PLATONICIENS ET ARCHIMEDRES

ou : Représentation de polyèdres par des moyens informatiques (1)

N. VOGEL

Je tiens d'abord à dire à tous les patients ou impatients dessinateurs qui ont passé beaucoup de temps à représenter des polyèdres à la main : rassurez-vous, il en faut au moins autant pour arriver à les faire représenter par une table traçante !

Mais lorsque le travail de programmation sur ordinateur est achevé, il a de grands avantages sur le travail à la main : il permet de refaire les dessins autant de fois que l'on veut, à des échelles différentes, avec des projections ou des points de vue différents, avec plus ou moins de hachures, avec des lignes cachées, effacées ou pointillées...

L'ensemble des logiciels qui ont permis de représenter tous les polyèdres platoniciens et archimédiens à l'aide d'un système informatique constitué d'une table traçante HOUSTON reliée à un micro-ordinateur LOGABAX LX 515, se compose d'une dizaine de programmes LSE et d'environ vingt fichiers.

Voici quelques précisions sur la réalisation de ces programmes :

1) Quelles sont les données enregistrées pour permettre le dessin d'un polyèdre ?

Chaque polyèdre est décrit par trois matrices :

- Une matrice S (sommets) qui contient les trois coordonnées de chacun des sommets du polyèdre.

(1) Ceux qui souhaitent avoir d'autres dessins, des représentations plus variées et plus de précisions sur les programmes utilisés, trouveront cela dans une brochure IREM en préparation sur ce thème.

- Une matrice F (faces) dont chaque ligne décrit une face par la suite des numéros des sommets rencontrés lorsqu'on parcourt la face dans le sens positif, la face étant orientée par une normale dirigée vers l'extérieur du polyèdre (La ligne finit par 0 pour indiquer la fin de la face). (Le numéro d'un sommet est le numéro de la ligne de S où se trouvent ses coordonnées.)

- Une matrice A (arêtes) dont chaque ligne comporte quatre éléments : les deux premiers sont les numéros des sommets extrémités de l'arête, les deux autres les numéros des faces contenant cette arête. (En fait les matrices S et F suffiraient à décrire les polyèdres, mais la matrice A permet de gagner beaucoup de temps lors du dessin du polyèdre.)

Exemple du cube

S

0	0	0
1	0	0
1	1	0
0	1	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1
0	0	1

F

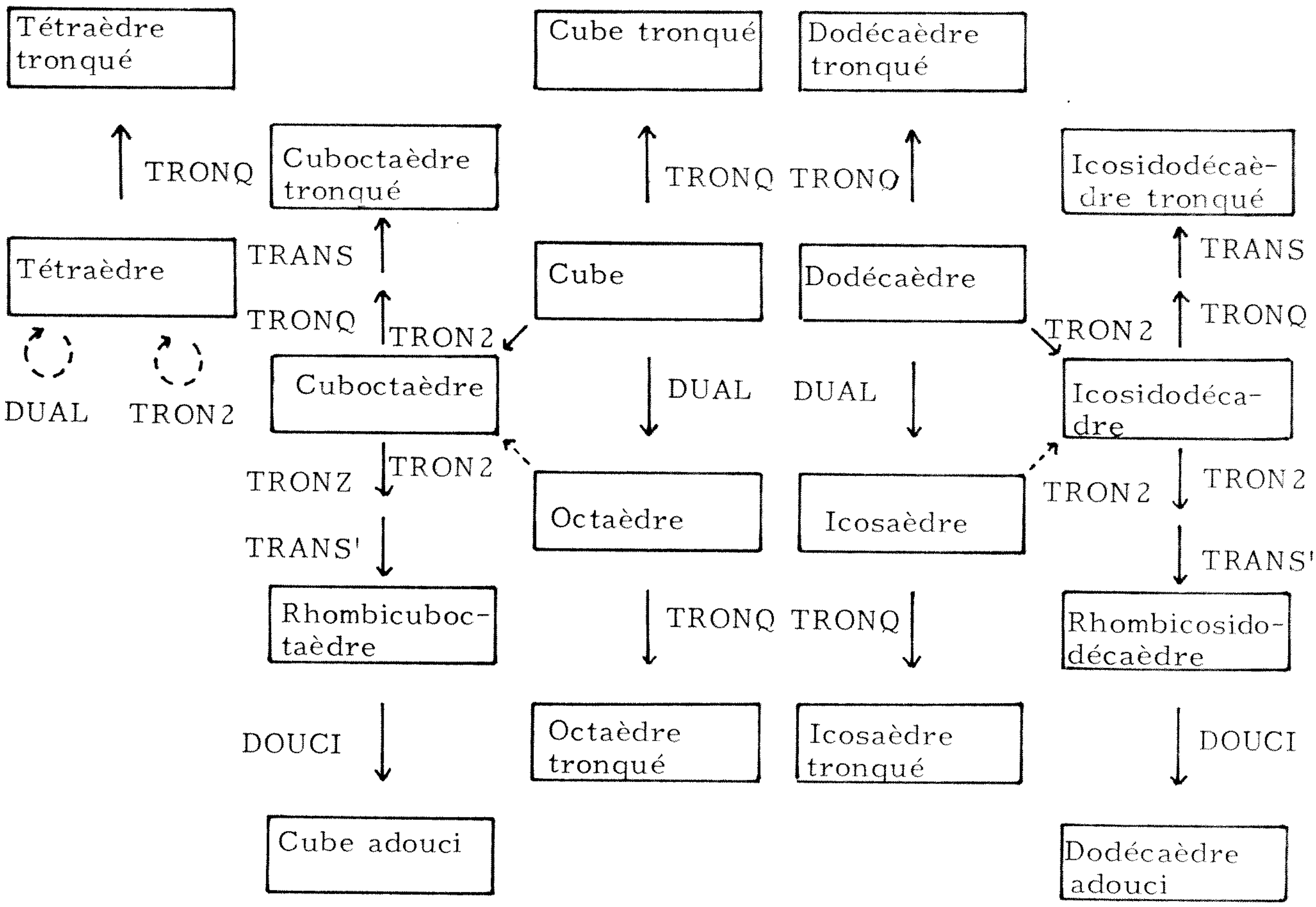
4	3	2	1	0
1	2	7	8	0
8	7	6	5	0
3	4	5	6	0
2	3	6	7	0
8	5	4	1	0

