

UNIVERSITE LOUIS PASTEUR

I.R.E.M.

10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

Raymond DUVAL

LA TRANSPARENCE OBSCURE

de la démarche mathématique

(à propos de la difficulté à reconnaître une bijection
entre un ensemble infini et l'un de ses sous-ensembles)

1982

UNIVERSITE LOUIS PASTEUR

I.R.E.M.

10, rue du Général Zimmer

67084 STRASBOURG CEDEX

Raymond DUVAL

LA TRANSPARENCE OBSCURE

de la démarche mathématique

(à propos de la difficulté à reconnaître une bijection
entre un ensemble infini et l'un de ses sous-ensembles)

Dans un premier travail, nous avons présenté à des élèves de 5e, de 4e et de 3e un texte aporétique de Galilée sur les difficultés que présente la notion de l'infini (1). Dans ce texte, Galilée montre que l'on peut aussi bien affirmer "il y a plus d'entiers que de carrés parfaits" et "il y a autant d'entiers que de carrés parfaits". Il était apparu alors qu'au terme d'une première argumentation soulignant que tous les entiers ne sont pas des carrés parfaits 1/3 des élèves en 3e, 1/4 en 4e et 1/5 en 5e refusaient de conclure avec Simplicio "plus d'entiers que de carrés d'entiers" (2). Et au terme de la seconde argumentation soulignant que pour chaque entier il y a un carré, 3/4 des élèves de 3e, 2/3 en 4e et presque 1/2 en 5e acceptaient la suggestion de Salviati : autant d'entiers que de carrés d'entiers. On trouvait donc à tous les niveaux, bien que dans des proportions différentes :

- des élèves qui semblaient n'éprouver aucune difficulté à admettre l'équipotence entre l'ensemble des entiers et l'ensemble des carrés parfaits. Cela malgré l'argumentation soulignant l'inclusion stricte,
- des élèves qui adoptaient successivement les deux positions, certains considérant ce changement comme le passage d'une position qui paraissait vraie à une position qui est la position exacte. Cette façon d'évacuer la contradiction entre deux propositions qu'on est conduit à reconnaître vraies s'appuyait sur la présentation rhétorique des deux argumentations : c'est un dialogue dans lequel un interlocuteur joue avec l'autre par ses questions. Certains élèves ont cherché des indices dans cette situation pour déterminer leur réponse,
- des élèves qui refusaient d'admettre l'équipotence même après l'explicitation de la correspondance bijective entre l'ensemble des entiers et l'un de ses sous-ensembles propres. Ce refus qui peut apparaître a priori naturel, ne manque pas de faire problème ; car à tous les niveaux beaucoup d'élèves se sont laissés convaincre par l'existence d'une bijection entre les entiers et les carrés parfaits !

On peut alors se demander si ce refus, au lieu d'exprimer l'évidence de l'inclusion et de sa quantification habituelle, ou d'être encore une habileté pour éviter de tomber dans une contradiction, n'était pas d'abord la difficulté à reconnaître une bijection. Dans ce cas le problème principal soulevé par ces observations serait : qu'est-ce qui empêche une partie des élèves de reconnaître l'existence d'une bijection entre la suite

des entiers et la suite des carrés entiers ?

Ce qui semble faire écran à la reconnaissance d'une bijection entre les éléments d'un ensemble infini et les éléments d'un de ses sous-ensemble propres est que certains éléments, pris sous de points de vue différents, paraissent intervenir deux fois. Et celui qui n'admet pas la séparation entre les deux points de vue ne peut que refuser la possibilité d'une bijection. Ainsi le nombre "4" intervient dans une suite comme l'entier "successeur de 3" et dans l'autre suite comme l'entier "carré de 2". On peut voir ces deux propriétés comme **deux objets** à un certain égard distinct ou comme **deux attributs d'un même objet**, ainsi que les verbalisations les plus immédiates le suggèrent : "4 est un entier, le successeur de 3" et "4 est le carré de 2". Ces deux énoncés réfèrent au même objet "4" et lui attribuent deux propriétés. Celui qui accepte de considérer ces deux propriétés comme deux objets peut reconnaître aisément la bijection entre

1 2 3 4 ...
1 4 9 16 ...

Pour celui qui ne peut oublier le référent commun, ces deux propriétés restent des attributs associés à l'occurrence du nombre "4". Et alors soit il aura l'impression que pour établir la bijection on prend certains nombres deux fois et les autres une seule fois, soit il sera invinciblement porté à remarquer dans la suite des carrés l'absence de 3 (puisque 4, carré de 2 est aussi successeur de 3) etc... ou à remarquer dans la suite des entiers que 3 n'est pas un carré (puisque l'entier 4 successeur de 3 est aussi présent dans la suite des carrés). En d'autres termes, un élève qui n'opère pas d'une façon ou d'une autre un dédoublement de l'objet "nombre entier" ne peut reconnaître la possibilité d'une bijection. Car c'est la règle "habituelle" de la bijection qui se trouve violée : une mise en correspondance n'est possible qu'entre deux ensembles d'objets distincts. Il ne saurait naturellement en être autrement quand on prend comme thème pour une mise en correspondance des objets d'une situation réelle : les verres et assiettes quand on sert la table (bijection effectuée spontanément par de très jeunes enfants), des billets et des places disponibles etc... Dans le domaine mathématique cette règle est aussi respectée : c'est entre des nombres et des points que l'on établit une bijection par exemple. Le cas de la permutation n'y échappe pas puisqu'on distingue les **nombres** et les **places** des nombres dans un arrangement. L'objet "place dans un arrangement" étant plus difficile à identifier c'est-à-dire à maintenir en mémoire de travail, cela pourrait expliquer les difficultés rencontrées par des élèves plus âgés dans ce domaine.

Il ne s'agit pas simplement ici d'une difficulté particulière d'un ensemble infini avec une "partie" de lui-même. Le dédoublement d'un objet donné, pratique aussi triviale et nécessaire que l'identification d'un même objet sous plusieurs expressions ou points de vue différents, constitue un obstacle qu'une partie des élèves ne cesse de retrouver dans les diverses situations d'apprentissage où ils sont placés.

