REPORTAGE AUX OLYMPIADES

G. GLAESER

C'est à Paris cette année, que se sont déroulées du 1er au 12 juillet les 24 ème Olympiades Internationales de Mathématiques.

J'y ai participé, à titre de coordinateur de la correction d'un des six problèmes proposés. Et c'est ainsi que j'ai baigné pendant quelques jours dans l'atmosphère jeune, studieuse, cosmopolite ... et malheureusement caniculaire qui caractérisait ces joutes intellectuelles.
J'en ai profité pour jouer le correspondant d'une prestigieuse publication, l'OUVERT, et j'ai été enquêter auprès de mes collègues et des candidats à propos des péripéties de la résolution de quelques problèmes posés.

Voici le problème n°4 :

Soit E l'ensemble réunion des trois côtés (sommets compris) d'un triangle équilatéral. Montrer que pour toute partition de E, ($E_1 \cup E_2 = E$ $\quad E_1 \cap E_2 = \Phi$) l'une au moins des deux classes contient les sommets d'un triangle rectangle.

Je demande aux lecteurs de le chercher, car je le commenterai dans le prochain numéro, et la solution prend plus de sel lorsqu'on y a travaillé soi-même.

Aujourd'hui je parlerai surtout du problème n°6 :

Soient a,b,c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$(1) \qquad a^2b\,(a-b) + b^2c\,(b-c) + c^2a\,(c-a) \geqslant 0$$

<u>IL Y A UN TRUC !</u>

Lorsqu'on m'a montré cet énoncé (je n'ai pas participé à sa sélection), je ne suis pas parvenu à le résoudre. Et en lisant la solution proposée par les organisateurs, j'ai trouvé que c'était "injuste". En effet, la démonstration s'appuyait sur un "truc" que les candidats pouvaient connaître ou ignorer.

La difficulté de la question provient de ce que l'inégalité (1) est **conditionnelle.** Il s'agit de la démontrer, non pour un triplet (a,b,c) quelconque, mais pour un triplet soumis aux inégalités du triangle

(2) $0 \leqslant a \leqslant b + c \qquad 0 \leqslant b \leqslant c + a \qquad 0 \leqslant c \leqslant a + b$

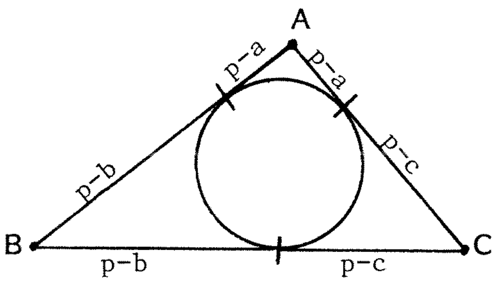
Le "truc" consiste à faire le changement de variable (3) ci-dessous, pour se ramener à une inégalité inconditionnelle.

Lemme Une condition nécessaire et suffisante pour que $a,b,c,$soient mesures des côtés d'un triangle est qu'il existe trois réels positifs x,y,z tels que :

$$(3) \qquad \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$$

C'est suffisant, puisqu'évidemment (3)   (2)

C'est nécessaire comme le montre la figure bien connue :



où p désigne le demi-périmètre du triangle.

Il suffit de poser $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, pour satisfaire à (3).

Dans ces conditions, un nombre non négligeable de candidats qui avaient déjà utilisé ce "truc" effectua le changement de variable (3). Il y avait alors plusieurs façons de conclure, en utilisant convenablement l'inégalité de Cauchy-Schwartz, par exemple.

D' autres solutions correctes furent obtenues, sans utilisation de ce truc, en constatant que l'inégalité (1) n'est pas symétrique (bien qu'invariante par permutation circulaire). On pouvait donc

distinguer les deux cas $a \geqslant b \geqslant c$ et $a \geqslant c \geqslant b$.
L'une des deux est plus facile que l'autre, car elle ne requiert même pas l'utilisation de (2).

Cependant le jury a décerné un prix spécial à deux candidats qui ont fournit une solution très courte, et très brillante, sans utilisation du truc. J'ai interviewé ces lauréats.

LES PRESTIDIGITATEURS

L'un deux Bernard LEEB (R.F.A.) m'a envoyé une lettre en me racontant comment il avait trouvé.

Ce jeune homme connaissait le "truc" précédent, et il l'a utilisé. En présence de l'inégalité inconditionnelle en x, y, z, il a procédé à diverses transformations algébriques simples, et est parvenu sans peine à la démonstration.

C'est alors qu'il a pensé que les transformations effectuées sur x, y, z, pouvaient se retraduire en a, b, c, grâce à :

$$(3\text{bis}) \qquad \begin{cases} 2x = b + c \\ 2y = c + a \\ 2z = a + b \end{cases}$$

Ainsi, après la version, il a fait un thème. Et dégageant sa solution de toutes les scories d'un aller-retour inutile, il a produit sur sa copie la solution de quelques lignes que devait trouver aussi l'autre lauréat.

Le jury s'est frotté les yeux en voyant cette solution tomber du ciel !

Le récit du lauréat Schmutzler (R.D.A) m'a fait comprendre comment on peut résoudre ce problème en un quart d'heure (avec encore quelques minutes pour vérifier et pour rédiger) sans faire de changement de variables.

Voici ce remarquable cheminement de pensée.
Le polynôme $P(a,b,c) = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$ est homogène du quatrième degré. Malheureusement, en contemplant (1), on ne voit pas immédiatement pourquoi P est positif, sous les conditions (2).

Le candidat cherche donc à inventer un polynôme Q tel que $P(a,b,c) \equiv Q(a,b,c)$ sous une forme où la réponse crève les yeux.

Il songe alors, (et c'est tout à fait raisonnable) à des termes tels que $(a + b - c)(a + c - b) \cdot$ (un carré parfait) qu'il reproduira par permutation circulaire.

Comme P s'annule pour $a = b = c$, il est naturel de songer à l'un ou l'autre des termes suivants $(a+b-c)\ (a+c-b)\ (c-a)^2$ ou $(a+b-c)\ (a+c-b)(b-a)^2$ Schmutzler a eu de la chance : le premier terme essayé était le bon (sinon, il aurait encore perdu quelques minutes pour essayer l'autre).

Voici sa solution, courte mais bonne (identique à celle de B. Leeb).

On a l'identité suivante, immédiate à vérifier :

$$2\ \left[a^2b\,(a-b) + b^2c\,(b-c) + c^2a\,(c-a)\right] =$$

$$(a+b-c)\,(a+c-b)\,(c-a)^2 + (b+c-a)\,(b+a-c)(a-b)^2 + (c+a-b)(c+b-a)(b-c)^2$$

On constate que le second membre est positif, dès que les inégalités du triangle (2) sont vérifiées.

On remarquera que les solutions des deux lauréats, ne sont identiques qu'en apparence. D'ailleurs, on s'est d'abord demandé si des érudits n'avaient pas souvenir d'une identité analogue à celle qu'ils parachutaient ainsi dans leur solution elliptique. Non! Schmutzler a reconstitué celà sans effort apparent. Elémentaire, Mr Watson.