SUITES A TOUT FAIRE

B. BOOG

Les suites arithmétiques sont des fonctions affines ; les suites géométriques des fonctions exponentielles. Inversant le parallèle, à quelles suites peuvent bien correspondre les polynômes de degré $\geqslant 2$? Suites polynômiales pourrait-on dire, en les voyant déjà sous la forme :

$$n \mapsto a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k .$$

Diverses raisons font que la base canonique des polynômes se prête mal à l'étude et l'utilisation de ces suites. Les coefficients binômiaux sont bien mieux adaptés. Ce point de vue de généralisation des suites arithmétiques est développé dans l'article qui suit. Notre collègue Bernard BOOG est parti "d'une idée découverte dans un lexique allemand du siècle dernier (Meyer's Lexikon, Arithmetische Reihen, Polygonalzehlen und Polyedralzahlen)".

L'OUVERT

1. Définition

On appelle suite arithmétique généralisée de base (ou de pivot) $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \lambda)$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \lambda$ sont p nombres (réels par exemple) donnés, de raison d et d'ordre p, la suite :

$$n \geqslant 1 \; ; \; u_n = \alpha + C_{n-1}^1 \beta + C_{n-1}^2 \gamma + C_{n-1}^3 \delta + \dots + C_{n-1}^{p-1} \lambda + C_{n-1}^p d$$

en convenant que $C_x^y = 0$ si $y > x$.

Exemples

. p = 0 : suite constante, $u_n = \alpha$

. p = 1 : suite arithmétique : $u_n = \alpha + C_{n-1}^1 d = \alpha + (n-1)d$

. p = 2 : suite d'ordre 2 : $u_n = \alpha + C_{n-1}^1 \beta + C_{n-1}^2 d$

soit : $u_n = \alpha + (n-1)\beta + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} d$

si $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $d = 2$, on obtient les termes :

1, 4, 9, 16, 25, 36,...

. p = 3 : suite d'ordre 3, $u_n = \alpha + C_{n-1}^1 \beta + C_{n-1}^2 \psi + C_{n-1}^3 d$

si $\alpha = 1$, $\beta = 7$, $\gamma = 12$, $d = 6$, on obtient :

1, 8, 27, 64, 125,...

2. Une propriété caractéristique

Les suites d'ordre p forment un sous-espace de dimension p + 1 de l'espace des suites numériques. En d'autres termes :

Toute suite d'ordre p est déterminée par la donnée de p nombres (α, β, γ, ..., λ) et de raison d.

Inversement, la donnée de (p+1) nombres A,B,C,...,L détermine une suite d'ordre p ; en effet, α, β, ..., λ, d sont solutions du système :

$$\begin{aligned}
u_1 &= A = \alpha \\
u_2 &= B = \alpha + \beta \\
u_3 &= C = \alpha + C_2^1 \beta + C_2^2 \gamma \\
&\dots\dots\dots \\
u_p &= \quad = \alpha + C_{p-1}^1 \beta + \dots\dots\dots + C_{p-1}^{p-1} \lambda \\
u_{p+1} &= L = \alpha + C_p^1 \beta + \dots\dots\dots + C_p^{p-1} \lambda + C_p^p d
\end{aligned}$$

Or ce système est triangulaire et de déterminant 1.

Du même coup, on a prouvé que les fonctions polynômiales

$n \longmapsto C_{n-1}^0 = 1$; $n \longmapsto C_{n-1}^1$; ..... ; $n \longmapsto C_{n-1}^p$ sont indépendantes.

Elles forment une base de l'espace des suites d'ordre p.

3. Quelques conséquences

1. Toute suite finie de k termes (géométrique par exemple) fournit les k premiers termes d'une suite arithmétique d'ordre k-1.
2. A partir d'une suite d'ordre p, on peut former p suites arithmétiques d'ordre (p-1), (p-2),... 2, 1, 0 en formant la suite des différences des termes consécutifs de la suite donnée puis en itérant ce procédé.

   Exemple : $p = 5$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 4$, $d = 5$

suite initiale :	1	2	5	13	33	81	187
suite d'ordre 4	1	3	8	20	48	106	
suite d'ordre 3	2	5	12	28	58		
suite d'ordre 2	3	7	16	30			
suite d'ordre 1	4	9	14				
suite d'ordre 0	5	5					

En effet, soient u_n et u_{n+1}, 2 termes consécutifs de la suite d'ordre p, alors :

$$u_{n+1} - u_n = \beta + C_{n-1}^1 \gamma + \dots + C_{n-1}^{p-2} \lambda + C_{n-1}^{p-1} d = V_n$$

et V_n est le terme général d'une suite d'ordre (p-1).