Pour vérifier la pertinence de l'hypothèse selon laquelle le non-dédoublement de l'objet "nombre entier" occulte la possibilité d'une bijection entre les entiers et les carrés parfaits, nous avons voulu reprendre de façon plus fine les observations déjà faites. Le déchiffrement du texte de Galilée pouvant être une source importante de difficultés parasites pour notre propos, nous lui avons substitué un questionnaire organisé autour de la répétition d'une même question : "y a-t-il plus (ou autant) de nombres entiers que de carrés d'entiers ?" (3). La **première fois**, la question intervient après une tâche de tri et de comptage, sur un tableau comprenant les soixante dix premiers entiers, des entiers qui sont des carrés parfaits. Cette tâche est complétée par une question attirant l'attention sur la diminution de la proportion des carrés quand la taille de la liste augmente. Le but de cette tâche préliminaire est de favoriser la réponse qui prend en compte l'inclusion des carrés parfaits dans les entiers. La question intervient une **deuxième fois** après la présentation d'une production synchrone de deux listes illimitées, l'une d'entiers et l'autre de carrés d'entiers. Une question du type "chaque entier a-t-il son carré ?" recentre l'attention sur la correspondance terme à terme entre les deux listes et fait "oublier" momentanément la relation d'inclusion : on lève ainsi l'obstacle pour une reconnaissance presque immédiate de la bijection. Cette deuxième occurrence constitue le centre de l'épreuve. Elle permet de discriminer plusieurs types de comportements qui donnent un sens différent au choix de la réponse :

- selon que l'on refuse d'emblée la bijection et que l'on maintient ensuite ce refus
- selon que l'on refuse d'emblée la bijection mais qu'après réexamen ou discussion on l'accepte
- selon que l'on accepte d'emblée la bijection et que découvrant la contradiction avec la réponse antérieure, il y ait repli sur une position de réserve, retour à l'inclusion, ou au contraire maintien de la bijection comme la "bonne réponse" !

Les observations précédentes conduisaient à se demander si l'opposition des réponses successives, inclusion stricte et bijection, était interprétée par les élèves comme une contradiction entre deux propositions vraies et suscitaient un étonnement, ou si elle était interprétée comme une divergence entre deux réponses dont l'une seulement est vraie et ne provoquait que l'attente d'une solution d'autorité ! La prise de conscience du paradoxe se joue à ce niveau.

Il est important de ne pas se limiter à cette deuxième occurrence de la question "y-a-t-il plus (ou autant) d'entiers que de carrés d'entiers ?". Le travail précédent avait montré qu'en ajoutant la question "y-a-t-il autant (ou moins) de cubes de nombres entiers (8 est le cube de 2) que de nombres entiers ?", la proportion des élèves reconnaissant la bijection retombait à 2/3 en 3e, 1/3 en 4e et 1/4 en 5e. D'où la nécessité de réitérer la question en changeant de sous-ensemble. Nous avons retenu cette fois la comparaison entre les entiers et les pairs déjà proposée dans une autre enquête (4). Cette question s'était révélée un piège, parce qu'étant présentée sans préparation il n'y avait aucun avertisseur contre une réponse immédiate et automatique.

L'épreuve ainsi constituée requiert seulement des élèves

- 1) qu'ils soient en mesure de trier dans une liste de nombres entiers ceux qui sont des carrés d'entiers
- 2) qu'ils admettent l'infinité de \mathbb{N} et l'infinité de la suite des carrés d'entiers.

Les observations de notre premier travail ayant montré que cela était le cas pour presque tous les élèves de 5e et que la proportion des refus de la bijection était la plus élevée à ce niveau, c'est à des élèves de 5e que nous avons présenté cette épreuve. Et nous avons choisi de la présenter à des élèves volontaires venant d'une classe dans laquelle nous avons été présents toute l'année à raison de deux heures par semaine. En outre les élèves se cooptaient pour venir passer cette épreuve par binôme. Cela nous paraissait être les conditions minimales pour obtenir sur les questions proposées la liberté de réactions et de discussion que les élèves ont lorsqu'ils sont seuls, ou entre eux, devant une tâche mathématique (5).

Pour la passation de cette épreuve nous avons adopté la procédure suivante. Chacun des deux élèves avait devant lui la première moitié du questionnaire, c'est-à-dire la partie se terminant avec la première

occurrence de la question : "y a-t-il plus (ou autant) d'entiers que de carrés d'entiers ?". Les deux élèves étaient prévenus que ces questions se rapportaient à la notion d'infini. Ils étaient invités à discuter des questions entre eux et à me demander éventuellement des explications. Ils pouvaient encore se référer à la page correspondante au texte de Galilée que je leur fournissais aussi. Je me donnais en outre la possibilité d'intervenir soit pour leur demander une explication, soit pour leur rappeler une réponse ou une explication qu'ils avaient antérieurement données et qu'ils semblaient oublier, soit encore pour souligner la divergence de leurs réponses au cas où ils travailleraient indépendamment l'un de l'autre. La seconde partie du questionnaire était distribuée quand la première partie était terminée.

Dans la suite de ce texte nous allons décrire et analyser les comportements et les explications enregistrées sur les deux points centraux de l'épreuve : comparaison entre entiers et carrés d'entiers dans le contexte d'une présentation bijective (deuxième moitié du questionnaire) et comparaison test entre entiers et pairs. Nous ne mentionnerons les réponses aux autres questions que dans la mesure où elles éclairent les comportements sur ces deux points centraux. En outre nous ne retiendrons que les observations enregistrées chez au moins deux élèves de deux binômes différents. Nous dégagerons successivement

- les conditions d'une reconnaissance de la bijection entre un ensemble infini et l'une de ses parties propres
- les raisons qui empêchent cette reconnaissance.

et nous terminerons par quelques remarques sur le caractère plus général de l'obstacle du dédoublement d'un objet donné.

I. LES CONDITIONS DE RECONNAISSANCE DE LA BIJECTION

La première moitié du questionnaire a révélé une évidence communément partagée. Les élèves ont tous admis sans hésitation que la suite des carrés d'entiers était infinie comme N . Certains ont même justifié spontanément le caractère infini de cette suite : "on peut toujours multiplier un nombre par lui-même" (Sarah, Stéphane, Nadia), "comme les nombres c'est infini, les carrés ce sera pareil" (Philippe, Angélique, Abdel). Et juste après avoir affirmé le caractère infini des deux suites, les élèves, à deux exceptions près, n'hésitent pas à répondre qu'il y a plus d'entiers que de carrés d'entiers. Abdel est le seul à répondre "autant" et Myriam, qui choisit comme les autres la réponse "plus" précise qu'elle n'est pas convaincue de sa réponse. C'est dans le tri des carrés d'entiers sur le tableau des entiers de 1 à 70 que des différences sont apparues entre les élèves. Il y a eu ceux qui ont utilisé spontanément la suite des produits 1×1 , 2×2 , 3×3 , ... pour entourer rapidement sur la liste les carrés parfaits ; et il y a ceux qui ont procédé par tâtonnement, examinant chaque entier l'un après l'autre pour se demander s'il pouvait être un carré. Ainsi Pascale, arrivée à 32 me demande brusquement : "32 c'est un carré d'entier ?". Cette différence de comportement s'est manifestée plusieurs fois à l'intérieur d'un même binôme. Il se produisait alors un retard d'un élève par rapport à l'autre et aussi une incertitude pour dire combien de carrés parfaits il y avait sur la liste de 1 à 70 ou sur une liste de 1 à 10000. Suite à ce décalage certains élèves ont alors expliqué à leur coéquipier qu'il suffirait de prendre la suite des produits 1×1 , 2×2 , ... Ainsi Carole a réagi à la demande de Pascale citée plus haut en lui disant de prendre " 2×2 , 3×3 , 4×4 , ... etc". Voici un autre exemple avec le binôme Michel - Abdel.