A

3	4	4	1
2	3	5	1
1	2	2	1
1	4	1	6
2	7	2	5
7	8	2	3
1	8	6	2
6	7	5	3
5	6	4	3
5	8	3	6
4	5	4	6
3	6	5	4

2) Comment construire toutes ces données ?

Seules les matrices S et F du cube et du tétraèdre et la matrice F du dodécaèdre ont été calculée à la main. Toutes les autres matrices ont été fabriquées à l'aide de sept programmes. Un premier programme permet de calculer A à partir de F, un deuxième programme calcule la matrice S du dodécaèdre, et ensuite on continue avec le schéma suivant : (les flèches indiquent les programmes utilisés).



<u>*Légende*</u> :

DUAL — *calcule les trois matrices du dual d'un polyèdre*

TRONQ — *calcule les matrices de la troncature d'un polyèdre*

TRON 2 — *calcule les matrices du volume obtenu lorsqu'on coupe un polyèdre par des plans passant par les milieux des arêtes qui ont un sommet commun*

TRANS — *effectue des translations de certaines faces d'un polyèdre afin de le rendre régulier*

DOUCI — *découpe les faces carrées adjacentes à des triangles des "rhombi" en deux triangles et fait subir aux faces non triangulaires des vissages afin de rendre tous les triangles équilatéraux.*

L'ensemble des données ainsi créées représente 9628 nombres pour les 18 polyèdres réguliers et semi-réguliers !

3) **Comment passer de ces données aux dessins ?**

A l'aide d'un programme qui comporte les phases suivantes :

- Choix d'une rotation, calcul de la matrice de rotation, et calcul de la nouvelle matrice S.

- Recherche des arêtes visibles : pour cela, on calcule la normale orientée vers l'extérieur de chacune des faces du polyèdre. Le polyèdre étant projeté sur O $\vec{j}$ $\vec{k}$, une face est visible si et seulement si la composante sur i de sa normale est positive. Une arête est visible si et seulement si elle appartient a au moins une face visible (d'où l'intérêt de trouver rapidement les faces contenant chaque arête (voir 1)).

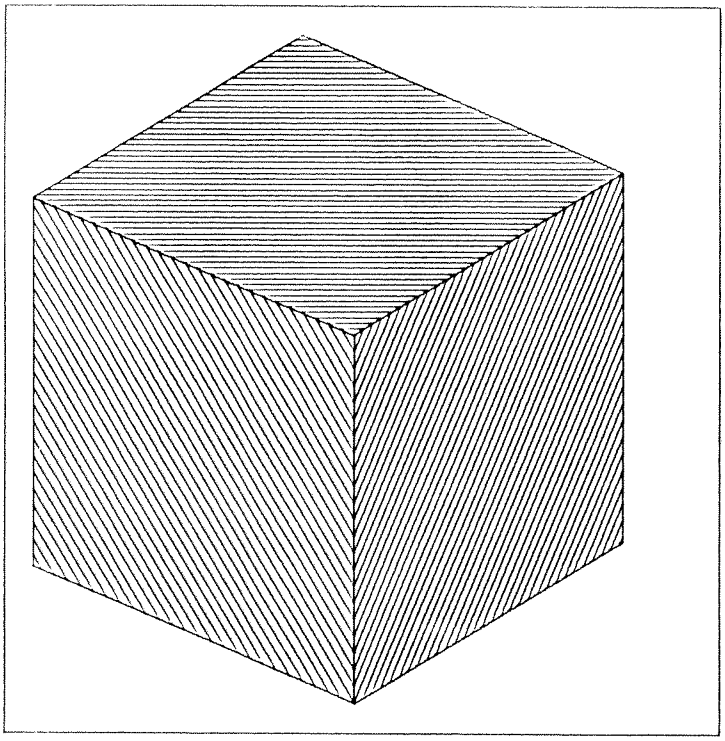
- Choix d'une échelle adaptée et dessin des projections des arêtes visibles en trait plein, éventuellement lignes pointillées pour les autres.

- Eventuellement, dessin de hachures (obtenues par intersections de plans équidistants parallèles à O $\vec{j}$ $\vec{k}$ avec le polyèdre).

