LE TETRAKAIDECAEDRE EN CLASSE DE SECONDE

B. RIEHL

1) Construction du solide

Les élèves construisent, chez eux, le tétrakaïdécaèdre sachant que

1) il possède 6 faces carrées et 8 faces hexagonales,
2) une face carrée ne doit "toucher" aucune autre face carrée,
3) la longueur commune aux côtés des carrés et aux côtés des hexagones est de 5 cm.

La durée de cette réalisation a été de une à deux heures suivant les élèves.

2) Projections orthogonales

Propriétés utilisées pour ces constructions :

A,B,C,D sont 4 points de l'espace,

A',B',C',D' sont leurs projections orthogonales respectives sur le plan P,

si AB | |P alors A'B' = AB,

si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$,

si AB $\perp$ P alors A' = B'.

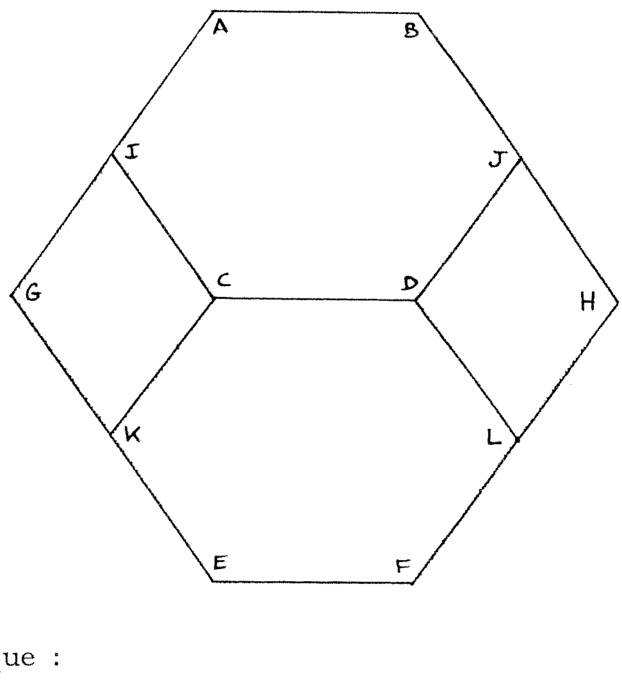


Fig 1
Tétrakaïdécaèdre posé sur une face carrée et vu de face

Les propriétés permettent d'établir que :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$; AB = CD = EF = 5 cm,

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$; IJ = KL = 10 cm,

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IG}$,

GH = 15 cm.

Pour la distance AE, dont vous verrons plus loin qu'elle est 10 $\sqrt{2}$ cm, les élèves prennent la moyenne des mesures effectuées sur les solides qu'ils ont construits.

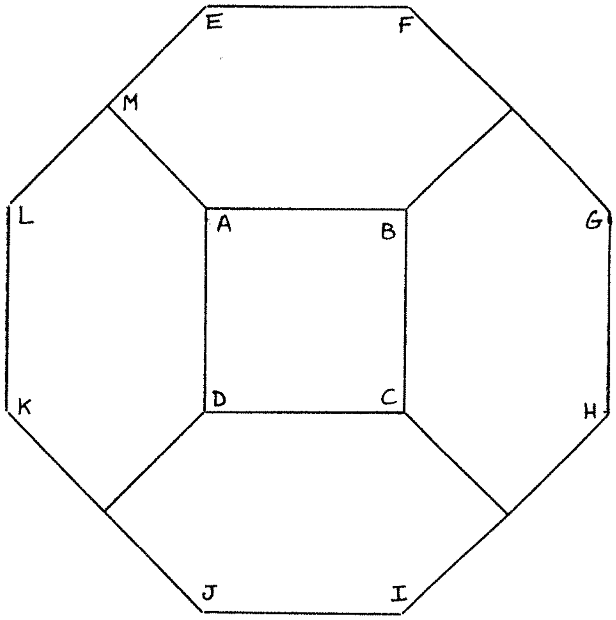


Fig 2

Tétrakaïdécaèdre posé sur une face carrée et vu de dessus

ABCD, ABFE, BCHG , CDJI, DALK sont des carrés de côté 5 cm, M est le milieu de LE.