- R Tu as une idée pour 10000, il y en aura combien (de carrés d'entiers) ?
- Michel Bien non justement
- R Ce qui t'embête c'est que ce ne soit pas régulier ? (ce terme a déjà été employé par Michel pour souligner que les écarts n'apparaissent pas constants entre les carrés parfaits)
- Michel C'est-à-dire pour bien faire il faudrait compter
- R Il faudrait écrire jusqu'à 10000 ? Il aurait fallu que j'écrive tous les nombres jusqu'à 10000 et tu aurais entouré et tu aurais compté combien de nombres entourés ?
- Michel Mm !

Abdel Non non je prendrais une autre solution
R Tu prendrais une autre solution toi ?
Abdel Là par exemple (la liste des entiers de 1 à 70) 2 fois 2,
3 fois 3, 9, 4 fois 4, 16, 5 fois 5, 25 et puis on continue
R Vous en entoureriez combien avec cette solution ?
Michel Pour aller jusqu'à combien ?
R Pour aller jusqu'à 10000
Abdel (sans hésitation)
J'en trouverais 100 parce que 100 fois 100, ça fait 10000.

Ce partage des élèves entre ceux qui ont vu d'emblée la suite des carrés comme une suite de produits et les autres s'est révélée être importante pour la suite de l'épreuve.

(A) LA RECONNAISSANCE DE LA BIJECTION ENTRE LES ENTIERS ET LES CARRÉS D'ENTIERES

La deuxième moitié du questionnaire commence par une présentation en correspondance bijective du début de la suite des entiers et du début de celle des carrés d'entiers. Devant cette présentation tous les élèves, à l'exception de Thierry, ont admis sans hésiter que chaque entier avait son carré. C'était évident ! Or se retrouvant aussitôt après devant une formulation un peu différente de la question "plus ou autant d'entiers que de carrés d'entiers ?" ils ne sont pas tous passés de l'affirmation "chaque entier a son carré" à l'affirmation "il y a autant de carrés d'entiers que d'entiers". Carole (mais non pas Pascale) (Irène (mais non pas Sarah), Myriam (mais non pas Claire), Nadia (mais non pas Adi), Philippe, Thierry (lequel avait ensuite reconnu que chaque entier a un carré, après l'avoir refusé) Abdel et Michel ont effectué ce passage sans aucune difficulté : ils l'ont même justifié devant les doutes ou les objections de leur partenaire qui leur rappelait alors que tous les entiers ne sont pas des carrés d'entiers, que 3 par exemple n'était pas un carré d'entier. Certains ont même pris soin de préciser que ce passage n'était valide que parce que les suites étaient illimitées (Myriam, Thomas qui a été convaincu de la bijection par Philippe). Seule Nadia, après avoir admis d'emblée la bijection a reculé devant l'assurance expansive d'Adi : ce recul correspondait au manque habituel de confiance en elle-même que Nadia manifestait en classe.

Voici à titre d'exemple un échange entre Alexandre qui pense qu'il y a plus d'entiers que de carrés d'entiers et Thierry qui pense qu'il y en a autant.

- Alexandre Parce que si on décide, par exemple, de s'arrêter à 4, on ne peut s'arrêter ici, donc il manque ...
- Thierry Mais comme chaque nombre ici a un carré
- Alexandre Oui mais d'accord ; mais si on décide de s'arrêter par exemple à 5 (liste des entiers) il n'y a ici que un (carré "4") et là il y a
- Thierry là 1, 2, 3, 4, 5 et là 1, 4, 9 et 16 et
- R Si on décide de s'arrêter à 4, jusqu'à 4 il y a
- Alexandre 1 et 4
- R 1 et 4 sont des carrés ?
- Alexandre Oui
- R Mais si on décide de ne pas s'arrêter ?
- Alexandre Alors on ne peut pas savoir.
- Thierry Mais comme chaque nombre a son carré, eh bien cela veut dire qu'il y en a autant.

Voici un deuxième exemple d'échange, celui entre Myriam et Claire. (Myriam vient déjà d'expliquer pourquoi en répondant "plus" et non pas "autant" elles se sont trompées sur la feuille précédente).

- Claire Il faudra que tu me réexpliques, parce que
- Myriam (à R)
Réexpliquez lui moi je travaille
- R Tu peux lui réexpliquer. On n'est pas pressé. Parce que ce questionnaire ce n'est pas la course.
- Myriam Alors, nous on s'est trompé parce que là (fin de la première moitié du questionnaire), on a dit qu'il y a autant de nombres entiers que de carrés d'entiers et nous on a dit que c'était faux hein ? On a dit...
- Claire Les nombres entiers c'est tout, 1, 2... ?
- Myriam Les nombres entiers c'est 1, 2, 3, 4, 5...
- Claire On prend comme exemple 3
- Myriam 3 ! Mais on ne peut pas prendre d'exemple puisque c'est infini. On a dit qu'il y avait plus de nombres entiers que de carrés d'entiers ?
- Claire Oui

Myriam On s'est trompé ! puisque sous chaque nombre il y a un carré d'entier. Regarde là

Claire Non pas tous, 3 par exemple

R 3 ? Il n'y a pas de carré d'entier pour 3 ?

Myriam 3 fois 3 ça fait 9

Claire Ah... ça peut être euh... Ah mais je croyais qu'il fallait que ce soit plus petit.

(Nous reviendrons plus loin sur la signification de cette dernière remarque de Claire). Myriam reprend alors l'explication de la présentation en correspondance bijective des deux listes de nombres.

Les élèves qui ont accepté ainsi d'emblée la bijection ont tous (à l'exception de Michal) utilisé spontanément la suite des produits 1×1 , 2×2 , 3×3 dans la première moitié du questionnaire. Et les autres (à l'exception de Stéphane) avaient au contraire procédé par tâtonnement pour entourer sur la liste les entiers qui étaient des carrés parfaits. Ces deux exceptions sont d'ailleurs en grande partie dues aux interactions particulières de chaque binôme.

