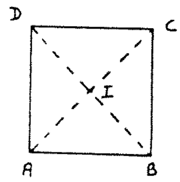
$$0 \leqslant f(x) - (1 - x) \leqslant 2x^2$$

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-14} près de :

$$\frac{1}{1{,}00000005} \quad \text{et de} \quad \frac{1}{0{,}99999996}$$

PROBLEME n° 2 Candidats à l'entrée en Première S

Soit ABCD un carré de côté 1 et soit I le point d'intersection de ses diagonales (I est le centre du carré)



1°) On désigne respectivement par S_A , S_B , S_C et S_D les symétries centrales de centres A, B, C et D et on note :

$$A' = S_A(I) \quad , \quad B' = S_B(I) \quad , \quad C' = S_C(I) \quad , \quad D' = S_D(I)$$

Démontrer que : $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'D'} = 2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D'A'} = 2\overrightarrow{DA}$

En déduire que A'B'C'D' est un carré. Quel en est le centre ?

2°) On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

a) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D et I dans ce repère?

b) Soit E l'image de I par la translation de vecteur $2\overrightarrow{DA}$ et soit F l'image de I par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$

Calculer les coordonnées de E et de F.

c) Soit G et H les images respectives de E et F par la symétrie de centre I. Calculer les coordonnées des points G et H.

d) Démontrer que EFGH est un carré dont on calculera la longueur du côté.

3°) On utilise le polygone AEBFCGDH pour former, en pliant le long des côtés du carré ABCD, une pyramide à base carrée. Calculer la hauteur de la pyramide pbtenue.

PROBLEME n° 3 Candidats à l'entrée en Premières A_1, A_2, A_3, B, G.

1°) Résoudre dans R^2 le système d'équations : $\begin{cases} 3x + y - 24 = 0 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

2°) Représenter dans un même repère les droites (d_1) et (d_2) d'équations :

(d_1) $3x + y - 24 = 0$ (d_2) $x + y - 20 = 0$

Donner une interprétation géométrique du résultat de la première question.

3°) Une entreprise produit deux types de pièces, dont la fabrication nécessite le passage successif dans deux ateliers, ceci dans un ordre indifférent.

Les durées de passage (en heures) dans chaque atelier sont données dans le tableau ci-contre :

	Atelier 1	Atelier 2
pièces de type 1	3	1
pièces de type 2	1	1

Dans l'atelier 1 on peut disposer de 24 heures, dans l'atelier 2 de 20 heures. En désignant par x le nombre de pièces de type 1 et par y le nombre de pièces de type 2, montrer que la production (x,y) est réalisable si :

$3x + y \leqslant 24$ et $x + y \leqslant 20$

En représentant chaque production (x,y) par le point de coordonnées (x,y) dans un repère bien choisi, mettre en évidence l'ensemble des points du plan correspondant à des productions réalisables.

4°) la vente d'une pièce de type 1 rapporte 200 F de bénéfice, celle d'une pièce de type 2 rapporte 100 F.

Construire les points représentant une production (x,y) rapportant un bénéfice B dans les cas suivants :

a) B = 800 F b) B = 1600 F c) B = 2200 F

Quelle est la production qui assure à l'entreprise un bénéfice maximal ?

PROBLEME n° 4 Candidats à l'entrée en Premières A_2, A_3, G.

Une enquête auprès des 800 élèves d'un lycée a permis d'établir le tableau ci-dessous :

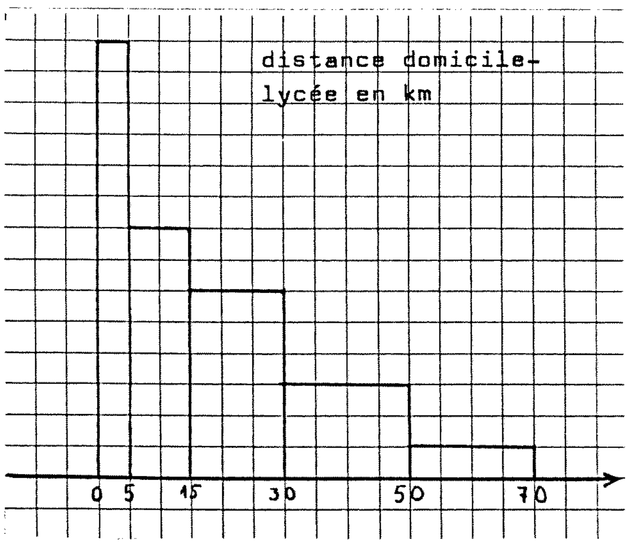
	EXTERNES	DEMI-PENSIONNAIRES	INTERNES	TOTAUX
FILLES	180		120	450
GARÇONS		130		
TOTAUX			180	800

1°) Reproduire et compléter ce tableau

2°) Etablir un tableau analogue dans lequel figureront les pourcentages par rapport à l'ensemble des élèves.

