ESPACE VECTORIEL ?
CONNAIS PAS !

A la rentrée 83, la grande majorité des élèves entrant en Terminale devraient ignorer le terme "espace vectoriel". Les ex-élèves de Première S en auront entendu la définition, *"en vue de faciliter la communication"*, mais leurs professeurs, mis en garde par le programme, n'en auront fait aucune étude générale.

Certains lèveront les yeux au ciel en pensant au bon temps où les axiomes d'espace vectoriel s'annonaient en Quatrième. D'autres prendront un air entendu en songeant au bon vieux temps où l'on ignorait superbement l'Algèbre Linéaire (*)... Et une fois les états d'âme passés, il faudra se mettre au travail.

Or la façon d'aborder l'Algèbre Linéaire, le moment de l'introduire, ont considérablement changé avec les nouveaux programmes de mathématique. L'entrée en scène tardive des espaces vectoriels est à rapprocher de la réserve des textes officiels à propos du terme "vecteurs". Un tableau comparatif des anciens et nouveaux programmes, portant seulement sur l'Algèbre Linéaire, permettra de mieux saisir l'ampleur du changement :

(*) Il faut noter que le terme "Algèbre Linéaire" fait seulement son apparition dans les programmes 83.

ANCIENS PROGRAMMES

. **Classe de quatrième**

Programme :

Equipollence de bipoints. C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.
Direction d'un vecteur non nul.
Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.
Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repères du plan ; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère.
Exercices de calcul vectoriel ; médianes d'un triangle.

Commentaires :

Vecteur
La classe d'équivalence du bipoint (A,B) s'appelle un vecteur du plan (on disait autrefois un vecteur libre) ; elle se note $\overrightarrow{AB}$; donc la notation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}$ signifie que le bipoint (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{V}$, la notation $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}$ signifie que les bipoints (A,B) et (P,Q) sont équipollents.
Addition des vecteurs
Etant donné un vecteur $\overrightarrow{V}$, si à tout point M on associe le point M', tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$, on définit une application bijective du plan sur lui-même, dite translation du vecteur $\overrightarrow{V}$.

...

(suivent les divers axiomes d'espace vectoriel, obtenus comme propriétés de l'ensemble des vecteurs du plan)

NOUVEAUX PROGRAMMES

. **Classe de quatrième**

Programme :

Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs.

Commentaire :

(...) les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves (...)

ANCIENS PROGRAMMES

Décomposition d'un vecteur, coordonnées
On appelle base de l'ensemble des vecteurs tout couple $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ de vecteurs de directions différentes. Tout vecteur $\overrightarrow{V}$ est, d'une manière et d'une seule, combinaison linéaire de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$...

. Classe de Troisième

rien

. Classe de Seconde C

Programme

Définition des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de leurs sous-espaces vectoriels, de la dépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Bases et dimension, coordonnées d'un vecteur dans une base : définition et exemples ; l'espace des "vecteurs du plan" a une infinité de bases qui ont toutes deux éléments.
(L'existence générale et la non-unicité des bases, la notion de dimension seront admises : aucune démonstration générale ne sera faite à ce sujet.) L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
Applications linéaires.
Définition, exemples (homothéties, projections...). Isomorphismes d'un espace vectoriel sur un autre : une base à p éléments d'un espace vectoriel E détermine un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^p$.

NOUVEAUX PROGRAMMES

. Classe de Troisième

Programme :

Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Equations d'une droite dans un repère.
(commentaire commun avec la 4°)

. Classe de Seconde

Programme

Fréquentation directe des figures ;
Familiarité avec le calcul dans un repère ;
Ecriture vectorielle.
A propos du théorème de Thalès, on soulignera l'aspect suivant qui est l'un des plus importants : dans une projection parallèle d'un axe du plan sur un autre, l'abscisse se transforme par une application affine.
Homothétie ; formules analytiques de la translation, de l'homothétie.
Barycentre de deux points pondérés, d'un système de points (jusqu'à quatre).

ANCIENS PROGRAMMES | NOUVEAUX PROGRAMMES

Sur des exemples, image et noyau d'une application linéaire.
Equations linéaires : système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Commentaires : ils sont abondants et détaillés. On y trouve en particulier :
- La première phrase de ce paragraphe, "introduction à la locution "espace vectoriel"", le début de la troisième, "combinaison linéaire de vecteurs du plan" - alors que l'expression "plan vectoriel" n'apparaît qu'ensuite -, suggèrent une démarche progressive s'appuyant sur les résultats des paragraphes précédents. Le professeur sera donc amené à reprendre et à compléter les faits connus du plan et à les traduire en langage d'espace vectoriel ; ainsi, deux vecteurs du plan sont linéairement dépendants s'ils appartiennent à une même droite vectorielle, en particulier si l'un d'eux est nul.
On arrive ainsi à l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = \lambda \vec{u} + \mu\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs donnés linéairement indépendants, λ et μ parcourant R ; c'est un "espace vectoriel de dimension 2", que le programme appelle plan vectoriel. Dans un plan vectoriel, tout système de trois vecteurs ou plus est nécessairement formé de vecteurs linéairement dépendants.
Une base d'un tel plan est formée de deux vecteurs (i,j) linéairement indépendants ; sous son aspect géométrique, il est clair qu'un plan vectoriel possède une infinité de bases. Certains professeurs préféreront peut-être donner plus tôt les axiomes