La réponse "plus d'entiers que de carrés d'entiers" était apparue évidente à Michel, à la fin de la première moitié du questionnaire. Comme il s'apprêtait à l'écrire il a entendu Abdel affirmer "autant" et justifier son affirmation par le fait que plus il y a d'entiers, plus il y a de carrés d'entiers. Michel s'est alors trouvé partagé entre la pertinence de deux arguments, le sien, la diminution de la proportion des carrés d'entiers quand la taille des listes augmente et celui d'Abdel. Comme il ne semblait pas pouvoir sortir de sa perplexité, je lui ai proposé d'écrire qu'il refusait de décider. Il a d'abord acquiescé puis au terme d'un silence d'une minute il a tranché "il y en aura toujours plus... puisque les nombres entiers ne sont pas des carrés d'entiers". La seconde présentation en correspondance bijective semblait donc faire droit à la réponse d'Abdel qui l'avait arrêté. Elle lui permettait de la prendre en compte. Et comme j'intervenais à nouveau pour attirer son attention sur le désaccord entre ses propres réponses ("plus" la première fois, "autant" la seconde fois) Michel a expliqué que dans les deux cas il ne s'agissait pas du même problème : "là (seconde présentation) on nous donne des trucs et on nous donne leur carré ; tandis que là (première présentation) on nous donnait des trucs et il fallait trouver leur carré". La première présentation permettait à Michel de prendre en compte l'impression que les carrés d'entiers "ça diminue" (c'est-à-dire que les écarts grandissent entre les carrés parfaits) et la seconde

présentation lui permettait de faire droit à la remarque opposée d'Abdel dont la pertinence l'avait également frappée et que sa première réponse laissait en suspens.

A l'inverse de Michel, Stéphane avait spontanément utilisé la suite des produits $1 \times 1, 2 \times 2, \dots$ pour entourer les carrés d'entiers dans le tableau de la première feuille. Or juste avant de répondre à la question "y a-t-il plus (ou autant) de carrés d'entiers que d'entiers ?" proposée la deuxième fois il entend Alain remarquer que c'est la même question que sur la première feuille ! Sans réfléchir davantage Stéphane reproduit alors la réponse "plus" qu'il avait déjà donnée sur cette première feuille. Ce rappel inopportun annulait le déplacement de point de vue introduit par la correspondance bijective.

A ces deux exceptions près, dont nous venons de décrire le contexte, il y a donc coïncidence entre deux populations d'élèves : ceux qui perçoivent spontanément (dans l'épreuve de tri) la suite des carrés d'entiers comme la suite des produits de chaque entier par lui-même et ceux qui ont admis d'emblée (dans la seconde moitié du questionnaire) la bijection entre les entiers et les carrés d'entiers, entre un ensemble infini et l'une de ses parties propres, malgré le fait reconnu antérieurement de l'inclusion. Voir la suite des carrés d'entiers comme une suite de produits et reconnaître qu'il y a "autant" de carrés d'entiers que d'entiers relèvent d'une même démarche de réponse.

ⓑ LA RECONNAISSANCE DE LA BIJECTION ENTRE LES ENTIERS ET LES PAIRS

Il est moins facile de voir la suite des nombres pairs comme la suite des produits $1 \times 2, 2 \times 2, 3 \times 2 \dots$ car il y a une catégorisation verbale des entiers en pairs et en impairs si immédiate, si automatisée qu'elle appartient au langage ordinaire. Ce qui n'est pas le cas pour la catégorisation des entiers en carrés parfaits et en entiers qui ne sont pas des carrés parfaits. De plus aucun traitement ne paraît nécessaire pour effectuer le tri entre les entiers pairs et les entiers impairs. Quand nous avons demandé "qu'est-ce qu'un nombre pair ?" c'est le critère de reconnaissance visuelle qui a été le

plus fréquemment avancé : un nombre pair est un nombre qui se termine par 2, 4, 6, 8, 0. Le second critère avancé a été la divisibilité par 2. La question test "y a-t-il plus (ou autant) de nombre pairs que de nombres entiers ?" fait donc surgir rapidement la représentation écran d'un partage égal des entiers entre pairs et impairs. Ainsi voit-on Philippe répéter d'un ton étonné la question qu'il vient de lire.

Philippe "de nombres pairs que de nombres entiers ?" Bien non !
Bien sûr que non puisqu'il y a des pairs et des impairs. Il y en a deux fois moins. Puisqu'à chaque fois un sur deux c'est un nombre pair, alors un sur deux c'est un nombre impair. Alors un fois c'est impair, une fois c'est pair ; une fois c'est impair, une fois c'est pair.

Thomas Il y en a deux fois moins.

Philippe Donc c'est un sur deux.

Thomas Quand on dit "les nombres entiers", les nombres entiers c'est les nombres pairs et les nombres impairs, les deux. C'est tout.

La seule lecture de la question déclenche donc une représentation-écran. "C'est tout" conclut Thomas après le refrain de Philippe sur l'alternance pair-impair. On peut donc se demander dans quelle mesure ceux qui ont admis la bijection pour la comparaison entre entiers et carrés d'entiers vont dépasser ou éviter cette représentation-écran.

Trois élèves ont admis d'emblée, c'est-à-dire après lecture de la question, la bijection entre les entiers et les pairs : Myriam, Abdel et Michel.

Myriam (lisant la question)

"Alors III. Si on compare l'ensemble de tous les nombres..."
la la la "avec l'ensemble des nombres pairs" oui "l'ensemble des nombres entiers a plus d'éléments" c'est pareil. Bien c'est pareil. Bien non c'est pas pareil ! Bien oui puisque c'est infini, c'est pareil ! Les nombres pairs ne s'arrêtent pas, les nombres entiers pas non plus, donc c'est pareil.

Claire Pourquoi ?

Myriam Re - Re - Re

R Re... quoi ?

Myriam Réfléchissons

R Il faut réfléchir pour la question avec les nombres pairs ?

Myriam Non. Non. (Relisant) "Si on compare l'ensemble de tous les entiers avec l'ensemble de tous les nombres pairs, l'ensemble des nombres entiers a plus d'éléments que l'ensemble des nombres pairs" 1, 2, 3, 4...
2, 4, 6, 8...

Faux !

On voit donc Myriam produire ici la correspondance bijective entre les entiers et les pairs et refuser la réponse "plus" proposée avant la réponse "autant".