Au cours de la même enquête, les réponses à la question :"Quelle est la distance de votre domicile au lycée ?" ont permis la construction d'un graphique dans lequel les aires des rectangles sont proportionnelles aux nombres d'élèves.

3°) Reproduire et compléter le tableau à l'aide du graphique.



d : distance domicile - lycée (en km)	nombre d'élèves
$0 < d \leq 5$	
$5 < d \leq 15$	
$15 < d \leq 30$	
$30 < d \leq 50$	
$50 < d \leq 70$	50
	800

4°) Les 200 élèves pour lesquels la distance domicile-lycée est la plus importante vont bénéficier d'une prime de transport. Quelle est la distance domicile-lycée à partir de laquelle on bénéficie de cette prime ?

§ 4. L'ÉNONCÉ DU BAC C (proposé par Besançon)

EXERCICE I (4 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O\ \vec{i}\ \vec{j})$, on appelle disque unité l'ensemble : $D = \{M \in P\ /\ OM \leqslant 1\}$. On appelle distance d'un point M à D, et on note d(M,D), la plus petite des distances de M aux points de D.

1) Démontrer que si M est extérieur au disque, alors $d(M,D) = MM_0$, où M_0 est l'intersection du cercle unité avec le segment $[O,M]$.

2) En déduire que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors :

$$d(M,D) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

3) Soit Δ la droite d'équation $y = -2$. Chercher l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(M,D) = 2\ d(M,\Delta)$$

Représenter D, Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

EXERCICE II (4 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_0^1 e^{tx^2} dt$$

1) Calculer F(x) pour $x \neq 0$ et F(0). Démontrer que F est continue en O.

2) Ecrire un développement limité à l'ordre 2 de e^x au voisinage de O. En déduire un développement limité à l'ordre 2 de F(x) au voisinage de O. Démontrer alors que : $F'(0) = 0$

3) Démontrer que : si $0 \leqslant x \leqslant x'$ alors $F(x) \leqslant F(x')$

et que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

4) Donner, en tenant compte des résultats précédents, l'allure du graphe de F.

PROBLEME (12 points)

Soient $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan, et $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre O, d'angle $\frac{3\pi}{4}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A - 1) Définir $\mathcal{S}$ analytiquement. M étant un point du plan, on pose $M' = \mathcal{S}(M)$, $M'' = \mathcal{S} \circ \mathcal{S}(M)$.

2) Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{OM''} + \overrightarrow{OM'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

C - Soit σ l'application linéaire associée à $\mathcal{S}$. On se donne un point mobile $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$, de vecteurs vitesse et accélération $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$, tel que $\vec{V}(t) = \sigma(\overrightarrow{OM(t)})$ $\forall t$. On suppose que $M(0)$ a pour coordonnées $(1,0)$.

1) Exprimer $x'(t)$ et $y'(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
Montrer que $\vec{\Gamma}(t) = \sigma(\vec{V}(t))$, $\forall t$.

2) Montrer que $\sigma o \sigma(\vec{v}) + \sigma(\vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{0}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ (utiliser A - 2)).
En déduire que $\vec{\Gamma}(t) + \vec{V}(t) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM(t)} = \vec{0}$ $\forall t$.

3) Montrer que les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ vérifient l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2} f = 0$

4) Résoudre l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2} f = 0$.
Calculer $\vec{V}(0)$. Calculer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

5) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_0^a x(t)dt = 2\,x'(0) + 2\,x(0) - 2\,x'(a) - 2\,x(a)$ (utiliser C - 3))
Calculer $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a x(t)dt$. Calculer de même $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a y(t)dt$.

Les parties B et C sont indépendantes.

B - On appelle M_o le point de coordonnées $(1,0)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = \mathcal{S}(M_n)$. On appelle (x_n, y_n) les coordonnées de M_n.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n = 0$ et $y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n = 0$ (Utiliser A - 2)).

2) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation $u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=o}^{n} u_k = -\frac{2}{5} u_{n+2} - \frac{4}{5} u_{n+1} + \frac{2}{5} u_1 + \frac{4}{5} u_o$.

3) Caractériser géométriquement la composée de n similitudes égales à $\mathcal{S}$.
En déduire l'expression de OM_n en fonction de n.
Etudier $\lim\limits_{n \to \infty} OM_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

4) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=o}^{n} x_k$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=o}^{n} y_k$.

