UNE SUITE REMARQUABLE

E. EHRHART

Depuis l'Antiquité le problème des nombres parfaits n'a cessé d'intriguer les mathématiciens. Ce problème, posé par Euclide et partiellement résolu par Euler, nous a conduit à étudier la suite

$$U_n = \frac{\sigma n}{n}$$

(σ_n désigne traditionnellement la somme des diviseurs de n). Elle étonne par l'infinité de ses oscillations capricieuses et son extrême lenteur à atteindre de grandes valeurs, lenteur comparable à celle de lln.

I VARIATIONS ET LIMITES

Descartes nota que $\sigma_{nm} = \sigma_n \sigma_m$, si n et m sont premiers entre eux ; sinon on montre sans peine que $\sigma_{nm} < \sigma_n \sigma_m$. D'où immédiatement :

THEOREME 1. **Si n et m sont premiers entre eux, $U_{nm} = U_n U_m$; sinon $U_{nm} < U_n U_m$.**

Voici, au demi-centième près, les premières valeurs de U_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
U_n	1	1,5	1,33	1,75	1,2	2	1,14	1,88	1,44	1,8	1,09	2,33	1,08	1,71	1,6	1,94

Il est clair que $U_n \geqslant 1$ et que, p désignant un nombre premier, **la suite U_p est décroissante et tend vers 1,** car $U_p = 1 + \frac{1}{p}$. On constate une certaine régularité initiale : **le sens de variation de U_n change à tout n < 62.**

Les premières valeurs de U(k!), approchées pour k > 5, sont :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	- -	13	- -	20 - - 30
U(k!)	1	1,5	2	2,5	3	3,36	3,84	3,95	4,08	4,22	- -	4,99	- -	5,71- -6,26

Généralement n < k! entraîne U_n < U(k!). Mais pas toujours ; ainsi 30240 < 8!, et pourtant U(30240) = 4 (valeur signalée par Descartes) dépasse U(8!) $\cong$ 3,95.

THEOREME 2. **La suite U(k!) est croissante et tend vers l'infini.**

1) **U(k!) croît.** Si $a^{\alpha}\ b^{\beta}\ \ldots\ c^{\gamma}$ est la décomposition en facteurs premiers de (k-1)!

$$\sigma\left[(k-1)!\right] = (1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha})(1+b+b^2+\ldots+b^{\beta})\ldots(1+c+c^2+\ldots+c^{\gamma}).$$

Si k est premier

$$U(k!) = U\left[(k-1)!\right]\ U_k > U\left[(k-1)!\right].$$

Sinon, tout facteur de la décomposition de k est tiré de la liste a, b, ... c. Si $a^{\alpha'}$ est ce facteur, il multiplie $U\left[(k-1)!\right]$ par :

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha+\alpha'}}{(1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha})a^{\alpha'}} = \frac{a^{\alpha+\alpha'+1}-1}{(a^{\alpha+1}-1)a^{\alpha'}} = \frac{a^{\alpha+\alpha'+1}-1}{a^{\alpha+\alpha'+1}-a^{\alpha'}} > 1$$

2) **U(k!) tend vers l'infini.** Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ les nombres premiers jusqu'à p_r. Alors

$$U(p_r!) > (1+\frac{1}{p_1})\ (1+\frac{1}{p_2})\ \ldots\ (1+\frac{1}{p_r})$$

et

$$\ln U(p_r!) > \ln(1+\frac{1}{p_1}) + \ln(1+\frac{1}{p_2}) + \ldots + \ln(1+\frac{1}{p_r}) = \Sigma\frac{1}{p_i} - \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{p_i^{\,2}} + \frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{p_i^{\,3}}\ldots$$

les sommations se faisant de i = 1 à i = r. On sait que $\Sigma\frac{1}{p_i} \to \infty$ avec r tandis que les autres sommes, en ordre décroissant, convergent. Donc $U(p!) \to \infty$ avec p et par suite aussi U(k!) avec k, puisque U(k!) est croissant.

THEOREME 3. **La suite $U(A^k)$ est croissante et tend vers un nombre fini, quel que soit l'entier donné A.**

Si, décomposé en facteurs premiers, $A = a^{\alpha}\ b^{\beta}\ \ldots\ c^{\gamma}$, alors

$$\sigma(A^k) = \frac{(a^{\alpha k+1}-1)(b^{\beta k+1}-1)\ldots(c^{\gamma k+1}-1)}{(a-1)(b-1)\ldots(c-1)}$$

Donc

$$U(A^k) = \frac{(a-\frac{1}{a^{\alpha k}})\ (b-\frac{1}{b^{\beta k}})\ldots(c-\frac{1}{c^{\gamma k}})}{(a-1)(b-1)\ldots(c-1)}$$

croît et tend vers $\frac{ab\ \ldots\ c}{(a-1)(b-1)\ldots(c-1)}$.