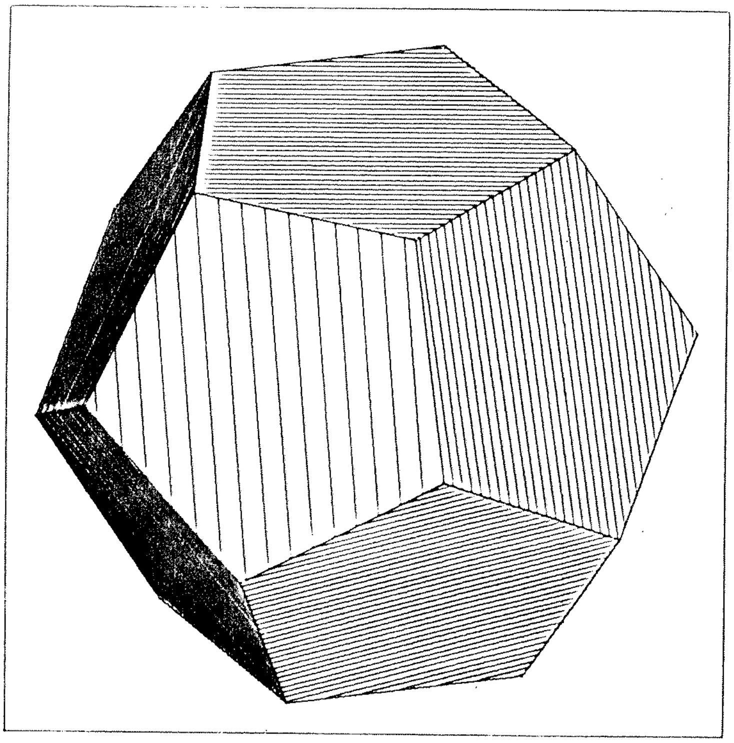
Et maintenant, que peut-on encore ajouter à ces logiciels ?

- J'attends LSE graphique et une console graphique pour faire bouger ces polyèdres (déplacements dans l'espace).

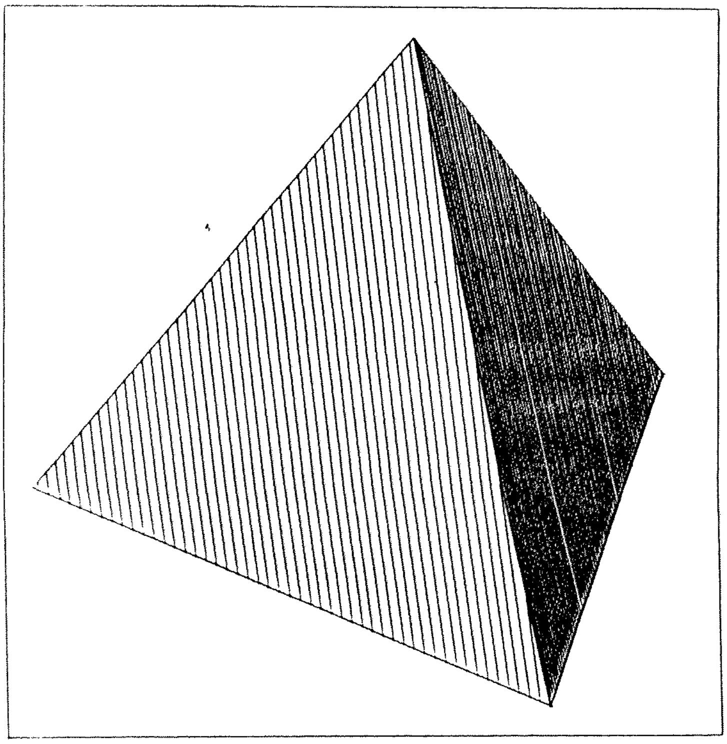
- Et bien sûr, il faudrait ajouter les polyèdres réguliers étoilés... Pour cela, je n'attends qu'une bonne dose de courage ... ou peut-être quelques idées que vous pourriez avoir sur le sujet (algorithme simple d'élimination des lignes cachées d'un polyèdre étoilé, par exemple).



