COURBES EPAISSES

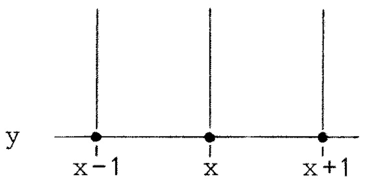
ou : des apports réciproques informatique-mathématique à propos de la construction des courbes définies par F(x,y) = 0

E. MEYER

Depuis l'utilisation du premier micro LX500 éducation nationale, où je dessinais des représentations graphiques de fonctions numériques à l'aide de grosses étoiles (!) une question me revenait régulièrement à l'esprit : faire un programme permettant de construire des courbes définies par l'utilisation en implicite : $F(x,y) = 0$. (Problème bien différent de $y = f(x)$ où il suffit de tabuler, calculer, dessiner.) Deux idées ont guidé mon travail sur des micro-ordinateurs sans table traçante, dont l'écran de visualisation a une définition point par point, mettons de l'ordre de 200 × 300 points.

I) F(x,y) = ax + by + c partage le plan en deux régions dont la frontière commune est la "courbe" d'équation F(x,y) = 0

Cette propriété est-elle encore vraie pour une fonction F plus compliquée ? Non, bien sûr ! Et pourtant, dans de très nombreux cas, cela se généralise bien. Le point de vue théorique reste à régler mais j'ai le sentiment qu'en éliminant des cas comme $F(x,y) = \{G(x,y)\}^2$ et en n'insistant pas près des points multiples, on règle de nombreuses constructions par le procédé suivant :



Si $F(x-1,y) \times F(x+1,y) < 0$ alors on considère sur l'écran, que le point (x,y) appartient à la courbe. (Il faudrait en fait faire intervenir une échelle et distinguer (x,y) des coordonnées sur l'écran.) On peut d'ailleurs améliorer ce procédé, au moins par un balayage vertical ($F(x,y-1) \times F(x,y+1) < 0$), voire même par des balayages en diagonales. Théoriquement, ce procédé n'est pas infaillible : il peut éliminer des portions de courbe, mais c'est surtout d'un point de vue pratique que j'ai été énormément déçu : le temps de réalisation d'une courbe classique est de l'ordre de la demi-heure ! Inacceptable à l'ère de l'informatique. Le nombre de "calculs" à faire est de l'ordre de 2 × 200 × 300 = 120000 (et j'ai d'ailleurs gagné très peu de temps en passant une partie du programme en assembleur ; il faut peut-être tripatouiller la gestion de l'écran...).

II) $\{F(x,y) = 0\}$ est inclus dans $\{|F(x,y)| < \varepsilon\}$

C'est la deuxième idée, évidente celle-là. Je me suis dis que pour une fonction F donnée, en trouvant la bonne valeur de ε (par tâtonnement) j'obtiendrai une belle courbe. Seconde déception : la bonne valeur de ε n'existe pas ! Il faudrait changer la valeur de ε suivant l'endroit de la courbe. (Voir par exemple les dessins obtenus pour l'hyperbole $xy-1 = 0$.)

Seraient-ce mes souvenirs de gradient ? Toujours est-il que l'idée m'est venue de remplacer $F(x,y)$ par $\dfrac{|F(x,y)|}{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}}$. Et alors, ε existe.

(théoriciens : qu'en pensez-vous ?)

Mais quel est l'intérêt de ce procédé ? Il y a toujours de très nombreux calculs à faire, rendus plus complexes encore par la présence de $\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}$. L'intérêt est le suivant : je fait un premier balayage de l'écran avec une certaine valeur de ε, en ne testant qu'un point sur cent par exemple (en faisant varier les coordonnées des points de l'écran de 10 en 10). Puis, je teste point par point (avec une autre valeur de ε) mais seulement la zone de l'écran signalée par le premier passage. Il est également possible d'utiliser la première méthode dans cette zone nettement réduite par rapport à l'écran tout entier.