Exemple : la suite $U(10^k)$ croît et tend vers $\frac{2.5}{1.4} = 2,5$.

THEOREME 4. **Pour tout nombre premier p, $U(p^k) < 2$ quel que soit k.**

Car $U(p^k)$ croît avec k et tend vers $\frac{p}{p-1} \leqslant 2$.

Exemple : la suite $U(2^k) = 2 - \frac{1}{2^k}$ croît et tend vers 2.

THEOREME 5. **Quel que soit l'entier donné k, si le nombre premier p croît, alors $U(p^k)$ décroît et tend vers 1.**

Car
$$U(p^k) = \frac{p^k + p^{k-1} + \ldots + p + 1}{p^k} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k}$$

II NOMBRES PARFAITS ET U_n ENTIERS

DEFINITION : On appelle **nombre parfait** un entier n égal à la somme de ses parties aliquotes, donc tel que $U_n = 2$.

Exemple : $6 = 1 + 2 + 3$ est un nombre parfait et $U_6 = \frac{1+2+3+6}{6} = 2$.

Euclide savait que tout entier de la forme $2^k(2^{k+1}-1)$ est parfait, si $2^{k+1}-1$ est un nombre premier et $k \geqslant 1$. Mais Euler montra :

THEOREME 6. **Les entiers d'Euclide sont les seuls nombres parfaits pairs.**

Voici, courte et élégante, la démonstration de cette proposition par Dickson [1] :
Soit $2^k q$ un nombre parfait, où q est impair et $k \geqslant 1$. Alors

$$U(2^k q) = \frac{(2^{k+1}-1)s}{2^k q} = 2$$

s étant la somme des diviseurs de q. On en tire

$$s = q + \frac{q}{2^{k+1}-1} .$$

Par suite $\frac{q}{2^{k+1}-1} = 1$ (car sinon les termes q, $\frac{q}{2^{k+1}-1}$, 1 figureraient dans la somme s), et alors q est premier, puisque $s = q + 1$.

Y a-t-il des nombres parfaits impairs ? Nul ne le sait. Cette question millénaire est une des plus énigmatiques qui soient. On a comparé sa difficulté à celle de la transcendance de π (avant la démonstration historique de Lindemann) ou celle du problème ouvert de Fermat. On sait que si un tel entier existait, **il aurait au moins 200 chiffres** [2] . Nous avons montré que **pour n impair U_n prend aussi souvent que l'on veut des valeurs aussi proches de 2 que l'on désire.**

Alors que $U_1 = 1$, $U_6 = 2$, $U_{120} = 3$, $U_{30240} = 4$, le plus petit n connu pour $U_n = 6$ dépasse 10^{28}. Quant aux 5 nombres n connus pour $U_n = 8$, ils sont immenses, le plus petit étant de l'ordre de 10^{140} [2] .

Descartes et Fermat, entre autres, cherchaient assidûment des valeurs de n qui rendent U_n entier. **A part 1 et 6, toutes les valeurs trouvées actuellement sont multiples de 4.** D'où notre supposition :

<u>CONJECTURE.</u> A part 1, aucun n impair ne rend U_n entier.

RÉSUMÉ

N'est-elle pas curieuse, cette suite rationnelle U_n, qui prend sporadiquement des valeurs entières, qui, sauf au début, oscille irrégulièrement - probablement entre 1 et 6 pour $n < 10^{17}$ * - et qui contient à la fois une suite $U(p_k)$ décroissante et tendant vers 1, une suite constante $U(E_k) = 2$, E_k étant le k-ième entier d'Euclide, des suites $U(A^k)$ croissantes tendant vers des nombres finis et deux suites $U(k!)$ et $U(p_1 p_2 \dots p_k)$ croissantes et tendant vers l'infini ?

Avec U_n on voit un exemple d'étude d'une suite instable.

* L'exemple extrême est sans doute

$$n = 2^{12}.3^{6}.5.7.11.13.17.19.23.29.31 \cong 0,998.10^{17}$$

avec $U_n \cong 5,999$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. Dickson, Amer. Math. Monthly, 18, 109 (1911).

[2] R. Guy, Unsolved problems in number theory, Vol. 1, pp 25-29, Springer, New York - Berlin (1981).