I. OBSERVATIONS GENERALES SUR LE TEXTE

Dans le premier exercice, les deux premières questions sont mal posées : ce ne peut être que deux phrases successives d'une même question car la formule demandée en 2) n'est vraie que sous les hypothèses de 1) !
Dans la question 4) du second exercice, on demande *"l'allure du graphe de F"*, terme qui manque de précision, pour une épreuve de bac. C.
Dans le problème, le signe *" $\forall$ t"* est employé plusieurs fois comme signe dactylographique remplaçant désavantageusement *"pour toute valeur de t"*. Le symbole *" $\forall n \in \mathbb{N}$"* est placé tantôt en début, tantôt en fin de proposition.
Dans la partie C, $\vec{V}(t)$ désigne un secteur-vitesse et $\vec{v}$ un vecteur quelconque du plan ; des notations aussi voisines sont source de confusion.
Signalons l'emploi du signe " ∞" au lieu de " $+ \infty$ ".
L'expression *"définir analytiquement"* employée au début du problème n'a pas de signification universelle : s'agit-il de relation sur les affixes ou de relations sur les coordonnées ? Il serait plus simple de le préciser.

II. PREMIER EXERCICE

A. La question 1) est pour l'ensemble des élèves une évidence au même titre que ce qui peut constituer les prémisses d'une démonstration : les élèves ne sont, en outre, pas du tout formés à une démarche axiomatique.
B. L'exercice est un exercice de géométrie qui ne permet pas une évaluation des capacités des élèves en la matière : la seule question où l'élève est incité à répondre géométriquement n'est pas significative et la solution analytique suggérée ensuite conduit à un exercice technique de calcul algébrique.
C. Difficultés :
   1) Démontrer ce qui paraît évident ; et à partir de quelles prémisses ?
   2) Résoudre une équation comportant radical et valeur absolue conduisant à deux branches d'hyperboles distinctes ; sans oublier de mentionner qu'aucun point intérieur au disque ne peut être élément de l'ensemble demandé, pour utiliser la question précédente. C'est d'une difficulté technique excessive...

III. SECOND EXERCICE

A. La définition de la fonction F comme fonction d'une variable qui est le paramètre d'une intégrale définie est déroutante. On aurait dû au moins donner le résultat pour permettre au candidat de faire les autres questions ! La question 4) suggère une interprétation géométrique de "$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$" (sinon pourquoi le calcul de cette limite ?) qui n'est pas au programme ! Les instructions concernant les sujets de baccalauréat auraient dû conduire à préférer un tracé soigné de la courbe représentative de F sur un intervalle donné, à la démonstration de "$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$".

B. L'exercice ne permet pas une évaluation des capacités des élèves qui n'ont jamais rencontré d'intégrales avec paramètre (autre que la borne supérieure). Il permet, par contre, une bonne évaluation de la compréhension du développement limité d'ordre 2 ainsi que du maniement des inégalités.

C. Difficultés : distinguer paramètre et variable d'intégration dans le calcul d'une intégrale, comparer deux intégrales définies.

IV. PROBLEME

A. L'objectif n'est pas indiqué en début d'énoncé.
Le concept d'application linéaire associée ici à une similitude, n'est PLUS AU PROGRAMME ; il est de plus inutile ici, et ne fait que compliquer. Il eût été bien plus simple de définir $\vec{V}(t)$ par : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{OM}'(t)$ et de supprimer les deux premières questions de C.

B. Le problème porte sur les similitudes, les suites, la cinématique, les équations différentielles et le calcul intégral.
La réponse à plusieurs questions consiste simplement à dire qu'une égalité vectorielle - la même tout au long du problème - se traduit par deux égalités sur les coordonnées ; c'est un peu mince ! Il y a en réalité cinq questions qui nécessitent connaissances ou savoir-faire : A) 1) ; B) 2) ; B) 3) ; C) 4) ; C) 5).
Les autres sont des questions de remplissage. Il eût été plus instructif de faire faire des figures !

C. Il n'y a pas de difficulté mathématique pour un élève connaissant son cours. Les indications (utiliser A - 2) sont inutiles tant elles sont évidentes !

V. APPRECIATION GLOBALE

. Le sujet touche à plusieurs parties du programme dont une nouvelle (équations différentielles).

. Il y a DEUX QUESTIONS HORS PROGRAMME : l'interprétation graphique de "$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$" et le concept d'application linéaire associée qui conditionne la partie C du problème !

. Les difficultés mathématiques vont en décroissant ! L'exercice 1 (et d'abord la question 1) est plus difficile que l'exercice 2, lesquels sont plus difficiles que le problème : les exercices demandent davantage de savoir-faire que le problème qui est une suite d'applications directes du cours. Ainsi les rôles des exercices et du problème sont inversés. Tout cela est bien déroutant pour bon nombre de candidats !

. Ajoutons que la moyenne des candidats de l'Académie a été de 7 sur 20 !

M. de COINTET