définissant la structure d'un plan vectoriel et démontrer par un raisonnement algébrique que tout système de deux vecteurs linéairement indépendants d'un plan vectoriel en est une base.

. Classe de Première C

Programme :

1° Espaces vectoriels sur R ; définition et exemples (révision).

Sous-espace vectoriel. Vecteurs linéairement dépendants, indépendants. Base.

2° Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée ; coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel.

Condition de dépendance de deux vecteurs.

Commentaires : ils sont également abondants, fort détaillés, et d'un style bien typé :

Espaces vectoriels.

En Seconde, le programme a prévu une initiation prudente, progressive à la définition d'un espace vectoriel sur R ; en Première, la notion est désormais acquise et les définitions prévues seront données ici sous leur forme générale bien que leur exploitation ultérieure (IV, V et classe Terminale) ne concerne que des espaces vectoriels et affines de dimension $n \leqq 3$.

(...)

Dépendance et indépendance linéaires.

Soit une application de l'intervalle $I = [1,r]$ de $\mathbb{N}$ dans E, donnant $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots \overrightarrow{v_r})$:

si elle est injective, $\mathcal{F}$ est une "partie finie" ordonnée de E.

(...)

. Classe de Première S

Programme : (géométrie plane)

Le professeur procèdera à un rappel rapide (sans démonstration) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle.

Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme ; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espace vectoriel que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan (§ V), de l'espace (§ VI).

L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points.

a) Colinéarité de deux vecteurs ; vecteurs directeurs d'une droite.

Bases ; repères.

ANCIENS PROGRAMMES

Les notions conjointes de base et de dimension d'un espace vectoriel sont fondamentales ; leur exposition demande un grand soin et l'on peut la diriger, par exemple, de proche en proche, comme il suit : on montrera qu'il existe des espaces vectoriels ayant une base à 1, 2, 3 éléments.

(...)

Extension.

Un raisonnement par récurrence vient d'être amorcé, et le programme ne demande pas de l'achever, qui permet de démontrer que si un espace vectoriel a une base de n éléments :

- toute autre base a aussi n éléments ;
- toute partie libre a au plus n éléments ; si elle en a n, c'est une base ;
- toute partie génératrice a au moins n éléments ; si elle en a n, c'est une base.

Pour $n > 3$, seul le premier résultat doit être connu des élèves, car il justifie la notion de dimension.

(...)

. Classe de Terminale C :

Programme :

1. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels supplémentaires. Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F : image et noyau. Addition et composition des applications linéaires. Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

NOUVEAUX PROGRAMMES

Commentaires.

L'essentiel est l'étude des configurations classiques du plan et des effets des transformations sur ces figures ; le calcul vectoriel est un outil puissant et en particulier le théorème de la médiane peut intervenir de façon très utile dans le plan comme dans l'espace. Dans l'espace la nouveauté est le calcul vectoriel. La notion de vecteur est déjà familière à l'élève dans le plan. Sa bonne compréhension dans l'espace repose sur une claire connaissance, dès le début de l'année, des propriétés d'incidence.

. Classe de Terminale C :

Programme :

Les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire ont été vues en Première, on les complètera par celle d'un sous-espece vectoriel. Il s'agit de mettre ces notions en oeuvre sur des exemples variés d'espaces de dimension finie, en s'appuyant sur l'étude du modèle fondamental $\mathbb{R}^n$; dans les exercices et problèmes l'entier n sera numériquement fixé (de façon raisonnable).

. **Classe de Terminale C**

Programme (suite) :

a) Opérations dans $\mathbb{R}^n$, base canonique :

Etude des combinaisons linéaires d'une famille de p éléments de $\mathbb{R}^n$; cette étude conduit à dégager :

La notion de sous-espace vectoriel engendré ;

La représentation, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'une famille finie par une matrice ;

La détermination d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par les images des éléments de la base canique de $\mathbb{R}^p$, et par conséquent par la matrice de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On remarquera que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Les matrices n'ayant ici qu'un rôle représentatif, il est exclu de développer le calcul matriciel : somme et produit de matrices sont hors du programme.

b) Interprétations d'un système linéaire de n équations à p inconnues :

Recherche des décompositions d'un vecteur ;

Recherche des antécédents de ce vecteur dans une application linéaire.