La réaction de Michel a été plus laconique. Juste après avoir lu la question il explique : "là encore une fois c'est pareil... Euh c'est pareil, puisque le nombre 1 il a comme nombre pair 2, 2 il a 4, 4 aura 8, 5 aura 10, 6 aura 12... Donc il n'y en a pas plus, il y en aura autant". Il semble que la reconnaissance de la similitude de cette question avec la précédente ("là, encore une fois...") ait suggéré immédiatement à Michel un transfert de la procédure de correspondance bijective et qu'elle lui ait évité de s'enfermer dans la représentation-écran.

D'autres n'ont admis la bijection entre les entiers et les pairs qu'après discussion : Thierry et Carole. Thierry n'a pas d'abord compris qu'on puisse poser une question sur quelque chose d'aussi évident.

Thierry La III, là, c'est un peu bête

R Pourquoi c'est un peu bête ?

Thierry Eh bien demander si l'ensemble des nombres entiers est supérieur à l'ensemble des nombres pairs.

R Pourquoi c'est bête ?

Thierry Parce que dans les nombres, il y a les nombres pairs plus les nombres impairs.

R Les nombres pairs plus les nombres impairs, oui. Alors quelle réponse donnes-tu à cela ?

Thierry Qu'il y a plus de nombres... que l'ensemble des nombres entiers a plus d'éléments que l'ensemble des nombres pairs... ça paraît évident !

Alexandre proteste alors que ce n'est pas évident si on décide de ne pas s'arrêter. Il revient à l'idée que dès que c'est infini on ne peut pas savoir. Après l'intervention d'Alexandre, à laquelle Thierry semble ne pas réagir, j'attire l'attention de Thierry sur le fait qu'il n'avait pas trouvé "bête" la question sur la comparaison entre les entiers et les carrés d'entiers et qu'il aurait pu aussi bien la trouver "bête". Cette remarque, qui présuppose la similitude des deux questions, suffit à lui faire reconsidérer sa réponse. Il admet alors qu'il y a "autant" de pairs que d'entiers. Mais, ce qui est plus significatif, il écrit aussitôt, sur la feuille du questionnaire, la justification suivante : "il suffit de multiplier un nombre entier impair par deux et il devient pair. Il y a donc autant de nombres entiers que de nombres pairs". On notera cependant qu'il semble limiter le produit aux seuls nombres impairs. L'ambiguïté sous-jacente à ce qui pourrait être considéré comme une simple maladresse de formulation sera analysée ultérieurement.

Avec Carole mon intervention a été plus explicite. Devant la différence de ses réponses ("autant" pour la comparaison entre entiers et carrés d'entiers, "plus" pour la comparaison entre entiers et pairs), je lui ai demandé : "à ton avis, c'est une situation vraiment différente, ou c'est le même problème ?". Carole a longuement hésité, puis répondant "c'est la même chose", elle a corrigé la réponse "plus" en "autant". La seule chose que l'on puisse affirmer dans son cas est qu'il n'y a pas eu retroaction de l'évidence "plus d'entiers que de pairs" sur la comparaison antérieure entre les entiers et les carrés d'entiers : au contraire cette comparaison a servi de référence pour corriger une évidence plus prégnante.

Les autres élèves, et plus particulièrement Irène et Philippe qui avaient admis la bijection à la question précédente, ont refusé même après discussion d'admettre la possibilité d'une bijection entre les entiers et les pairs. En revanche aucun élève n'a admis la possibilité de la bijection entre les entiers et les pairs après l'avoir refusée pour les entiers et les carrés d'entiers.

L'inclusion des nombres pairs dans les nombres entiers constitue donc une évidence plus forte et plus immédiate que celle des carrés parfaits dans les entiers. Elle empêche davantage de voir la suite des nombres pairs comme la suite des produits de chaque entier par 2. Ce sont en effet les

élèves qui n'ont pas été arrêtés par la représentation écran d'un partage moitié-moitié qui ont pu voir, probablement par analogie avec la présentation en correspondance bijective des entiers et des carrés d'entiers, la suite des pairs comme une suite de produits. Suffirait-il alors de suggérer cette transformation pour lever l'obstacle à la reconnaissance d'une bijection entre un ensemble infini et l'une de ses parties propres ? Les observations ont montré que cette suggestion, même faite dans le cadre d'une discussion, était loin d'être suffisante. L'obstacle réel est ailleurs. Mais avant de décrire et d'analyser les démarches et les arguments de ceux qui ont refusé la bijection, il faut regarder comment ceux qui ont reconnu la bijection ont réagi face à la situation paradoxale qui résulte de la comparaison entre un ensemble infini et l'une de ses parties propres.

Ⓒ FACE A DEUX ARGUMENTATIONS CONTRAIRES

La première moitié du questionnaire favorise la réponse "il y a plus d'entiers que de carrés d'entiers" et la seconde moitié favorise, par son contexte, la réponse "autant de carrés d'entiers que d'entiers". Comment les élèves ont-ils réagi face à ce changement de point de vue?

Quelques élèves seulement ont réagi mais aucun n'a manifesté l'idée que les deux argumentations pouvaient être également valides, et qu'on se trouvait en présence d'une contradiction. Pour eux il y avait seulement un conflit de points de vue comme dans une discussion entre deux personnes : la reconnaissance d'une position comme vraie entraîne le rejet de l'autre position comme fausse. Et pour tous ceux qui admettent la bijection, son évidence l'emportait sur la constatation antérieure que tous les entiers n'étaient pas des carrés d'entiers.

La prise de conscience du paradoxe résultant de la comparaison entre un ensemble infini et l'une de ses parties propres ne s'est pas faite à partir de la production de deux affirmations contradictoires, mais à partir du fait que l'on était conduit à affirmer quelque chose de contraire à une évidence. En d'autres termes ce n'est pas le passage du premier point de vue au second dans la comparaison des entiers avec les carrés d'entiers qui a été l'occasion de la prise de conscience du paradoxe. C'est sur la comparaison entre les entiers et les pairs que s'est produite cette prise de conscience ! Car, là, la reconnaissance de la bijection heurtait une évidence prégnante, tandis qu'il n'y avait aucune évidence ancrée pour l'inclusion des carrés d'entiers dans les entiers. La reconnaissance d'une bijection entre les entiers et les pairs détruisait l'une des significations attachées à la notion de nombre pair, tandis que la reconnaissance

d'une bijection entre les entiers et les carrés d'entiers ne détruisait rien du tout.