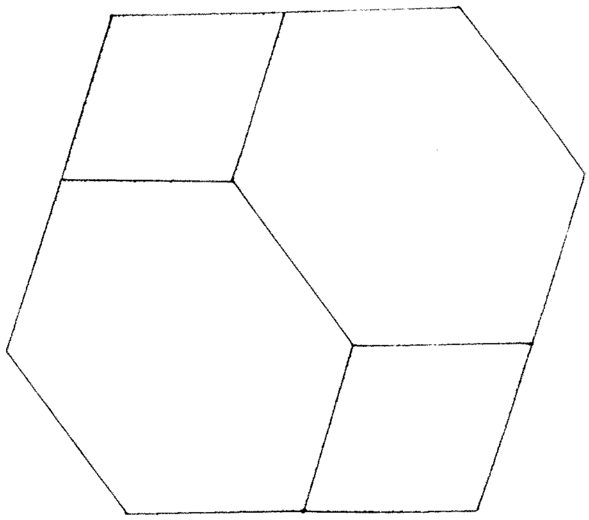


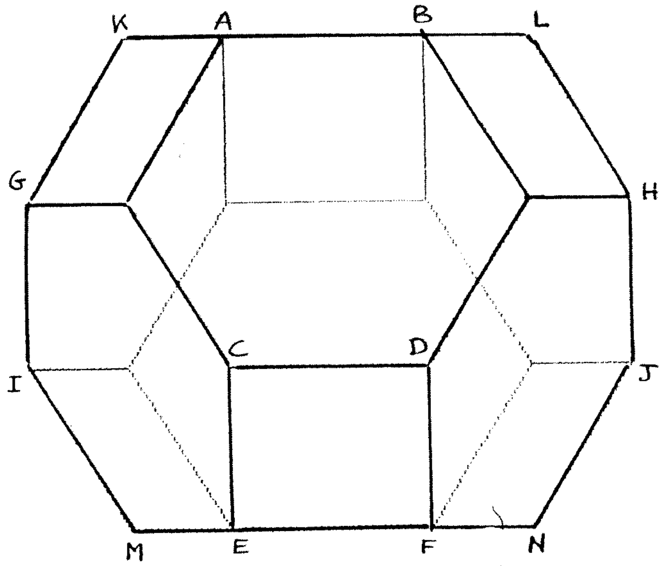
Fig 3

Tétrakaïdécaèdre posé sur une face hexagonale

Construction très facile à l'aide de la figure 1, mais seulement 20 % des élèves ont vu, sans aide extérieure, le rapport entre la figure 3 et la figure 1.

Fig 4

Tétrakaïdécaèdre posé sur une face hexagonale

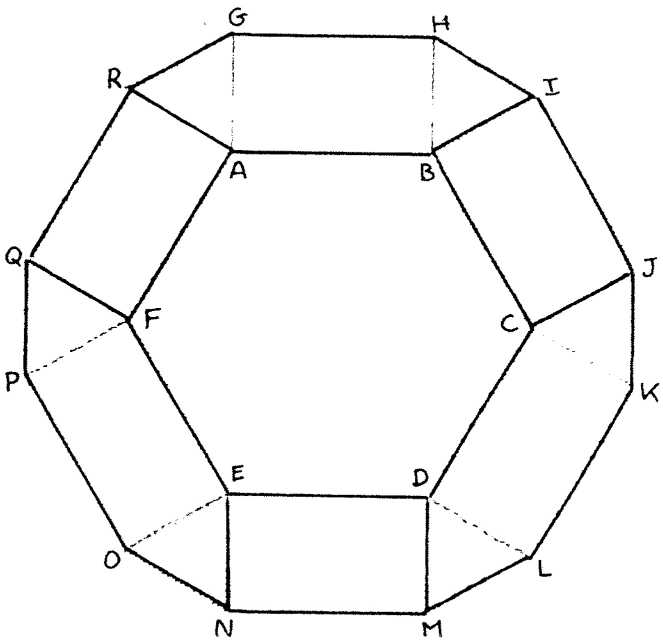


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$; AB = CD = EF = 5 cm,
$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ}$; GH = IJ = 15 cm,
KL = MN = 10 cm ; KA = BL = ME = FN = 2,5 cm,
KM = 12 cm.

Dans ce dessin intervient pour la première fois le problème des arêtes cachées.

