UN NOUVEAU MANUEL RÉVÉLÉ PAR L'OUVERT !

Les nouveaux programmes reviennent - enfin ! - à une conception plus raisonnable des notions mathématiques fondamentales.
Notons à ce propos que si les modes passent, les valeurs sûres (nombre, valeur absolue, fonction, limite, continuité, trigonométrie, etc...) restent.
Un important éditeur parisien, que nous désignerons par le sigle A.C. pour respecter son désir momentané d'anonymat, nous a fait parvenir les épreuves typographiques d'extraits du manuel qu'il compte prochainement mettre sur le marché.
L'OUVERT, qui ne sert à cette occasion d'autres intérêts que ceux de la Science, tient à faire profiter ses lecteurs de cette avant-première.

Les limites apprivoisées

Sur ce sujet tant controversé, les auteurs du manuel de A.C. ne mâchent pas leurs mots :

109. Définitions. — I. On dit qu'une fonction y, de la variable x, a pour *limite* b, lorsque x *tend* vers a, si, à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$| x - a | < \alpha \quad ,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$| y - b | < \varepsilon,$$

sauf, peut-être, pour $x = a$.

Exemples. — D'après cette définition, on dit que y a pour limite *zéro*, quand x tend vers a, si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif α tel que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$| y | < \varepsilon.$$

Ainsi, toute puissance positive de x a pour limite zéro, quand x tend vers zéro; ce qu'on exprime plus brièvement en disant que *toute puissance positive de* x *tend vers zéro en même temps que* x.

Soit, en effet, x^n une puissance positive de x ($n > 0$); si on a

$$|x| < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

on aura, évidemment,

$$|x^n| < \varepsilon.$$

Le nombre α est donc, ici, égal à $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. — La définition précédente n'est, au fond, qu'une façon d'exprimer, sous une forme *précise*, le fait suivant : on peut donner à la variable x des valeurs assez voisines de la valeur a pour que les valeurs correspondantes de y diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra de la valeur b (puisqu'on peut choisir ε aussi petit qu'on le voudra).

Lorsqu'une quantité y a pour limite b, elle finit par être supérieure à tout nombre fixe inférieur à b et par être inférieure à tout nombre fixe supérieur à b ; car elle finit par être comprise entre $b + \varepsilon$ et $b - \varepsilon$, ε pouvant être aussi petit qu'on le veut.

II. On dit qu'une fonction y, de la variable x, *croît indéfiniment*, quand x *tend* vers a, si, à tout nombre positif A (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x - a| < \alpha,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y| > A,$$

sauf, peut-être, pour $x = a$.

Lorsqu'une quantité y croît indéfiniment, son inverse $\frac{1}{y}$ tend vers zéro et *vice versa*.

Exemple. — *Toute puissance négative de* x *croît indéfiniment quand* x *tend vers zéro.*

Soit x^{-n} une puissance négative de x ($n > 0$).

Si on a

$$|x| < \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}},$$

on aura

$$|x^n| < \frac{1}{A}$$

et, par suite (n° 22, *Th. III*),

$$|x^{-n}| > A.$$

Le nombre α, qui correspond à A, est donc, ici, $A^{-\frac{1}{n}}$.

Remarque. — La définition précédente exprime, sous une forme précise, le fait suivant : en donnant à x des valeurs suffisamment voisines de a, les valeurs absolues des valeurs correspondantes de y deviennent aussi grandes qu'on le voudra, c'est-à-dire, surpassent tout nombre positif A choisi à l'avance.

Lorsqu'une quantité y croît indéfiniment, elle peut le faire de deux façons : soit en étant *positive* et on dit, alors, qu'elle *croît indéfiniment par valeurs positives* ; soit en étant négative et on dit, alors, qu'elle *croît indéfiniment par valeurs négatives*.

III. On dit que la fonction y, de la variable x, a pour *limite* b, quand x *croît indéfiniment*, lorsqu'à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra) on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x| > A,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y - b| < \varepsilon.$$

EXEMPLE. — *Lorsque x croît indéfiniment, une puissance négative quelconque de x tend vers zéro.*

Soit x^{-n} $(n > 0)$ une puissance négative de x.

Pour que l'on ait

$$|x^{-n}| < \varepsilon,$$

il suffit que l'on ait

$$|x| > \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}.$$

Le nombre A, qui correspond à ε, est donc $\varepsilon^{-\frac{1}{n}}$.

Remarque. — Au fond, la définition précédente exprime que l'on peut donner à x des valeurs suffisamment grandes en valeur absolue pour que y diffère de b d'aussi peu qu'on le voudra.

IV. On dit que la fonction y, de la variable x, *croît indéfiniment, en même temps que* x, lorsqu'à tout nombre positif P, donné à l'avance (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x| > A,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y| > P.$$

EXEMPLE. — *Toute puissance positive de x croît indéfiniment, en même temps que x.*

Soit, en effet, x^n une puissance positive de x ; si on a

$$|x| > P^{\frac{1}{n}}.$$

on aura :

$$|x^n| > P.$$

Le nombre A, qui correspond au nombre P, est donc, ici, $P^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. — Cette dernière définition exprime, sous une forme rigoureuse, le fait suivant : on peut donner à x des valeurs assez grandes pour que y prenne des valeurs aussi grandes qu'on le voudra, en valeur absolue.