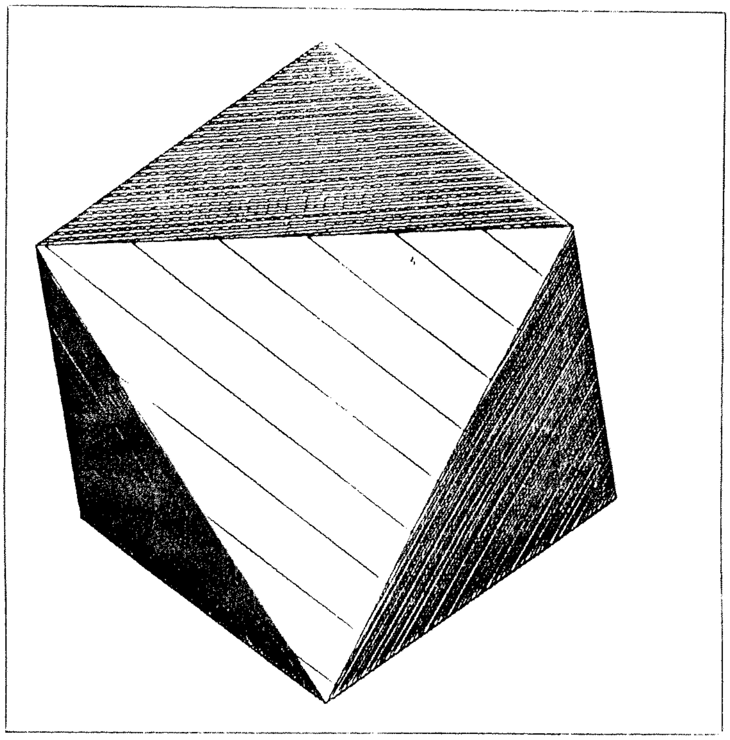
CUBE



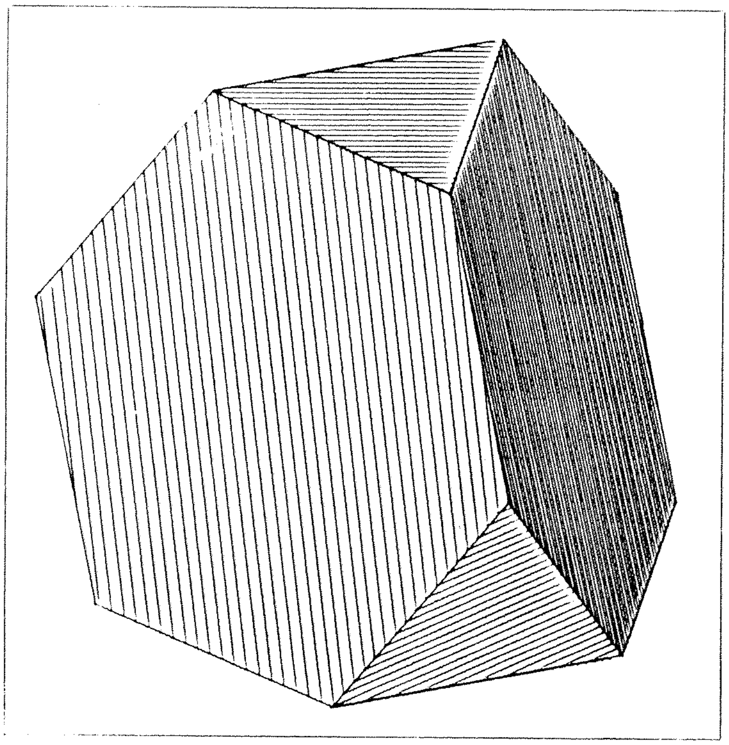
DODECAEDRE



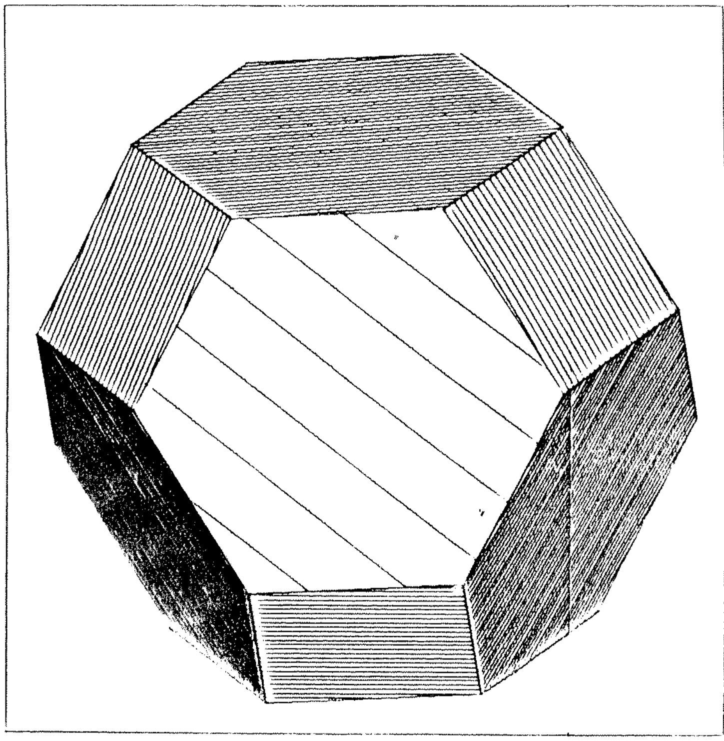
TETRAEDRE



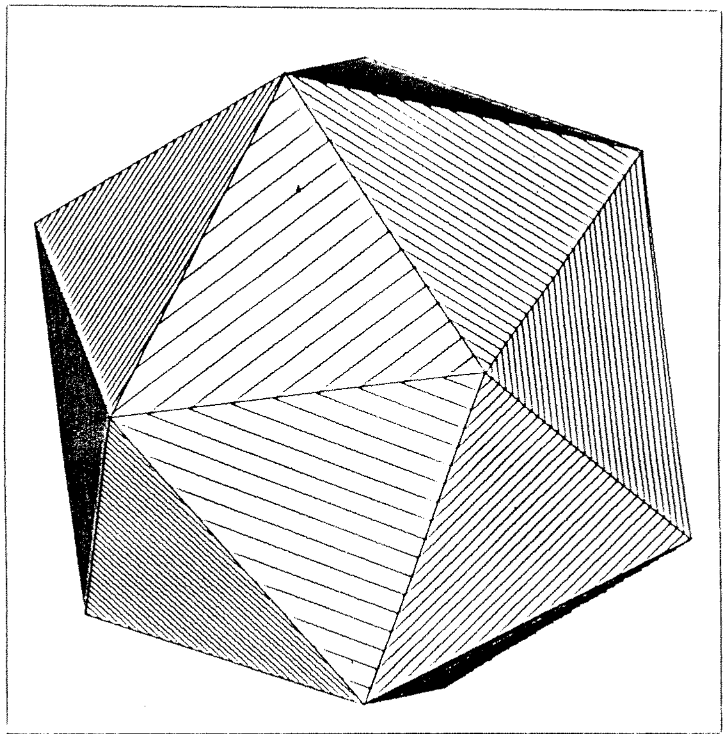
