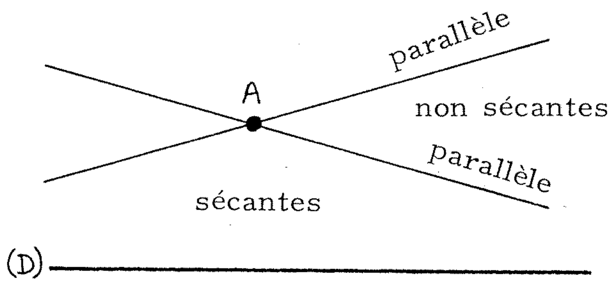
LA GEOMETRIE HYPERBOLIQUE PLANE

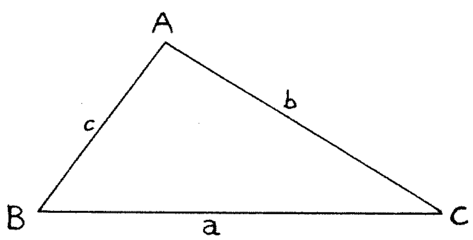
J. LEFORT

• On appelle géométrie hyperbolique une géométrie dans laquelle on a remplacé l'axiome d'Euclide par un autre axiome : l'existence de plusieurs droites passant par un point donné extérieur à une droite donnée et ne coupant pas celle-ci.

• Etant donné une droite (D) et un point A. Parmi toutes les droites passant par A, les sécantes à (D) et les non sécantes à (D) sont disposées comme sur la figure. On appelle parallèles les deux droites séparant ces deux ensembles, et ces deux droites ne sont pas sécantes. L'angle entre les deux parallèles à (D) passant par A s'appelle l'angle de parallélisme et dépend seulement de la distance de A à D. Il existe ainsi une unité naturelle de distance (de même que le radian est une unité naturelle de mesure d'angles).



• Dans un triangle du plan hyperbolique, la somme des angles A + B + C est toujours inférieure à π et la différence $\pi - (A + B + C)$ est égale à la surface du triangle. Contrairement au cas euclidien, deux triangles qui ont les mêmes angles sont isométriques et on trouve des formules du type :



$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{sh } b \text{ sh } c \cos A$$

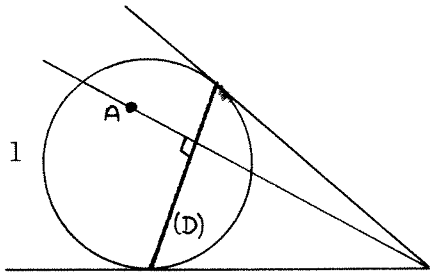
$$\cos A = \sin B \sin C \text{ ch } a - \cos B \cos C$$

$$\frac{\sin A}{\text{sh } a} = \frac{\sin B}{\text{sh } b} = \frac{\sin C}{\text{sh } c} .$$

Si a, b et c sont petits, les développements limités de ch x et sh x permettent de retrouver le cas euclidien qui apparaît ainsi comme un cas limite (tangent) de la géométrie hyperbolique, de la même façon que l'on peut supposer localement que la terre est plate. Les formules précédentes font comprendre le qualificatif "hyperbolique" qui est attaché à cette géométrie.

• Parmi les initiateurs de la géométrie hyperbolique il faut citer Saccheri (1667-1733) qui chercha vainement à démontrer par l'absurde le postulat d'Euclide. Les véritables fondateurs furent le hongrois J. Bolyai (1802-1860) et le russe N. Lobachevsky (1793-1856) qui travaillèrent indépendemment et publièrent leurs travaux en même temps. Leur démarche était purement axiomatique.
C'est à E. Beltrami (1835-1900) et H. Poincaré (1854-1912) que l'on doit les modèles de la géométrie hyperbolique. Pour le premier (fig. 1) c'est l'intérieur d'un disque, les droites y étant des cordes, la perpendicularité se construisant comme sur le dessin. Pour le second c'est également l'inté-

fig. 1



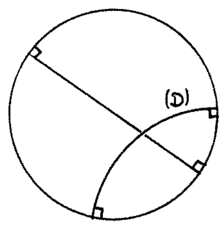


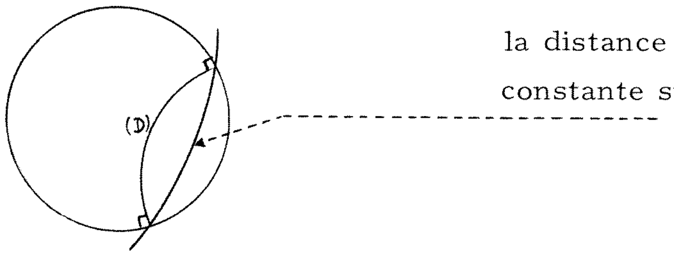
fig. 2

rieur d'un disque mais les droites y sont soit des arcs de cercle orthogonaux à la frontière du disque soit des diamètres (fig. 2). Ce modèle est conforme, c'est-à-dire qu'on peut y lire directement la valeur des angles. C'est ce modèle qui est utilisé sur la couverture de ce numéro.

• Dans le modèle de Poincaré les cercles sont effectivement des cercles s'ils sont intérieurs au disque. S'ils coupent la frontière du disque suivant des angles qui ne sont pas droits (cas des droites) il s'agit de courbes dont tous les points ont la propriété d'être à la même distance d'une droite (fig. 3). Dans ce modèle les distances ne sont pas conservées. Plus exactement on peut imaginer que la température en un point quelconque à la distance r du centre du disque de rayon R est proportionnel à $R^2 - r^2$ et que la dimension d'un objet est directement proportionnelle à sa température, température qu'il prend instantanément.
Cet univers qui nous apparaît borné ne l'est pas pour ses habitants puisqu'au fur et à mesure qu'ils s'éloignent du centre leurs pas deviennent plus petits. On comprend alors que la droite joignant deux points fasse un "détour" par le centre puisqu'on gagne du temps en y faisant des pas plus longs.

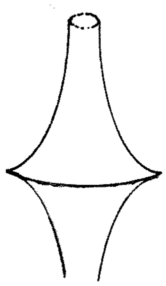
Evidemment, il ne s'agit pas d'un "détour" de la même façon que l'avion ne fait pas un détour quand il joint Naples à New York en s'approchant du pôle Nord.

fig. 3



la distance à D est constante sur ce "cercle"

• Il existe d'autres modèles de la géométrie hyperbolique qui s'obtiennent en étudiant la géométrie sur des surfaces particulières (comme la pseudo-sphère).



pseudo-sphère

Mais ce ne sont que des modèles partiels. Il est impossible d'obtenir un modèle global et isométrique du plan hyperbolique comme induit par la géométrie euclidienne sur une surface de $\mathbb{R}^3$. Pour s'en rendre compte, on peut s'amuser à coller des triangles équilatéraux ensemble de façon qu'il y en ait toujours 8 autour d'un sommet. On obtiendra une surface qui se replie indéfiniment dans $\mathbb{R}^3$. Dans l'interprétation hyperbolique les triangles en question n'ont plus que des angles de 45°.