Pour désigner les signes de x et y, lorsqu'ils croissent indéfiniment, on emploie, comme nous l'avons déjà indiqué, les signes abréviatifs $-\infty$ et $+\infty$ (nº 64). Ainsi, pour dire que, lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives, y croît indéfiniment par valeurs négatives on dit, d'une façon abrégée, que, pour $x = +\infty$, on a $y = -\infty$. Mais il faut bien se garder de donner à ces signes $+\infty$ et $-\infty$ d'autre signification que celle que nous venons de leur donner. Ces signes ne représentent *aucune grandeur numérique*, car il n'y a pas de nombre plus grand ou plus petit que tous les autres.

110. Théorème. — *Lorsque deux fonctions, d'une même variable* x, *sont égales pour toutes les valeurs de* x, *sauf peut être pour la valeur*

$x = a$, *si l'une d'elles a une limite, quand* x *tend vers* a, *l'autre en a une qui est la même.*

Soient, en effet, deux fonctions y et z, de x, égales pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour $x = a$.

Dire que y a pour limite b, quand x tend vers a, c'est, par définition, dire qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre α tel que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha$$

entraine l'inégalité

$$| y - b | < \varepsilon,$$

sauf peut-être pour $x = a$. Or, comme on a toujours

$$z = y,$$

sauf peut-être pour $x = a$, on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$| z - b | < \varepsilon$$

et, par suite, z a pour limite b.

Application. — Ce théorème important nous permet de préciser la notion de la *vraie valeur* d'une fraction *indéterminée*, notion que nous avions déjà indiquée (n° 53).

Lorsqu'une fraction se présente sous une forme indéterminée, pour $x = a$, on appelle *vraie valeur* de cette fraction *la limite vers laquelle elle tend*, lorsque x tend vers a (si cette limite existe).

Cette nouvelle définition de la vraie valeur paraît, au premier abord, différer de celle que nous avions donnée plus haut (n° 53); mais le théorème précédent montre que les deux définitions coïncident. En effet, si on peut trouver une seconde fraction qui soit égale à la fraction proposée pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = a$, et si cette seconde fraction a une limite, quand x tend vers a, il en sera de même de la première. Or, cette seconde fraction n'est plus indéterminée pour $x = a$, et, si elle est *continue* (Voir plus loin, n° 114), elle aura pour limite, lorsque x tend vers a, précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$. Cette valeur est donc bien, d'après notre nouvelle définition, la *vraie valeur* de la fraction proposée.

La continuité par les accroissements

114. Définition. — On dit qu'une fonction d'une variable x est *continue*, pour $x = a$, si :

1° Elle a une valeur bien déterminée pour $x = a$;

2° Elle a pour *limite*, lorsque x tend vers a, précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$.

Par exemple, la fonction $\sqrt{x}$ est une fonction continue de x, pour toute valeur *positive* a de x; car, pour $x = a$, elle a une valeur bien déterminée $\sqrt{a}$ et, lorsque x tend vers a, $\sqrt{x}$ a pour limite $\sqrt{a}$ (n° 111, *Th.* VI), qui est précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$.

Tous les théorèmes sur les limites, que nous avons établis au n° 111, ont leur correspondant dans les fonctions continues. Nous ferons seulement la démonstration pour le premier théorème, et nous nous contenterons d'énoncer les autres dont les démonstrations sont identiques.

(...)

115. Définitions. — Lorsqu'une quantité variable passe d'une valeur à une autre, on dit qu'elle a subi un *accroissement* égal à l'excès de la valeur finale sur la valeur initiale. Ainsi, si la variable x passe de la valeur a à la valeur a', on dit qu'elle a reçu *l'accroissement* $a'-a$. Soit h, l'accroissement, on aura, par définition,

$$a'-a=h$$

ou

$$a'=a+h.$$

La valeur finale est égale à la valeur initiale augmentée de l'accroissement.

Soit y une fonction de la variable x et soient b et b' les deux valeurs de y, lorsqu'on donne à x, respectivement, les valeurs a et a'. La variable x ayant reçu l'accroissement $a'-a$, la fonction y aura subi l'accroissement $b'-b$ qu'on appelle *l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement* $a'-a$ *de la variable.*

Remarquons, de suite, qu'un accroissement peut être positif ou négatif.

(...)

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de la variable* x *soit continue, pour* $x=a$, *est que, si on donne à la variable* x *un accroissement* h, *à partir de la valeur* a, *l'accroissement, correspondant,* k *de la fonction tende vers zéro en même temps que* h.

