RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

§ 1. MATRICE COMPLETE D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

Exemple :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \quad - x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice complète (S) du système est :
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice complète (S) du système de p équations linéaires à n inconnues $x_1, \dots, x_n$
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \dots + a_{pn} x_n = b_p \end{cases}$$
est :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} \cdots\cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

C'est une matrice à p lignes et n + 1 colonnes

§ 2. SYSTEME LINEAIRE EN ECHELONS

Exemple :
$$\begin{cases} 2\boxed{x_1} + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad \boxed{x_3} + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 3\boxed{x_4} = 1 \end{cases} \qquad (S) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \end{array}\right)$$

Définitions : On appelle **matrice en échelons** une matrice telle que :

1) si une ligne a son premier coefficient non nul dans la colonne de numéro k, alors les coefficients de la ligne suivante jusqu'à la colonne k comprise sont tous nuls.

2) si une ligne a tous ses coefficients nuls, il en est de même des lignes suivantes.

Les premiers coefficients non nuls des lignes d'une matrice en échelons sont appelés **coefficients principaux** de la matrice.

Un système d'équations linéaires est dit en échelons si sa matrice complète est en échelons. Une **inconnue** est dite **principale** si l'un de ses coefficients est principal. Une inconnue non principale est dite **secondaire.**

Méthode : On résout les équations successivement en partant de la dernière. On exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Application à l'exemple précédent :

Les inconnues principales sont encadrées dans le système. Les coefficients principaux sont encadrés dans la matrice.

L'ensemble des solutions du système est formé des vecteurs :

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 \text{ est réel.}$$

§ 3. EQUIVALENCE DE SYSTEMES. OPERATIONS ELEMENTAIRES

Définition : Deux systèmes d'équations linéaires à n inconnues sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition : On appelle **opération élémentaire** sur un système S chacune des règles suivantes :

1) choisir deux entiers i et j avec $1 \leqq i < j \leqq p$ et échanger les lignes L_i et L_j de S.

2) choisir deux entiers i et j distincts (compris entre 1 et p) et remplacer la ligne L_i de S par $L'_i = L_i + \lambda L_j$ où λ est un nombre réel.

Théorème : Soit S un système d'équations linéaires. Le système S' obtenu en effectuant une opération élémentaire sur la matrice complète de S est équivalent à S.

Conclusion : Pour résoudre un système d'équations linéaires, nous allons le transformer en un système en échelons, que nous savons résoudre. La méthode utilisée pour cette transformation est celle du pivot de Gauss.

§ 4. LA METHODE DU PIVOT

Proposition : Soit (S) une matrice dont la première colonne n'est pas nulle. Par une succession d'opérations élémentaires, la matrice (S) peut être transformée en une matrice (S') dont la première colonne a tous ses coefficients nuls, sauf le premier.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Puis on itère le procédé pour obtenir une matrice en échelons.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients encadrés s'appellent les **pivots**.

§ 5. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Méthode : Soit S un système de p équations linéaires à n inconnues. Résoudre S par la méthode du pivot, c'est :

1) Ecrire la matrice complète (S) du système et la transformer en une matrice (S') en échelons, par la méthode du pivot.

2) Résoudre le système en échelons dont la matrice complète est (S').

Exemple : Soit le système S :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$(S) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

D'après l'exemple précédent, le système S est équivalent au système S' :

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \boxed{x_2} - x_3 + x_4 = -3 \\ 2\boxed{x_3} - 4x_4 = 12 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système S est formé des vecteurs :

$$X = \begin{pmatrix} -8 \\ 3+x_4 \\ 6+2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_4 \text{ est réel}$$

SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbb{R}^n$

Nous allons montrer comment il est possible d'exploiter la méthode du pivot dans des problèmes d'algèbre linéaire.

Nous envisageons deux types de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

1) ceux qui sont obtenus comme solutions d'un système homogène de p équations linéaires à n inconnues ; les équations du système sont appelées **équations du sous-espace.**

2) ceux qui sont obtenus comme combinaisons linéaires de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ces k vecteurs engendrent le sous-espace.