OCTAEDRE



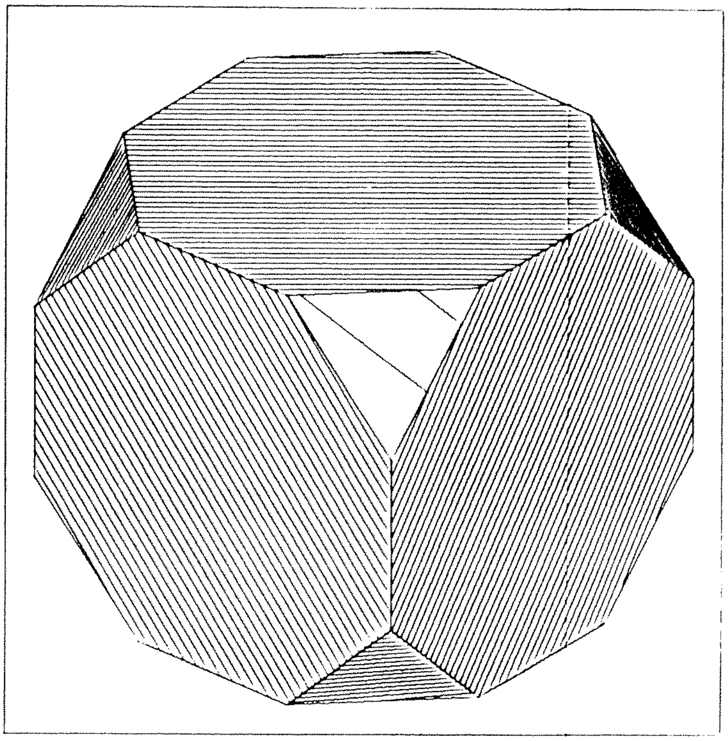
TETRAEDRE TRONQUE



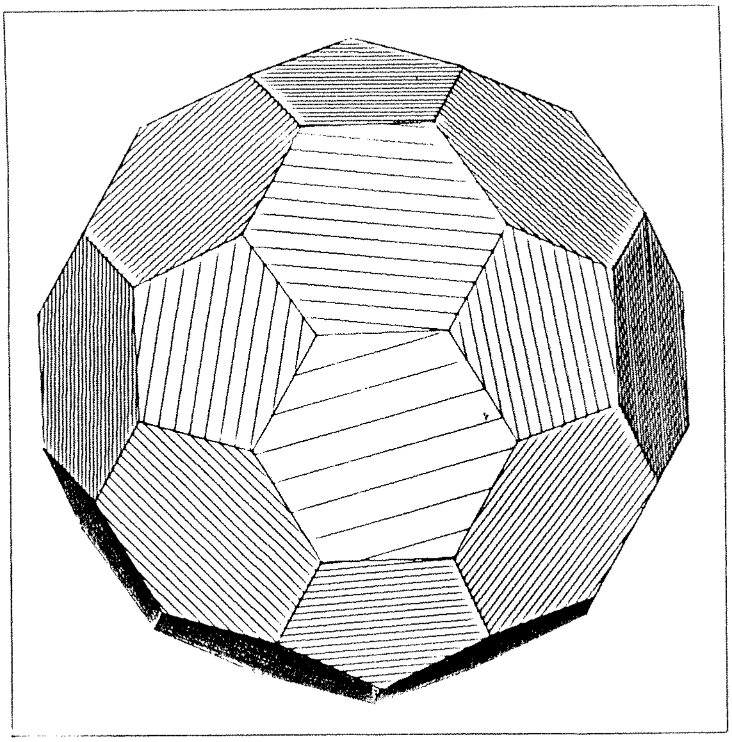
OCTAEDRE TRONQUE



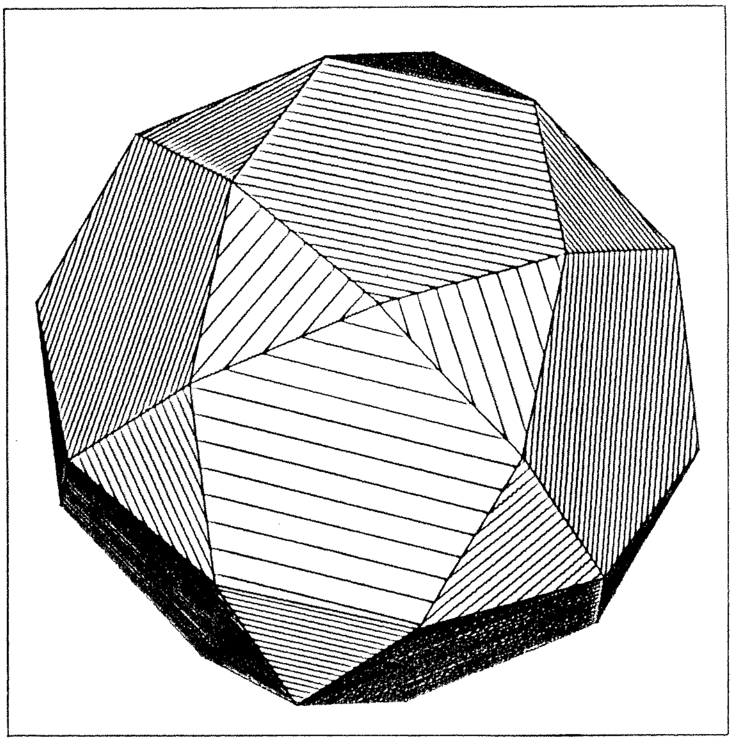