Cette proposition est une conséquence directe de la définition de la continuité (n° 114). En effet, soit b la valeur de la fonction y, pour $x=a$. Dire que la fonction est continue, c'est dire que y a pour limite b quand x tend vers a et, par conséquent, que $y-b$, c'est-à-dire k, tend vers zéro, quand $x-a$, c'est-à-dire h, tend vers zéro. D'ailleurs, réciproquement, si $k=y-b$ tend vers zéro en même temps que $h=x-a$, y a pour limite b quand x tend vers a et la fonction est *continue*.

L'énoncé de ce théorème peut donc servir de définition de la continuité, définition qui, au fond, ne diffère pas de celle que nous avons donnée en premier lieu.

Cette nouvelle manière d'envisager la continuité nous montre mieux comment une fonction continue se comporte. Puisque k tend vers zéro en même temps que h, on peut prendre h assez petit pour que k soit aussi petit qu'on le voudra, en valeur absolue. En d'autres termes, lorsqu'une fonction est continue, pour $x=a$, on peut faire varier x, à partir de a, assez peu pour que la fonction ait varié d'aussi peu qu'on le voudra. Une fonction continue varie donc par degrés insensibles et ne peut pas sauter brusquement d'une valeur à une autre.

Une fonction peut être *discontinue*, pour une certaine valeur de la variable, ou bien parce qu'elle n'a pas une valeur bien déterminée, pour cette valeur de la variable, ou bien parce que, pour cette valeur, elle passe brusquement d'une valeur à une autre.

EXEMPLES. — La fonction $\frac{1}{x}$ est continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Pour cette valeur elle est discontinue, car elle n'a pas une valeur bien déterminée. Quand x passe, en croissant, par la valeur zéro, $\frac{1}{x}$, d'abord infiniment grand et négatif, devient, ensuite, infiniment grand et positif; on dit que, quand x passe par la valeur zéro, $\frac{1}{x}$ passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, pour indiquer que $\frac{1}{x}$ est d'abord négatif et ensuite positif.

Voici encore un exemple intéressant de fonction présentant des discontinuités : Désignons par y la *partie entière* de x. y est évidemment une fonction de x, puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur pour y. Faisons croître x à partir de zéro. Quand x croît de 0 à 1, sa partie entière est 0, on a donc, sans cesse, $y = 0$; x continuant à croître de 1 à 2, sa partie entière est 1 et on a $y = 1$; quand x est compris entre 2 et 3, on a $y = 2$, etc...

On voit que quand x passe par la valeur 1, la valeur de y saute brusquement de 0 à 1; quand x passe par la valeur 2, la valeur de y saute de 1 à 2, etc... D'une manière générale, chaque fois que x passe par une valeur entière, y subit un accroissement brusque d'une unité. Cette fonction y est donc discontinue pour toute valeur *entière* de la variable x.

Des exercices signés par des auteurs réputés !

18. Vérifier les identités suivantes :

$$4\left[(ac' - ca')^2 - (bc' - cb')(ab' - ba')\right] \equiv (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c');$$

$$\begin{gathered}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 \equiv \\ (a\beta - b\alpha + c\delta - d\gamma)^2 + (a\gamma - c\alpha + d\beta - b\delta)^2 + (a\delta - d\alpha + b\gamma - c\beta)^2 \ ;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 \equiv \\ (a\beta - b\alpha)^2 + (c\delta - d\gamma)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (d\beta - b\delta)^2 + (a\delta - d\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2\end{gathered}$$

(LAGRANGE).

21. Démontrer que l'on a l'identité

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 + u^3$$

lorsqu'on prend, soit :

$$\begin{aligned}
x &= (f^2 + 3g^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
y &= -(f^2 + 3g^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
z &= -(f'^2 + 3g'^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f^2 + 3g^2),\\
u &= (f'^2 + 3g'^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f^2 + 3g^2)
\end{aligned}$$

(EULER).

soit encore :

$$\begin{aligned}
x &= (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,\\
y &= -(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b,\\
z &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,\\
u &= -(a^2 + 3b^2)(a - 3b) + 1.
\end{aligned}$$

(BINET).

25. Effectuer les produits

$$\begin{gathered}(1 + ax)(1 + a^2x) \\ (1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)\end{gathered}$$

plus généralement, effectuer le produit

$$(1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)\dots(1 + a^mx)$$

et ordonner ce produit suivant les puissances croissantes de x. Donner l'expression générale du coefficient de x^p dans ce développement. Que deviennent ces coefficients quand a tend vers 1 ? En conclure le développement de

$$(1 + x)^m$$

suivant les puissances croissantes de x

(CAUCHY).

29. Prouver que

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

est divisible par

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2),$$

lorsque n est un multiple de 6 *moins* 1,
et est divisible par

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2,$$

lorsque l'entier n est un multiple de 6 *plus* 1

(CAUCHY).

45. Rendre entières les équations suivantes :

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0;$$
$$\sqrt[3]{A}+\sqrt{B}+C=0;$$
$$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}+\sqrt{E}=0 \qquad \text{(DESCARTES)};$$
$$\sqrt[m]{A}+\sqrt[3]{B}+C=0.$$

De plus amples informations sur cet ouvrage sont fournies en p. 38 .