Cette différence s'est manifestée d'abord par le fait que plusieurs ont été surpris ou choqués par la question sur les entiers et les pairs, tandis que personne ne l'a été par la question sur les entiers et les carrés d'entiers. Nous avons déjà cité sur ce point la réaction de Thierry (p 12). Cela a été la même chose pour Irène. Peut-être parce qu'elle n'osait imaginer qu'on puisse lui poser une question dont la réponse était si évidente, si inhérente à la notion de nombre pair, Irène en vient presque à douter qu'un nombre pair puisse être un nombre entier. Aussi éprouve-t-elle le besoin de demander confirmation.

Irène Un nombre pair c'est un nombre entier ?

R Oui.

Irène Ca ne veut rien dire alors cette question : "y a-t-il plus de nombres entiers que de nombres pairs ?" !

R C'est faux.

Irène Bien oui, parce qu'un nombre pair c'est un nombre entier et puis les nombres pas pairs c'est des nombres entiers.

L'évidence de la dichotomie des entiers en "pairs plus impairs" ou en "pairs et pas pairs" est si immédiate, si incontestable que l'inclusion ne peut faire l'objet d'une question, sans paraître nier ou ignorer la signification même de "pair". La prise de conscience du paradoxe de la situation commence donc par l'affirmation du caractère étrange de la question.

Avant de poursuivre plus avant la description de cette prise de conscience du paradoxe avec la comparaison entre entiers et pairs, revenons sur le changement de point de vue effectué avec le passage de la première moitié du questionnaire à la seconde moitié. C'est Myriam qui a le plus vivement réagi à ce changement. Avant de regarder les questions de la deuxième feuille, elle lit la partie correspondante du texte de Galilée, fournie comme document annexe.

Myriam (s'adressant à Claire)

Tu as lu ce que j'ai lu ?... mais c'est dégoûtant ! Il a y marqué "autant de carrés que de nombres" !

R C'est dégoûtant ? Pourquoi c'est dégoûtant ?

Myriam (en riant)

Parce que là on a mis que c'était pareil

(Myriam et Claire ont répondu au bas de la première feuille : "plus" d'entiers que de carrés d'entiers.)

Myriam relit alors le passage de Galilée pour suivre plus en détail son argumentation, et ponctue chaque énoncé d'une approbation ou d'une marque d'étonnement. Parvenue à la conclusion du texte, elle s'exclame à nouveau : "c'est scandaleux !". C'est dans cet état d'esprit qu'elle aborde la deuxième moitié du questionnaire. A peine a-t-elle fini de regarder la présentation en correspondance bijective qu'elle réagit : "Ah je sais pourquoi là on a été induit en erreur... Nous avons mal compris la question". Je lui fais remarquer qu'elle n'avait pas mal compris la question, elle se reprend alors : "Si on a bien compris la question. On a mal réfléchi". Myriam a donc vu dans le passage de Galilée un démenti de la réponse qu'elle venait de donner, démenti qui lui donnait l'impression d'avoir été prise par ruse ("on a été induit en erreur..."). Mais ensuite, la bijection entre les entiers et les carrés d'entiers lui apparaissant simple et évidente, sa réponse antérieure paraissait erronée : tout s'est passé comme si l'évidence de la bijection était venue détruire l'évidence beaucoup plus fragile et instable de l'inclusion (Myriam avait indiqué, comme nous l'avons déjà dit, qu'elle n'était pas "sûre" de la réponse "plus" qu'elle donnait à la fin de la première moitié du questionnaire).

Michel, lui, a vécu un véritable conflit entre deux points de vue, le sien et celui d'Abdel. Partagé entre le fait que plus on avance dans les entiers, plus les carrés d'entiers deviennent rares, et cet autre fait que le nombre des carrés d'entiers ne cesse quand même d'augmenter (voir p. 9-10), Michel déclare "apparemment c'est quand même dur (de décider entre ces deux points de vue)". Cependant c'est avec Philippe que le conflit entre deux points de vue s'approche le plus de la reconnaissance d'une contradiction objective. D'une part la réponse "autant" s'impose à ses yeux : il l'explique à Thomas et, pour le convaincre, il produit lui-même le schéma suivant :

1	2	3	4	...
↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	...

Il le commente de la façon suivante : "1 va sur 1, 2 va sur 4..." (vu l'efficacité de cette présentation auprès de Thomas, nous l'avons reprise dans les questionnaires donnés à tous les autres binômes). Mais Philippe ne peut s'empêcher de remarquer aussitôt que "tous les nombres ne sont pas carrés", c'est-à-dire que la réponse "plus" ne peut pas être écartée. Rien n'est plus révélateur de son embarras que cette réplique, lorsque je lui rappelle la question posée dont il s'écartait pour considérer un autre problème : "Ah il y en a plus ... il y aura pareil parce que pour chaque nombre il y a un carré... oui mais tous ne sont pas carrés, alors je ne sais pas". Philippe enchaîne dans un même mouvement syncopé les trois réponses possibles ! Nous reviendrons

dans la deuxième partie de ce texte sur la difficulté qui empêche Philippe de reconnaître la contradiction objective qu'il touche : placé devant la comparaison des entiers et des pairs il refuse d'admettre la possibilité d'une bijection.

Thierry est celui qui a le mieux réalisé le caractère paradoxal du problème posé. Tout à la fin du questionnaire il ne peut s'empêcher de revenir sur l'étonnement dans lequel le laissent et la question et la réponse pour la comparaison entre les entiers et les pairs.

- Thierry C'est quand même bizarre qu'à une question **toute simple** là, il y ait une réponse assez bizarre à la question
- R Pour la question des nombres pairs ?
- Thierry Oui
- R C'est une question toute simple ?
- Thierry Oui
- R Et la réponse te paraît bizarre ?
- Alexandre Oui
- R Même maintenant ?
- Alexandre Oui ça semble irréel
- R Ca semble irréel ?
- Alexandre C'est à l'infini, c'est bizarre
- Thierry Dans les nombres entiers il y a **toujours** les nombres pairs **plus** les nombres impairs. Et là on dit qu'il y a **autant** de nombres entiers que de nombres pairs
- R Tu es convaincu de la réponse ?
- Thierry Bien oui !

Pour Thierry la prise de conscience du paradoxe ne s'est pas faite par la seule reconnaissance d'une contradiction objective entre deux conclusions opposées, telles qu'il les formule dans sa toute dernière intervention ci-dessus. Cette prise de conscience ne se produit que parce que l'une des deux conclusions constitue une évidence si forte, si prégnante, qu'elle semblait exclure toute possibilité d'interrogation à son propos. Il apparaît ici que la prise de conscience d'une contradiction n'a rien de formel : celle-ci ne se produit vraiment que lorsqu'une conclusion reconnue vraie vient détruire une évidence stable. En outre la prise de conscience d'une contradiction n'est pas liée au conflit entre deux points de vue tel qu'il peut surgir dans une discussion : car il fait partie du jeu d'une discussion d'admettre plus ou moins un relativisme des positions confrontées, tant que l'une ne l'a pas complètement emportée sur l'autre. C'est Thierry et non Michel qui a reconnu le caractère paradoxal du problème. Et Philippe a été plus proche que Myriam de la reconnaissance d'une contradiction entre deux points de vue également valides.