III) Les différents dessins

C.N. : courbe "normale", obtenue soit par la méthode I ($F(x,y) \times F(x',y') < 0$) soit par la méthode II $\left(\dfrac{|F(x,y)|}{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}} < \varepsilon \right)$ appliquée à la zone réduite.

C.E.N. : courbe à épaisseur "naturelle", obtenue par $|F(x,y)| < \varepsilon$

C.E.R. : courbe à épaisseur "régulière", obtenue par $\dfrac{|F(x,y)|}{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}} < \varepsilon$

(sans intérêt ici pour ε trop grand ou trop petit).

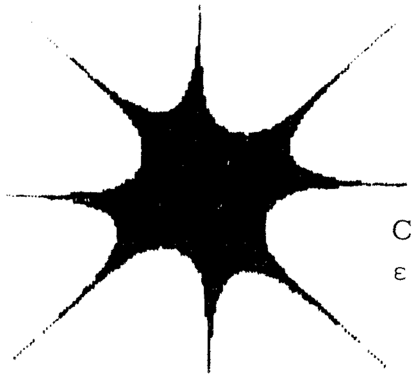
Conclusion partielle :

1°) l'informatique fait réfléchir

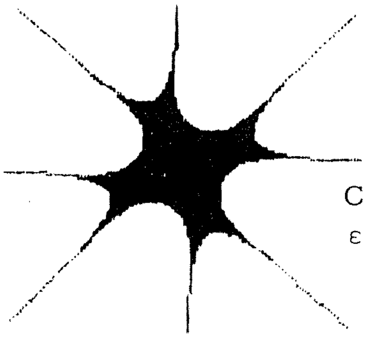
2°) les mathématiques, parfois, sont belles.