Dans $\mathbb{R}^n$: familles finies génératrices, familles finies liées, libres ; bases.

c) Opérations élémentaires $L_i \to L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$ sur les lignes d'une matrice.

> Méthode du pivot de Gauss (recherche d'une forme triangulaire de la matrice) ; sa mise en oeuvre pour déterminer si une famille finie de vecteurs est une base, est libre, est génératrice.
>
> Cette étude permet d'obtenir les résultats fondamentaux suivants :
>
> Toute base de $\mathbb{R}^n$ a exactement n éléments ;
>
> Toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ a au plus n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments ;
>
> Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ a au moins n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments ;
>
> Théorème de la base incomplète.

d) Exemples numériques de résolution d'un système d'équations linéaires par opérations élémentaires sur les lignes.

e) Espaces vectoriels de dimension finie :

Bases. Isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$ d'un espace vectoriel muni d'une base comprenant n vecteurs. Dimension.

Un endomorphisme injectif (resp. surjectif) d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif.

Sous-espace vectoriels supplémentaires ; projections, symétries.

. Classe de Terminale C

Commentaire

Les programmes des classes précédentes, par l'étude des vecteurs tant géométrique qu'analytique, et par celle des systèmes d'équations linéaires, préparent à l'algèbre linéaire, qui constitue en Terminale un objectif spécifique.

Il est nécessaire de se garder, à ce stade, d'un exposé trop formel et de trop grandes ambitions intrinsèques : car il s'agit, avant tout, de faciliter une attaque efficace de problèmes numériques ou géométriques.

L'introduction des opérations élémentaires est dans la ligne des méthodes déjà préconissées en Seconde. Elle a un double objectif : définir des moyens de démonstration pour une théorie brève de la dimension : mais aussi assurer, pour le traitement pratique des systèmes numériques, des méthodes algorithmiques particulièrement efficaces.

> La méthode de pivot s'introduit aisément à la faveur d'interprétations de diverses natures, mais qui toutes se relient à l'écriture vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_p\vec{a}_p = \vec{b}$, dans R^n, d'une équation linéaire à p inconnues. On imaginera par exemple que les vecteurs seraient mieux représentés dans une base où on pourrait faire, pour certains d'entre eux, l'économie d'une coordonnée ; on est ainsi amené à des modifications élémentaires de la base, reposant sur un déplacement de termes : tel vecteur qui s'écrit $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{l}$ peut aussi s'écrire :
> $x(\vec{i} - \lambda\vec{j}) + (y + \lambda x)\ j + z\vec{k} + \vec{tl}$, et, si x n'est pas nul, le choix de λ permettra d'anuler la seconde coordonnée ; il est aisé de s'assurer que si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{l})$ est une base, $(\vec{i} - \lambda\vec{j},\vec{j},\vec{k},\vec{l})$ en est une autre.

En ce qui concerne l'extension aux espaces vectoriels munis d'une base des notions de familles liées, libres, génératrices et de celle de dimension, il est inutile de reprendre toute la théorie faite dans $\mathbb{R}_n$; l'essentiel est de faire comprendre aux élèves, à propos de ces questions figurent au programme mais aussi grâce aux exemples traités en problème, comment la donnée d'une base permet de se ramener au cas de $\mathbb{R}^n$; on n'envisagera que des situations conduisant à un espace de dimension finie.

L'article portant sur le pivot de Gauss qui va suivre a été rédigé par l'un des professeurs membre du groupe Géométrie que l'I.R.E.M. de Strasbourg a constitué pour la rédaction des manuels de Terminale (*). Il prend en compte l'évolution des programmes sur les points suivants :

1) Il donne une méthode systématique, algorithmique, de résolution des systèmes d'équations affines.

2) Il relie deux façons bien différentes d'envisager un sous-espace vectoriel de R^n : d'un côté l'objet construit en soumettant les vecteurs d'une famille données aux opérations de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De l'autre, l'objet constitué par les vecteurs du noyau d'une application linéaire. Ces deux objets sont des sous-espaces vectoriels, l'un engendré par une famille de vecteurs, l'autre défini par un système d'équations linéaires.

3) Il donne accès aux théorêmes de la dimension finie.

Certains lecteurs ont probablement déjà connaissance de cet article, diffusé après les journées pédagogiques consacrées aux programmes de Terminale. Nous avons cependant estimé qu'en raison de son intérêt à la fois pratique et théorique, il devait figurer dans l'Ouvert, qui est lu par bien d'autres collègues.

L'OUVERT

(*) Au cas où cette publication serait comprise comme une publicité pour le dit manuel, François Pluvinage, directeur de l'I.R.E.M., tient à préciser que les droits d'auteur des ouvrages portant le label I.R.E.M. ne reviennent qu'à l'I.R.E.M. Ils contribuent donc en particulier ... à la parution de l'Ouvert.