ICOSAEDRE



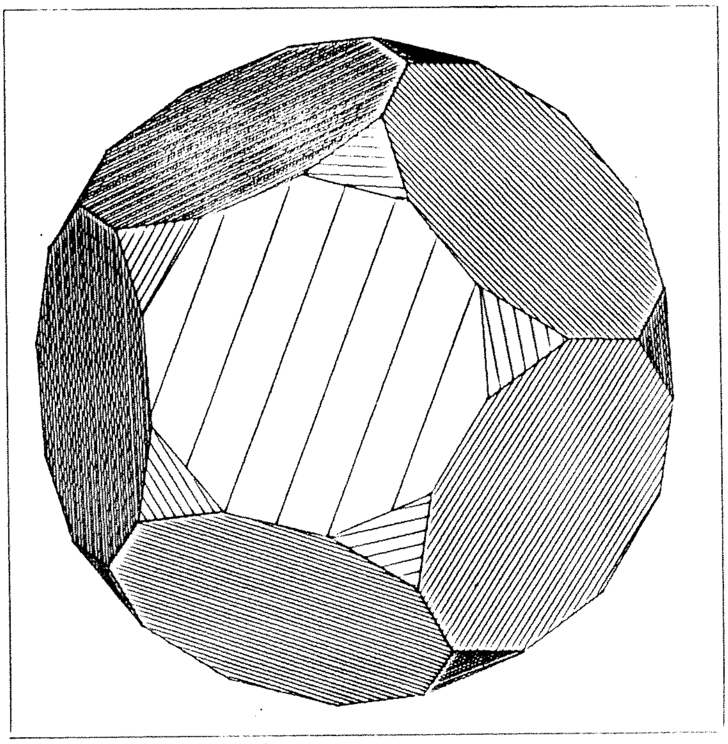
CUBE TRONQUE



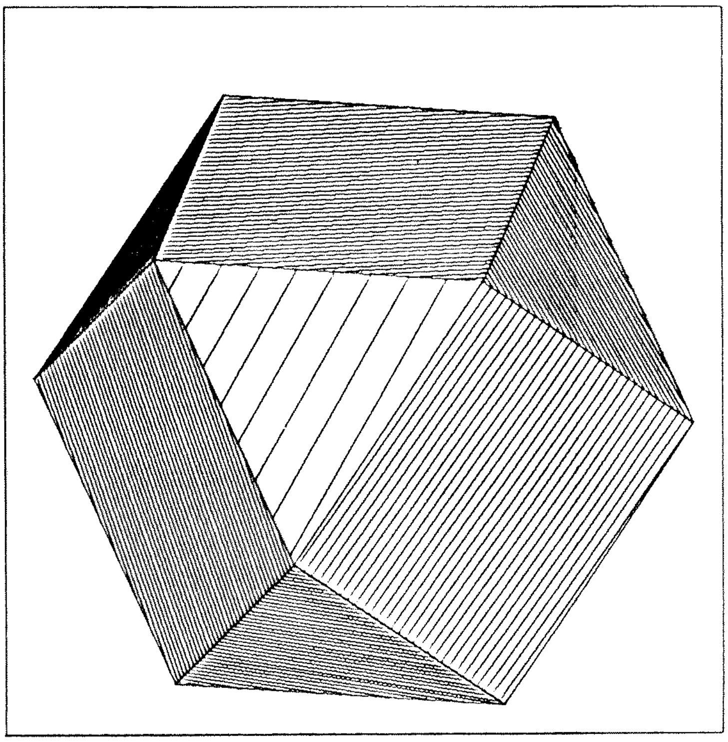
ICOSAEDRE TRONQUE



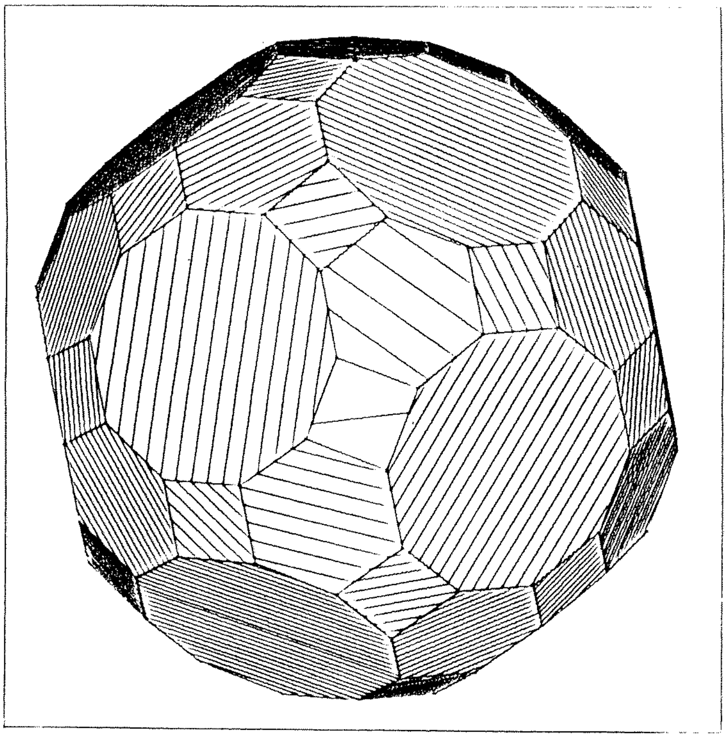
ICOSIDODECAEDRE