Croix de Malte

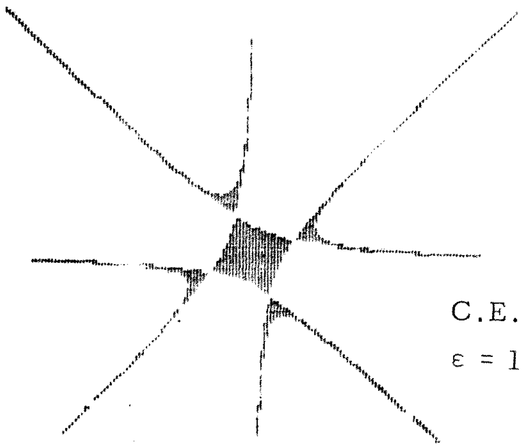
$$xy(x^2-y^2)-x^2-y^2 = 0$$



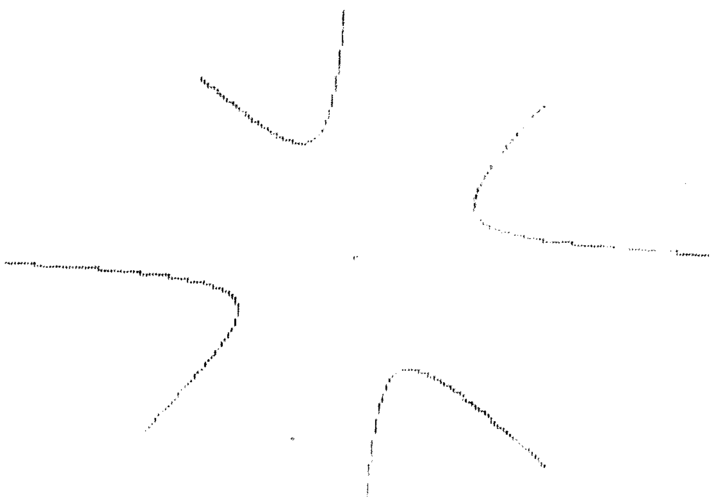
C.E.N.
$\varepsilon = 10$

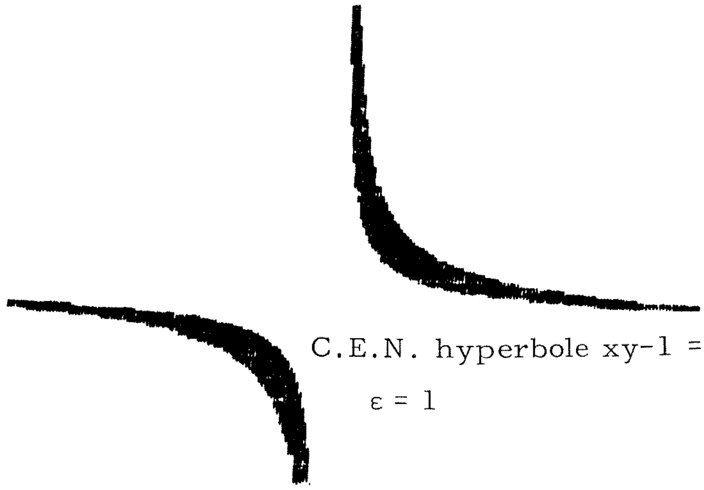


C.E.N.
$\varepsilon = 3$



C.E.N.
$\varepsilon = 1$



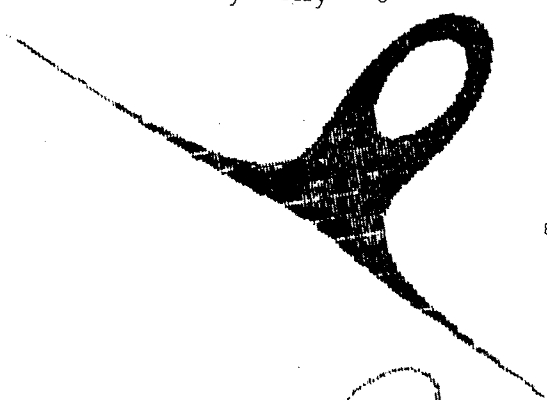


C.E.N. hyperbole $xy-1 = 0$