II. L'OBSTACLE A LA RECONNAISSANCE DE LA BIJECTION

Avec les élèves que nous venons de citer, tout s'est passé comme si la bijection, une fois aperçue, devenait plus évidente que l'inclusion, du moins pour la comparaison entre entiers et carrés d'entiers. Et il ne s'agissait pas là d'un oubli de ce qui avait été affirmé un peu avant : ces élèves se sont trouvés en binôme, pour la plupart, avec d'autres qui maintenaient "qu'il y a des entiers qui ne sont pas des carrés d'entiers". Ce qui d'ailleurs est aussi évident, et correct que le fait que "chaque entier a son carré".

Puisque ces deux constatations permettent des inférences également légitimes soit dans le sens de l'inclusion, soit dans celui de la bijection, et que pour les élèves admettre la validité d'une conclusion entraîne le rejet de l'autre (du moins dans le cadre de nos observations), on pourrait croire qu'il n'y a aucune différence importante entre ceux qui reconnaissent la bijection et ceux qui maintiennent l'inclusion dans la seconde moitié du questionnaire. En réalité ceux qui ont maintenu le point de vue de l'inclusion, l'ont maintenu parce qu'ils ne parvenaient pas à comprendre pourquoi le fait que chaque entier ait un carré rendait possible une bijection entre les entiers et les carrés d'entiers. Cette difficulté s'est traduite par un glissement de sens au cours des explications fournies, tant pour la comparaison entre les entiers et les carrés d'entiers que pour les entiers et les pairs. Ce glissement de sens résultait de la résistance de ces élèves pour dissocier des propriétés attribuées à un même référent et donc pour considérer comme deux objets distincts ce qui par ailleurs n'en fait manifestement qu'un.

(A) LE GLISSEMENT DU VERBE "AVOIR" AU VERBE "ETRE" DANS LA COMPARAISON ENTRE ENTIERS ET CARRÉS D'ENTRIERS

Parmi ceux qui ont maintenu la réponse "plus" sur la deuxième moitié du questionnaire, tout en ayant admis que chaque entier a son carré, deux élèves ont manifesté des réactions particulièrement intéressantes : Sarah et Angélique.

Sarah n'avait pas vu d'elle-même, dans la première moitié du questionnaire, la suite des carrés d'entiers comme une suite de produits ; mais elle avait spontanément expliqué que la suite des carrés d'entiers était infinie parce que "chaque entier peut être multiplié par lui-même". Il lui est donc trivial de répondre, au début de la seconde moitié du questionnaire, que chaque entier a son carré. Les choses se compliquent lorsqu'elle se retrouve

pour la deuxième fois devant la question sur la comparaison entre entiers et carrés d'entiers. On peut distinguer cinq phases entre ce moment et celui où elle arrête définitivement sa réponse.

- 1 Achevant la lecture de la question, elle remarque d'un ton mi-interrogatif "ça a déjà été posé cette question là ?!". Puis elle reste longtemps devant cette question, alors qu'elle avait avancé rapidement, ou sans marquer d'arrêt, sur toutes les questions précédentes.
- 2 Elle coche les réponses "je ne sais pas" et elle passe à la question sur la comparaison entre les entiers et les pairs. Là elle choisit la réponse "vrai" pour l'affirmation "plus" d'entiers que de pairs et "faux" pour l'affirmation "autant" d'entiers que de pairs.
- 3 Elle revient sur la question précédente et efface les deux réponses "je ne sais pas" qu'elle avait mises devant les affirmations "plus" et "autant" d'entiers que de carrés d'entiers. Elle les remplace par les réponses "vrai" pour "plus" et "faux" pour "autant".
- 4 Elle regarde alors ce qu'Irène a répondu et lui demande :
Sarah Ecoute, je ne comprends pas pourquoi tu as mis ça là, regarde
 (elle montre la réponse "vrai" de Irène pour l'affirmation
 "autant" de carrés d'entiers que d'entiers).
Irène Si. Chaque entier a son carré !... donc il ne peut y avoir
 plus de nombres entiers que de carrés d'entiers.
Sarah Mais 37 c'est pas...
Irène Il a son carré
R 37 x 37
Sarah Oui ! mais 37 c'est pas un carré d'entiers
Irène Je pense plutôt que c'est faux (la réponse "vrai" à "plus")
 parce que chaque entier a son carré.
- 5 Après cet échange, Sarah revient à sa feuille et laisse la réponse "vrai" à "plus".

La perplexité qui s'est manifestée dans la phase 1 permet de supposer que la présentation de la correspondance bijective entre les deux suites lui a fait entrevoir un autre point de vue que celui de l'inclusion précédemment adopté dans la première moitié du questionnaire. La réponse "je ne sais pas" exprime clairement sa perplexité. Au vu d'une situation analogue plus évidente pour elle (la comparaison entre entiers et pairs), Sarah sort de sa perplexité et répond dans le sens de l'inclusion (c'est la phase 3).

Peut-on dire que^{dans} la phase de perplexité elle a entrevu ou reconnu explicitement la bijection entre les entiers et les carrés d'entiers ? La brève discussion qu'elle a avec Irène permet de penser que non. En effet comme Irène écarte le contre exemple "37 a son carré", Sarah refuse à son tour cette réponse "oui ! mais..." et elle objecte "c'est pas un carré d'entier". Si 37 a un carré, il n'est pas un carré d'entier. Autrement dit il n'y a pas pour Sarah d'inférence immédiate légitime de la proposition "chaque entier a son carré" à la proposition "il y a autant de carrés d'entiers que d'entiers". Ceux qui reconnaissent la bijection effectuent au contraire cette inférence. Irène : "si ! Chaque entier a son carré... donc il ne peut y en avoir plus". Thierry : "chaque nombre a son carré, cela veut dire qu'il y en a autant".

L'objection que Sarah oppose à l'argument d'Irène, nous le retrouvons chez d'autres élèves. Par exemple Angélique se reprend pour corriger l'expression "avoir un carré" qu'elle vient d'employer et dire "être un carré".

Angélique Je crois qu'il y a plus de nombres entiers que de carrés d'entiers

R (à Caroline)

Toi aussi ?

Caroline Oui

R Qu'est ce qui te fais penser cela ?