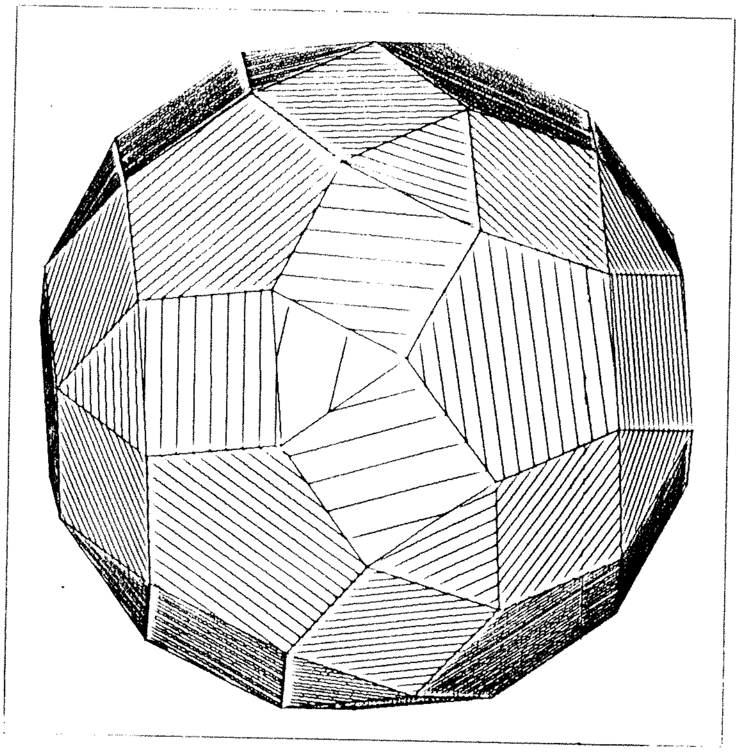
DODECAEDRE TRONQUE



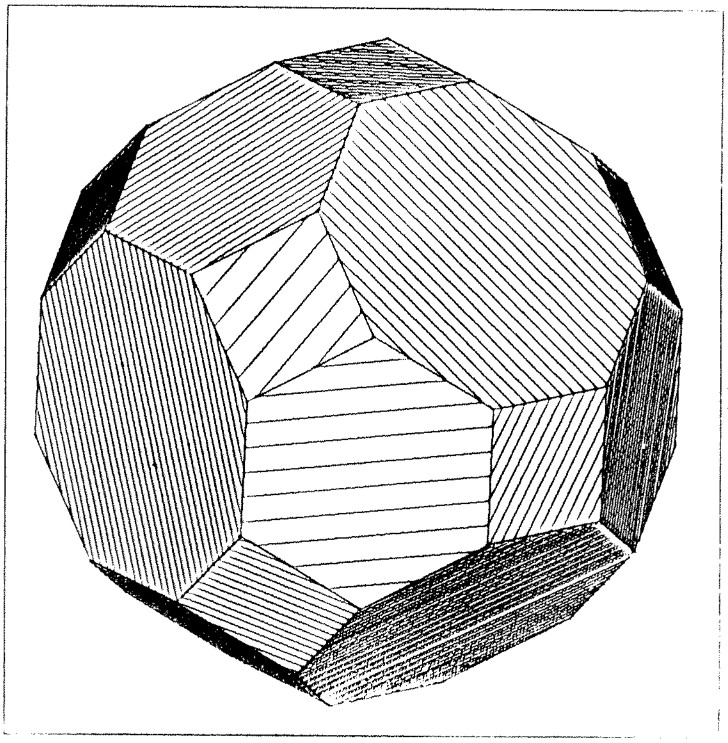
CUBOCTAEDRE



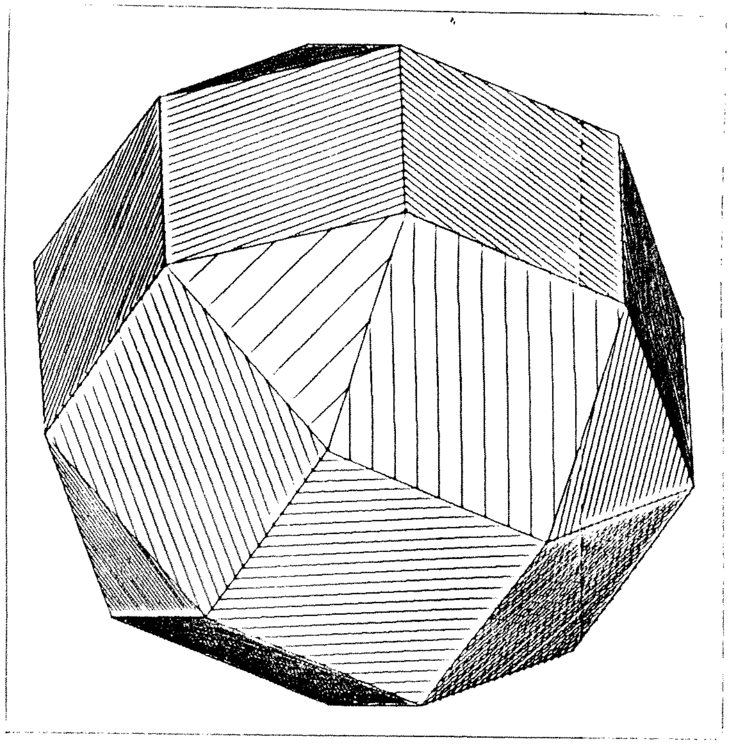
ICOSIDODECAEDRE TRONQUE