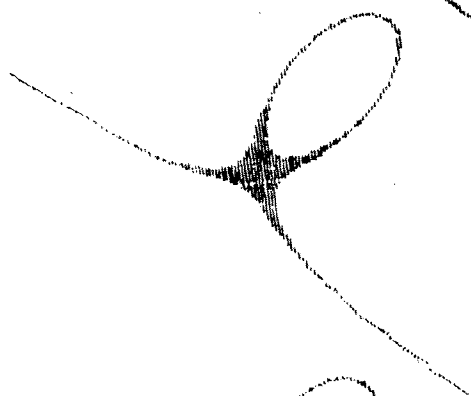
$\varepsilon = 1$

Folium de Descartes

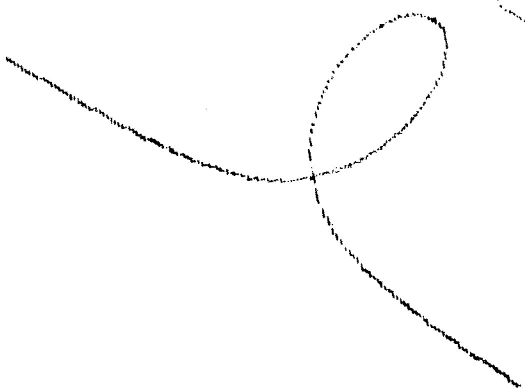
$$x^3+y^3-3xy = 0$$



C.E.N.
$\varepsilon = 0,5$

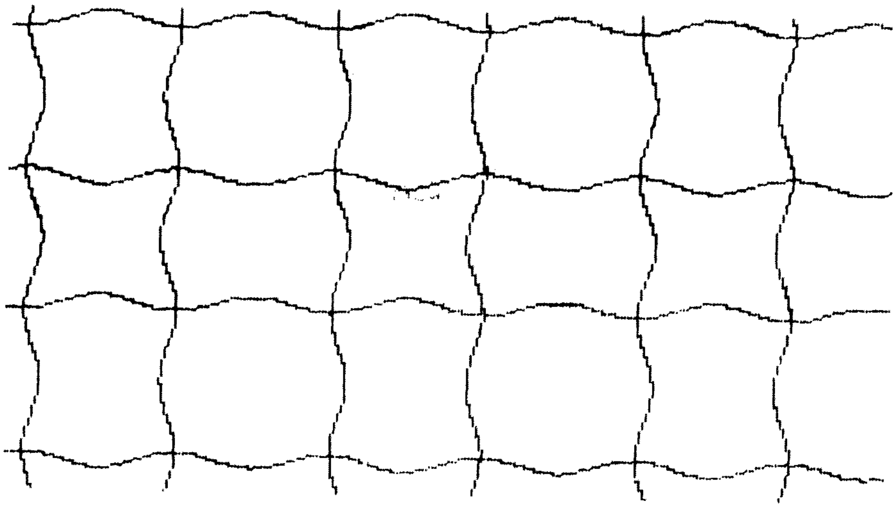


C.E.N.
$\varepsilon = 0,1$



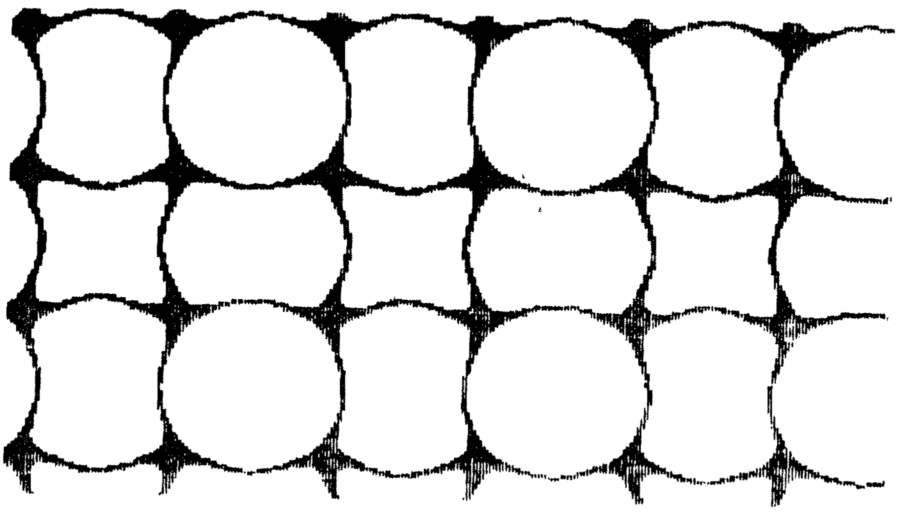
C.N.

C.N.

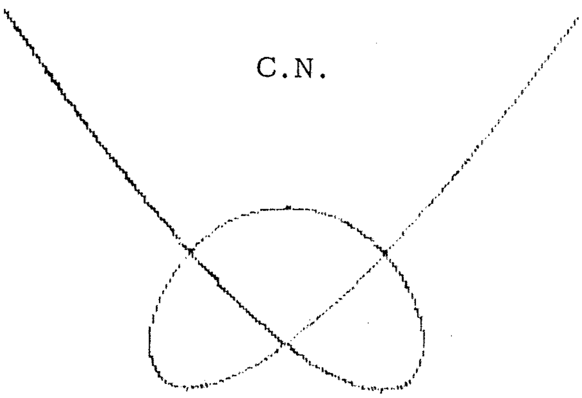


C.E.N.