De même $V_{n+1} - V_n = W_n$ est le terme général d'une suite d'ordre (p-2),...

3. Toute suite d'ordre p permet de construire une suite d'ordre (p+1) par le seul choix du 1er terme.

4. Les termes consécutifs d'une suite d'ordre p sont liés entre eux par les relations :

si p = 1 $\quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$

si p = 2 $\quad u_{n-1} - 3u_n + 3u_{n+1} - u_{n+2} = 0$

si p = 3 $\quad u_{n-1} - 4u_n + 6u_{n+1} - 4u_{n+2} + u_{n+3} = 0$

.....

à l'ordre p $\quad u_{n-1} - C^1_{p+1}u_n + C^2_{p+1}u_{n+1} - C^3_{p+1}u_{n+2} + \dots +(-1)^k C^k_{p+1}u_{n+k-1}=0$

4. Formule sommatoire des termes d'une suite d'ordre p

La somme des k premiers termes d'une suite définie comme dans le § 1 se calcule ainsi :

$$S = C^1_k\,\alpha + C^2_k\,\beta + C^3_k\,\psi + C^4_k\,\delta + \dots + C^p_k\,\lambda + C^{p+1}_k\,d.$$

En effet, il est aisé de montrer que $\underbrace{C^p_p + C^p_{p+1} + \dots + C^p_{j-1}}_{j-p \text{ termes}} = C^{p+1}_j$ si $j \geqslant p+1$

5. Applications des sommes de puissance aux "filets" de points

1) SUITE DES PUISSANCES ENTIERES DES ENTIERS NATURELS

Ces suites s'obtiennent comme suites arithmétiques généralisées :

Suite des carrés des entiers : $n^2 = 1 + 3C^1_{n-1} + 2C^2_{n-1}$

Suite des cubes : $n^3 = 1 + 7C^1_{n-1} + 12C^2_{n-1} + 6C^4_{n-1}$

Suite des puissances quatrièmes : $n^4 = 1 + 15C^1_{n-1} + 50C^2_{n-1} + 60C^3_{n-1} + 24C^4_{n-1}$

et, de façon générale : la suite des puissances $p^{\text{ième}}$ ($p \in \mathbb{N}$) des entiers naturels forme une suite arithmétique d'ordre p.

En effet, les p+1 fonctions :

$$n \mapsto C^0_{n-1}\ ;\ n \mapsto C^1_{n-1}\ ;\ \dots\dots\ ;\ n \mapsto C^p_{n-1}$$

sont indépendantes, et de degré $\leqslant$ p. Elles forment donc une base de l'espace des fonctions polynômiales de degré $\leqslant$ p, qui est bien de dimension p+1. Ce qui assure l'existence et l'unicité de a_o, a_1, ..., a_p, d tels que :

$$n^p = a_o + a_1\,C^1_{n-1} + a_2\,C^2_{n-2} + \dots + a_{p-1}\,C^{p-1}_{n-1} + C^p_{n-1}d\,.$$

Pour n = 1 et n = 2, on obtient en particulier : $a_0 = 1$ et $a_1 = 2^p-1$.

En cherchant le terme en n^p dans le deuxième membre, on a : d = p!

Pratiquement, il est plus aisé d'écrire dans l'ordre les puissances $p^{\text{ième}}$ des $(p+1)$ premiers entiers et de construire les suites des différences des termes consécutifs jusqu'à l'ordre 0.

Ainsi pour $p = 4$, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 \\
& 15 & & 65 & & 175 & & 369 & \\
& & 50 & & 110 & & 194 & & \\
& & & 60 & & 84 & & & \\
& & & & 24 & & & &
\end{array}$$

Les premiers termes des suites obtenues déterminent les paramètres de la base et la raison d. de la suite cherchée (propriété générale).