Nous nous proposons de résoudre les deux problèmes suivants :

1) étant donné un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ défini par un système homogène d'équations linéaires, déterminer une famille génératrice de V.

2) étant donné un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ engendré par une famille de vecteurs, déterminer un système d'équations de V.

§ 1. DES EQUATIONS AUX GENERATEURS

On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Nous utilisons la méthode du pivot pour transformer ce système homogène d'équations linéaires en un système homogène en échelons :

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \quad -4\boxed{x_2} - 7x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad -3\boxed{x_4} - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble V est constitué des vecteurs de la forme :

$$X = x_3 \begin{pmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 A_3 + x_5 A_5$$

$$\text{où} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A_3 est la solution du système définie par : $x_3 = 1$ et $x_5 = 0$

A_5 est la solution du système définie par : $x_3 = 0$ et $x_5 = 1$

A_3 et A_5 engendrent V.

<u>Définition</u> : Soit (S) la matrice d'un système homogène S d'équations linéaires, en échelons, non déterminé (S admet d'autres solutions que le vecteur nul). Soit x_i une inconnue secondaire de S. On appelle **solution fondamentale** de S associée à x_i la solution déterminée en donnant à x_i la valeur 1 et la valeur 0 aux autres inconnues secondaires de S.

Théorème : Soit S un système homogène en échelons. Le sous-espace vectoriel de ses solutions est engendré par la famille des solutions fondamentales de S ; il y a autant de solutions fondamentales que d'inconnues secondaires.

Remarque : Si S est un système homogène en échelons déterminé, le sous-espace vectoriel de ses solutions est réduit au vecteur nul.

Conclusion : Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ des solutions d'un système homogène S d'équations linéaires. Pour chercher une famille génératrice de V on applique la procédure suivante :

1) On transforme S en un système équivalent S' en échelons.
2) Si S' est déterminé, V est réduit au vecteur nul.

Si S' est non déterminé, on calcule ses solutions fondamentales ; elles engendrent V.

§ 2. DES GENERATEURS AUX EQUATIONS

Définition : Soit $A_1, \dots, A_k$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $(A_1, \dots, A_k)$ la matrice à n lignes et k colonnes obtenue en écrivant les vecteurs-colonnes $A_1, \dots, A_k$ successivement. On l'appelle **matrice de la famille.**

Remarque : L'égalité $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = B$, où les λ_i sont des nombres réels signifie que le vecteur de coordonnées $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ est solution du système d'équations linéaires de matrice complète $(A_1, A_2, \dots, A_k, B)$.

Exemple : Considérons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ noté V engendré par

les vecteurs $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et

cherchons un système homogène S à quatre inconnues, dont V soit l'ensemble des solutions.

Un vecteur X de $\mathbb{R}^4$ de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 appartient à V si et seulement si on peut déterminer des nombres λ_1 et λ_2 tels que $X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$. Ceci signifie que le système d'équations (A_1, A_2, X) admet une solution.

Nous cherchons les relations que doivent vérifier x_1, x_2, x_3, x_4 pour que

le système $\begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ 2 & -2 & x_4 \end{pmatrix}$ soit compatible.

Utilisons la méthode du pivot.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ 2 & -2 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & \boxed{-5} & x_2-2x_1 \\ 0 & 4 & x_3+x_1 \\ 0 & -8 & x_4-2x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -5 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & -3/5x_1 + 4/5x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 6/5x_1 - 8/5x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

Le système précédent est équivalent au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x_1 \\ \quad - 5\lambda_2 = x_2 - 2x_1 \\ \quad 0 = -3/5x_1 + 4/5x_2 + x_3 \\ \quad 0 = 6/5x_1 - 8/5x_2 + x_4 \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si les coordonnées du vecteur X vérifient :

$$\begin{cases} 0 = -3/5x_1 + 4/5x_2 + x_3 \\ 0 = 6/5x_1 - 8/5x_2 + x_4 \end{cases}$$

Ce système de deux équations à quatre inconnues définit V.