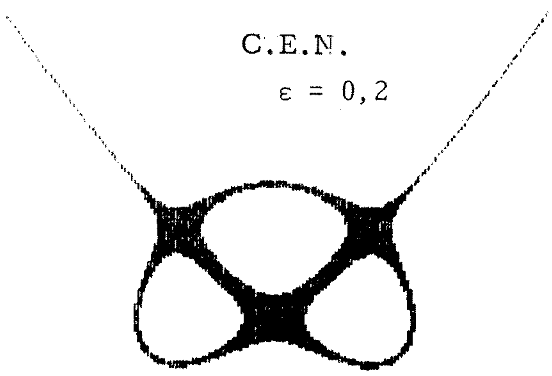
$\varepsilon = 0,25$



$\sin^3 x + \sin^3 y - 3 \sin x \sin y = 0$



C.N.



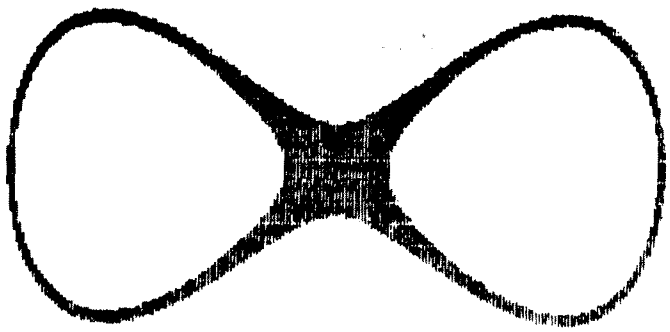
C.E.N.

$\varepsilon = 0,2$

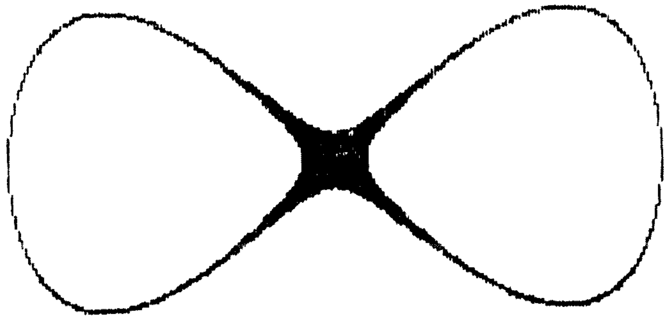
noeud $(x-1)^2 - y^2(3+2y) = 0$

Lemniscate $x^4 - x^2 + y^2 = 0$

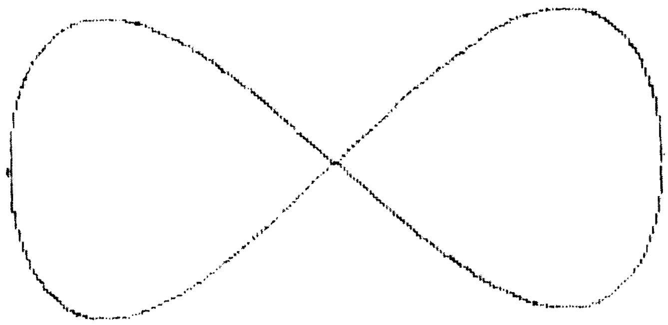
C.E.N.
$\varepsilon = 0,01$



C.E.N.
$\varepsilon = 0,025$



C.N.



DEVINETTE :

Quel collègue déclamait-il, du haut de son estrade :

La circonférence est fière
D'être égale à $2 \pi R$,
Et le cercle est tout joyeux
D'être égal à πR^2.

Ou encore :

Le volume de la sphère
Quoi que l'on puisse faire
Est égal à $\frac{4}{3} \pi R^3$
(soupir)
La sphère fut-elle de bois...

Tout lecteur qui découvrira le nom de ce poète aura gagné un abonnement d'un an pour une personne de son choix. Réponse dans le N° 34.

LE PREMIER LIVRE DES Instruments mathematiques mechaniques

DE I. ERRARD DE BAR-LE-DVC,

A TRES ILLVSTRE PRINCE MONSEIGNEVR, LE DVC DE CALABRE, LORRAINE, Bar, Gueldres, &c.

Imprimé à NANCY, par Ian-Ianson, Imprimeur de son Altesse.
M. D. LXXXIIII.
AVEC PRIVILEGE.