La formule sommatoire des termes d'une suite d'ordre p permet d'obtenir les formules donnant la somme des carrés, des cubes des k premiers entiers :

$$\sum_{n=1}^{n=k} n^2 = C_k^1 + 3C_k^2 + 2C_k^3 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n=k} n^3 = C_k^1 + 7C_k^2 + 12C_k^3 + 6C_k^4 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

de même on obtient :

$$\sum_{n=1}^{n=k} n^4 = \frac{k}{30}\ (k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)$$

2) PROBLEMES DE DENOMBREMENT

1) Construction d'un "filet" de points dans le plan

On considère dans le plan affine euclidien un triangle équilatéral (A,B,C) de côté 1.

L'homothétie $\mathcal{H}_k(A,k)$, $k \in \mathbb{N}$, transforme ce triangle en un triangle (A,B_k,C_k), réduit au point A pour $k = 0$ et coïncidant avec (A,B,C) pour $k = 1$.

Pour $k \geqslant 2$, on détermine sur $[B_kC_k]$ les points $I_{(k,i)}$ où $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, formant avec B_k et C_k une subdivision régulière de pas égal à 1.

On forme ainsi un "filet" de points, quand k varie dans $\mathbb{N}$, dont le cardinal est le terme général d'une suite arithmétique d'ordre 2 défini par

$u_n = 1 + 2C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2$ où $n = k+1$.

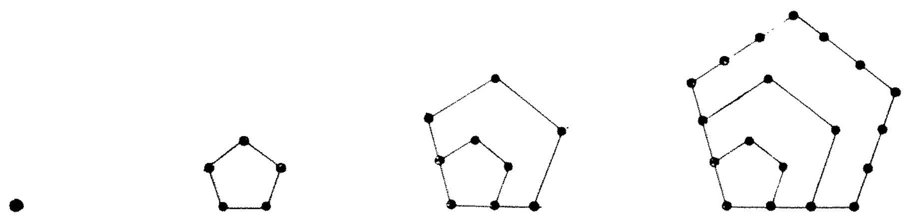
En effet, chaque nouvelle construction introduit (k+1) nouveaux points (pour $k = 0$, on obtient A, pour $k = 1$ les points B et C).
La suite des différences formées à partir de (u_n) est donc la suite des entiers naturels d'où le résultat.

nombres triangulaires

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$u_1 = 1$	$u_2 = 3$	$u_3 = 6$	$u_4 = 10$

De façon générale, le procédé précédent permet, à partir d'un polygone convexe régulier de sommets $A, A_1, A_2, \ldots, Aq$, de construire un "filet" de points dont le cardinal est le terme général d'une suite arithmétique d'ordre 2 définie par $u_n = 1 + qC^1_{n-1} + (q-1)C^2_{n-1}$.
En effet, chaque nouvelle construction introduit $(q-1)k + 1$ nouveaux points (pour $k=1$, le polygone).
La suite des différences formées à partir de (u_n) est la suite des cardinaux des nouvelles pièces du "filet". Elle est définie par $v_n = (q-1)n + 2-q$ (ici $n = k+1$), la suite d'ordre 0 est la suite constante $\omega_n = q-1$.
<u>Exemple</u> : $q = 4$, pentagone régulier convexe ; $u_n = 1 + 4C^1_{o-1} = 3C^2_{n-1}$

nombres pentagonaux



$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$u_1 = 1$	$u_2 = 5$	$u_3 = 12$	$u_4 = 22$

En considérant un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre A de rayon 1, on peut construire, par le même procédé un réseau régulier de points équidistants dont le cardinal est le terme général de la suite d'ordre 2 définie par $u_n = 1 + 6C^1_{n-1} + 6C^2_{n-1}$.

2) Construction d'un "filet" de points dans l'espace

On considère dans l'espace affine euclidien de dimension 3 un polyèdre régulier d'arête égale à 1.

En fixant un sommet A de ce polyèdre et un entier $k \neq 0$, l'homothétie $\mathcal{H}_k(A,k)$ transforme ce polyèdre en un polyèdre semblable si $k \geqslant 2$ et en lui-même pour $k = 1$.

En appliquant le procédé précédent à ces polyèdres, on détermine un réseau de points dont le cardinal est alors le terme général d'une suite arithmétique d'ordre 3.