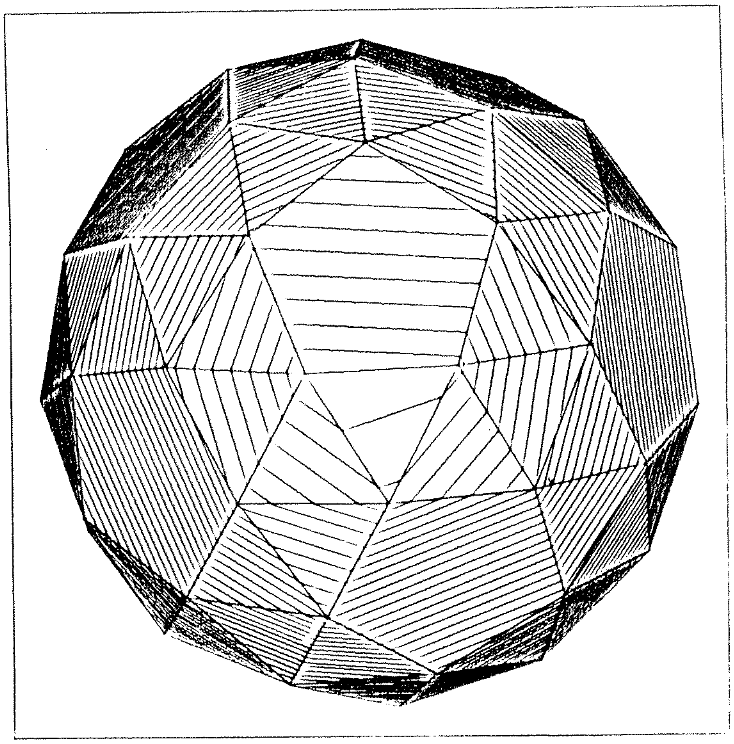
RHOMBICOSIDODECAEDRE



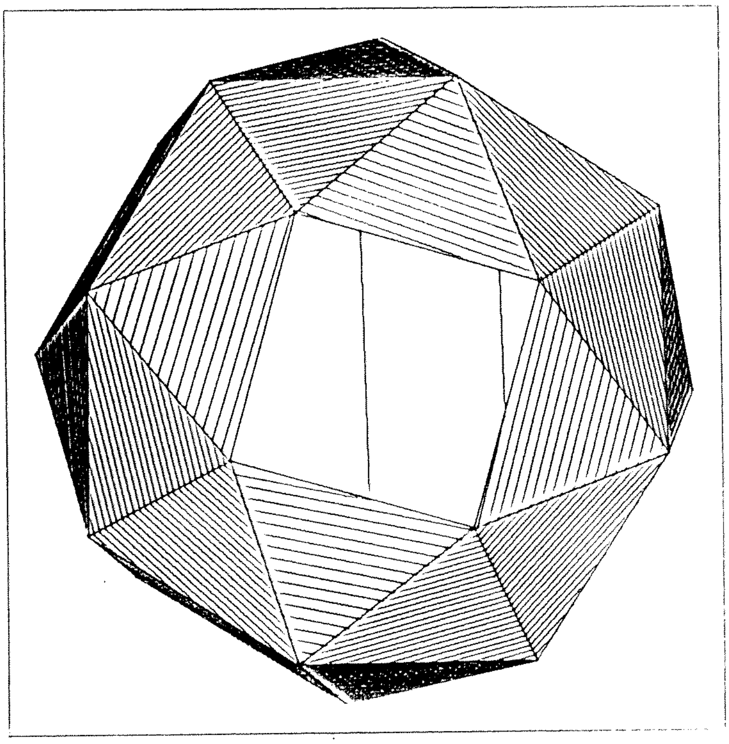
CUBOCTAEDRE TRONQUE



RHOMBICUBOCTAEDRE



DODECAEDRE ADOUCI



CUBE ADOUCI