Conclusion : Soit $A_1, \dots, A_k$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par ces k vecteurs. Pour obtenir un système d'équations de V, on cherche les **conditions de compatibilité** du système de matrice complète $(A_1, A_2, \dots, A_k, X)$.

BASES - DIMENSION

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment le point de vue choisi de la méthode du pivot conduit naturellement à la notion de dimension.

§ 1. DEPENDANCE LINEAIRE

<u>Théorème</u> :

1) La famille $A_1, \ldots, A_k$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **liée** si et seulement si la relation $x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = 0$ est vérifiée pour des nombres $x_1, \ldots, x_k$ non tous nuls ; en d'autres termes si le système homogène $(A_1, \ldots, A_k)$ a une solution non nulle.

2) La famille $A_1, \ldots, A_k$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **libre** si et seulement si la relation $x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = 0$ n'est vérifiée que pour $x_1 = \ldots = x_k = 0$; en d'autres termes si le système homogène de matrice $(A_1, \ldots, A_k)$ est déterminé.

<u>Exemple</u> : Considérons dans $\mathbb{R}^4$ la famille de quatre vecteurs :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour voir si cette famille est libre, résolvons le système homogène de matrice (A_1, A_2, A_3, A_4).

Ce système est en échelons d'inconnues principales x_1, x_2, x_3 d'inconnue secondaire x_4.

Il admet une seule **solution fondamentale** obtenue en donnant à x_4 la valeur 1.

On obtient :

$$-2A_1 + A_2 + A_4 = 0$$

Le système est lié.

<u>Règle</u> : Soit $A_1, \ldots, A_k$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et V le sous-espace vectoriel qu'elle engendre. On peut toujours en extraire une famille libre engendrant V ; pour cela :

1) on transforme la matrice $A = (A_1 \ldots A_k)$ en une matrice B en échelons et l'on note les numéros des colonnes de B qui contiennent **les coefficients principaux.**

2) les colonnes de A portant ces numéros constituent une famille **libre** engendrant V.

<u>Exemple</u> : Considérons dans $\mathbb{R}^4$ la famille de quatre vecteurs ayant pour matrice :

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformons cette matrice en une matrice B en échelons.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Les vecteurs B_1, B_2, B_3, B_4 vérifient la relation de dépendance

$$5B_1 - 3B_2 + B_3 = 0 \quad \text{(obtenue en donnant à } x_3 \text{ la valeur 1)}$$

Les vecteurs B_1, B_2, B_4 sont linéairement indépendants ; il en est de même des vecteurs A_1, A_2, A_4 qui constituent une famille libre engendrant V.

Définition : On appelle base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ toute famille libre engendrant V.

§ 2. DIMENSION

Thèorème fondamental : Si deux familles libres dans $\mathbb{R}^n$ engendrent le même sous-espace vectoriel, elles ont le même nombre d'éléments.

Pour démontrer ce thèorème fondamental de la dimension, on utilise le thèorème suivant et son corollaire.

Thèoréme : Soit $A_1, \ldots, A_k$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Soit $B_1, \ldots, B_p$ une famille de vecteurs appartenant au sous-espace $V = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ engendré par la famille $A_1, \ldots, A_k$. Si $p > k$ la famille $B_1, \ldots, B_p$ est liée.

Dans la démonstration de ce théorème, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires homogène de k équations à p inconnues, lorsqu'on cherche une relation de dépendance entre les vecteurs $B_1, \ldots, B_p$.

Corollaire : Soient $A_1, \ldots, A_k$ et $B_1, \ldots, B_p$ deux familles libres dans $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$\langle B_1, \ldots, B_p \rangle \subset \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$$

Alors on a nécessairement $p \leq k$.

Théorème : Soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Chacune des conditions suivantes est suffisante pour affirmer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$:

1) La famille $A_1, \ldots, A_n$ est libre.
2) La famille $A_1, \ldots, A_n$ engendre $\mathbb{R}^n$.
3) La méthode du pivot transforme la matrice $A = (A_1, \ldots, A_n)$ en une matrice en échelons sans zéro sur la diagonale principale.