Ainsi pour

le tétraèdre : $u_n = 1 + 3C_{n-1}^1 + 3C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$

l'hexaèdre : $u_n = 1 + 7C_{n-1}^1 + 12C_{n-1}^2 + 6C_{n-1}^3$

l'octaèdre : $u_n = 1 + 5C_{n-1}^1 + 8C_{n-1}^2 + 4C_{n-1}^3$

le dodécaèdre : $u_n = 1 + 19C_{n-1}^1 + 45C_{n-1}^2 + 27C_{n-1}^3$

l'icosaèdre : $u_n = 1 + 11C_{n-1}^1 + 25C_{n-1}^2 + 15C_{n-1}^3$

Faisons le raisonnement dans le cas du dodécaèdre.

Le dodécaèdre est un polyèdre régulier ayant 20 sommets, 30 arêtes, 12 faces qui sont des pentagones réguliers. De chaque sommet sont issues 3 arêtes.

Soit (D_k), $k \geqslant 2$, l'image du dodécaèdre (D_1) donné par $\mathcal{H}_k(A,k)$, où A est un sommet fixe de (D_1). L'ensemble de ces dodécaèdres ont en commun, le sommet A, seul sommet commun, les plans des 3 faces qui se coupent en A et les 3 droites supports des arêtes contenant A, intersections 2 à 2 de ces plans. Soit (P) un des plancs communs.

Dans le plan (P) on obtient alors un "filet" de points déterminé à partir du pentagone, face de (D_1) dans (P) et identique à celui défini dans l'exemple précédent. Le pentagone de (D_k) dans le plan (P) contient de ce fait à son intérieur $u_{n-1} - [2(n-1)-1]$ points, soit :

$$1 + 4C_{n-2}^1 + 3C_{n-2}^2 - (2n-3) = \frac{(n-2)(3n-5)}{2} \text{ points.}$$

Déterminant dans chaque face de (D_k) un "filet" de points identiques, et partageant chaque arête de (D_k) au moyen de (n-2) points, formant avec les extrémités de l'arête, une subdivison régulière de module 1, la construction de (D_k) introduit $(k = n-1)$:

$$v_{n-1} = 19 + 27(n-2) + \frac{9(n-2)(3n-5)}{2}$$

nouveaux points ; les points communs à (D_k) et (D_{k-1}), situés dans les plans (P) n'étant pas pris en compte. La suite (v_n) ainsi définie, est la suite des différences formée à partir de (u_n) où u_n représente le nombre de points de (D_k).

On obtient donc la suite (u_n) :

$$1,\ 20,\ 84,\ 220,\ 455,\ 816,\ 816+v_6,\ u_7+v_7,\ \ldots$$

La suite (u_n) est donc déterminée par les premiers termes des suites obtenues à partir des différences des termes consécutifs jusqu'à l'ordre 0, il en résulte :

$$u_n = 1 + 19C^1_{n-1} + 45C^2_{n-1} + 27C^3_{n-1}.$$

Notons que les suites des différences des termes consécutifs sont définies par :

$$v_n = 19 + 27(n-1) + \frac{9(n-1)(3n-2)}{2},\ n \geqslant 1$$

$$w_n = 27 + 9(3n-4)\ ,\ n \geqslant 2$$

$$t_n = 27\ \forall\, n \geqslant 3.$$

Elles déterminent les éléments de la base et la raison d = 27.

<u>*Note de l'Ouvert*</u>

La raison pour laquelle les coefficients binômiaux se prêtent mieux à l'étude de ces suites arithmétiques généralisées et des suites obtenues par différence, apparaît plus clairement sous un éclairage d'Algèbre linéaire :

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$, de degré $\leqslant n$ et Δ l'opérateur différence ainsi défini :

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x).$$

Comme $d^\circ \Delta P \leqslant n-1$, $d^\circ \Delta^2 P \leqslant n-2 \ldots$ on constate que $d^\circ \Delta^n P = 0$ et donc que $\Delta^{n+1} = 0$. Autrement dit, Δ est nilpotent d'ordre n+1. On sait qu'il existe alors une base de E où la matrice de Δ est un bloc de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Cette base est précisément constituée des coefficients binômiaux C^k_n $(0 \leqslant k \leqslant n)$ où l'on substitue X à n. En effet, soit :

$$C_k(X) = X(X-1)\ldots(X-k+1)/k!$$

L'identité de Pascal $(C^k_{n+1} = C^k_n + C^{k-1}_n)$ s'écrit alors : $\Delta C_k = C_{k-1}$ ce qui définit la matrice de Δ dans la base des polynômes C_k.

On peut consulter à ce sujet l'article de J. SAMSON et R. SEROUL dans l'Ouvert n° 30.