Fig 5

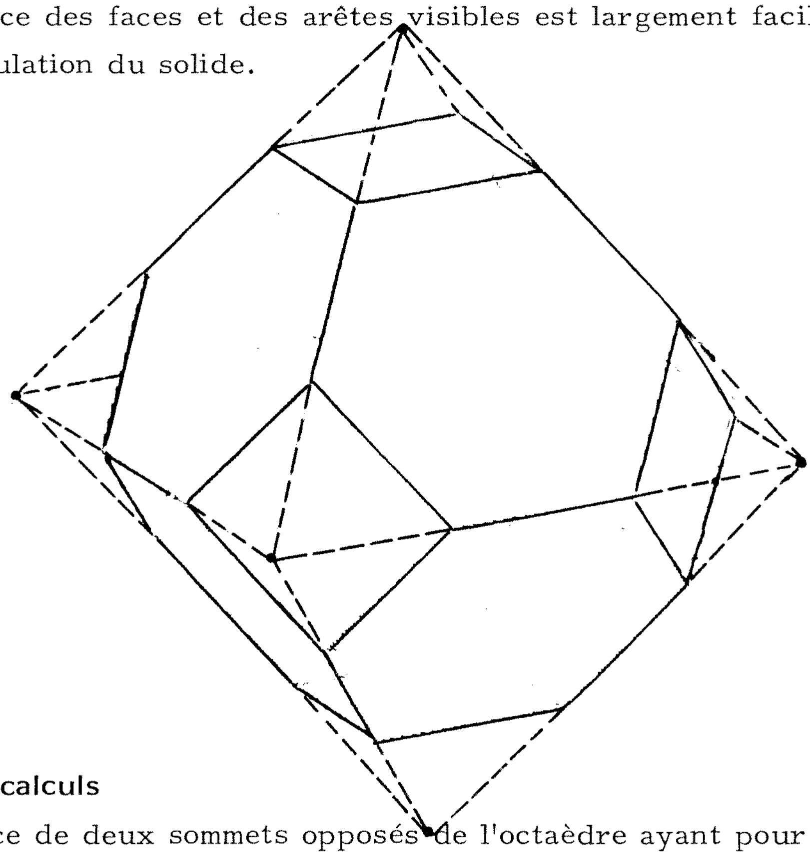
Tétrakaïdécaèdre posé sur une face hexagonale et vu de dessus



AB = BC = CD = DE = EF = FA = GH = IJ = KL = MN = OP = QR = 5 cm,
GL = 15 cm ; ... RI = 10 cm ; ...

3) Perspective cavalière

Il est temps maintenant de révéler que le tétrakaïdécaèdre n'est autre que l'**OCTAEDRE TRONQUE.** Il s'agit donc d'abord de dessiner l'octaèdre puis de diviser chaque arête en trois segments de même longueur. La reconnaissance des faces et des arêtes visibles est largement facilitée par la manipulation du solide.



4) Quelques calculs

1) La distance de deux sommets opposés de l'octaèdre ayant pour arête 15 cm est $15\sqrt{2}$ cm.
   Donc la distance de deux faces carrées parallèles de l'octaèdre tronqué ayant pour arête 5 cm est $10\sqrt{2}$ cm.
2) Avec une arête de 5 cm,
   l'aire de l'octaèdre tronqué est $(300\sqrt{3} + 150)$ cm^2
   le volume de l'octaèdre tronqué est $1000\sqrt{2}$ cm^3
3) L'octaèdre tronqué permet de **paver l'espace.**
   De plus, parmi les polyèdres réguliers ou semi-réguliers permettant de paver l'espace, l'octaèdre tronqué est celui dont **le rapport surface/volume est le plus faible.**
   Avec une arête de 5 cm, ce rapport est environ 0,4735.
   A titre de comparaison,
   pour un cube de même volume ce rapport est environ 0,5346,
   pour une sphère de même volume ce rapport est environ 0,4309. (*)

N.B. : Les figures construites par l'ordinateur ont été réalisées à l'aide d'un programme conçu par B. Altschuh.

(*) Note de l'OUVERT :

1) Le rapport surface/volume a la dimension de l'inverse d'une longueur et se prête mal à la mesure de l'économie de matière nécessaire à la construction d'une cellule. On utilise en général le rapport $\psi = \frac{S^3}{V^2}$ *qui est sans dimension.*

On obtient alors :

ψ *(cube)* $= 6^3$

ψ *(prisme hexagonal)* $= 6^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

ψ *(nid d'abeille)* $= 6^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

ψ *(tétrakaïdécaèdre)* $= 6^3 \cdot \frac{37 + 30\sqrt{3}}{128} \cong 6^3 \cdot 0,695$

ψ *(sphère)* $= 3^3$.

2) Que l'octaèdre tronqué réalise le miminum indiqué dépend sans doute de la définition que l'on adopte pour les polyèdres semi-réguliers.

On conjecture cependant qu'une version déformée de ce solide nommée "tétrakaïdécaèdre de Lord Kelvin", à faces gauches, réalise le minimum du rapport ψ *dans la famille des pavages à symétrie cubique.*

Consulter à ce sujet "Pavés et Bulles" de Françoise PECAUT, brochure APMEP n° 23.