Angélique Parce que les carrés c'est pas... pas chaque nombre a son carré (se reprenant) pas chaque nombre est un carré...

Pas tous les nombres sont des carrés.

Et il ne s'agit pas là d'une maladresse passagère d'expression. Dans le cours ultérieur de l'échange, alors que je venais de leur montrer la correspondance terme à terme entre les deux listes, Angélique réplique : "on peut toujours dire que 3 a son carré, mais qu'est-ce que 3 il fait dans l'affaire ? 3 n'est pas carré. Il n'est carré de rien. C'est pareil pour 7...".

Ce glissement de "avoir un carré" à "être un carré (d'entier)" caractérise la démarche de ceux qui ne parviennent pas à voir la bijection. En effet la proposition "chaque entier a un carré" traduit bien le fait que chaque élément de l'ensemble départ (les nombres entiers) a une image et une seule. Pour qu'il y ait bijection il faut aussi que chaque élément de l'ensemble d'arrivée (les carrés d'entiers) soit image d'un élément de l'ensemble départ.

En se centrant sur l'ensemble d'arrivée pour vérifier cette seconde condition ("voir dans l'autre sens" selon l'expression de certains), ces élèves réintroduisent inconsciemment tous les nombres entiers dans l'ensemble d'arrivée. Ils ne peuvent plus alors que constater que "tous les entiers ne sont pas des carrés d'entiers".

On peut décomposer leur démarche en deux phases

- | | | | |
|----|---|--|------------------|
| 1) | chaque entier a un carré | $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4\dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16\dots \end{array}$ | ↓ avoir un carré |
| 2) | tous les entiers ne sont pas des carrés d'entiers | $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\dots \\ \uparrow & ? & \uparrow \\ 1\dots & 4\dots & 9\dots \end{array}$ | ↑ être un carré |

Alors que la première phase est triviale, la deuxième fait surgir un obstacle : en inversant le sens du regard, les élèves ne parviennent pas à voir les éléments de l'ensemble d'arrivée comme des éléments distincts de ceux de l'ensemble de départ. Si 4 est dans l'ensemble d'arrivée le carré de 2, il ne cesse pas pour autant d'être l'entier successeur de 3. Or "3 il n'est carré de rien..." comme le rappelle Angélique. Le non dédoublement de l'objet "nombre 4" en "entier successeur de 3" et en "carré de 2" empêche de voir la bijection.

C'est avec Philippe que cette équivoque a affleuré le plus explicitement. Rappelons qu'il avait produit de lui-même la représentation sagittale correspondant à la première phase ci-dessus. Rappelons aussi qu'il avait souligné, aussitôt après, "tous les nombres ne sont pas carrés". Et cela l'avait entraîné à dire alors "je ne sais pas". Suite à cela Thomas intervient.

Thomas Oui. Mais là pour chaque nombre il y a un carré.

Philippe Bien non. Oui, mais d'accord. Mais ce n'est pas un nombre entier à ce moment là.

R Si. Pour chaque nombre il y a un carré ; c'est ce que tu viens de dire avec tes flèches (allusion à la représentation sagittale qu'il a produite).

Philippe Oui, oui.

R Dans ce sens là, pour chaque nombre je peux trouver un carré.

Philippe Non je parlais chaque nombre a une racine
R Ah ! Là, oui, d'accord.
Philippe Je n'avais pas vu dans ce sens là.

Même réaction avec Claire. Elle refuse l'explication que Myriam lui propose pour justifier la réponse "autant".

Myriam ... sous chaque nombre, il y a un carré d'entier. Regarde là (elle montre le haut de la deuxième moitié du questionnaire : le début de la suite des carrés d'entiers y est placé sous le début de la suite des entiers).

Claire Non pas tous. 3 par exemple.

Myriam 3 fois 3, ça fait 9.

Claire Ah ! ... ça peut-être, euh... Ah mais je croyais qu'il fallait que ce soit plus petit (c'est-à-dire trouver un nombre dont 3 soit le carré).

Pour ces élèves on ne peut donc passer légitimement de la proposition "chaque entier a son carré" à la proposition "il y a autant de carrés d'entiers que d'entiers" parce qu'en se centrant sur l'ensemble d'arrivée pour voir si chaque élément est bien image, ils réintroduisent tous les nombres entiers. Que cette réintroduction résulte d'une résistance à dédoubler un même objet en fonction de deux propriétés qui lui sont habituellement attribuées, cela va clairement apparaître avec la question sur les entiers et sur les pairs.

(B) L'OPACITE DU DEDOUBLEMENT PRESUPPOSE PAR LA RECONNAISSANCE D'UNE BIJECTION ENTRE PAIRS ET ENTIERS

Nous avons vu que l'inclusion des pairs dans les entiers constituait une évidence plus forte pour les élèves que celle des carrés parfaits dans les entiers et qu'à ce titre la question d'une comparaison était plus provoquante. Pourtant la plupart ne s'en sont pas tenus à la réponse immédiate suggérée par le partage moitié-moitié des nombres entiers en "pairs **plus** pairs" ou en "pairs **et pas** pairs" : il y aurait plus, deux fois plus de nombres entiers que de nombres pairs ! Le fait que les suites à comparer soient illimitées a fait surgir un autre problème : peut-on dire qu'il y a exactement deux fois plus de nombres entiers que de nombres pairs ? Car cela supposerait qu'en commençant par 1 on sache la nature du toujours fuyant dernier terme ! Certains élèves ont ainsi rapidement glissé de la comparaison entre entiers et pairs à la comparaison entre pairs et impairs.

Philippe après avoir exprimé son étonnement devant la question (cf. p 11) et après avoir donné la réponse apparente "il y a deux fois moins de nombres pairs que de nombres entiers" se reprend : "ça dépend, à l'infini ^{ou} on s'arrête ? Il n'y a pas de fin ?". Le phénomène de l'alternance régulière pair-impair devient alors pour lui la donnée principale à partir de laquelle la réponse doit être trouvée : il pourrait se faire qu'il y ait un impair de plus ou de moins que de pairs et l'affirmation "deux fois moins" de pairs que d'entiers ne serait plus exacte. Dans ces conditions les deux questions suivantes deviennent équivalentes :

- y-a-t-il exactement deux fois moins de pairs que d'entiers ?
- y-a-t-il autant de pairs que d'impairs ?

Pour Philippe le passage de la comparaison entre entiers et pairs à la comparaison entre pairs et impairs est tout à fait naturel. On le voit dans la façon dont il est conduit à se rectifier : "il y a autant de nombres entiers euh... : impairs que pairs". Il ne faut pas se tromper sur le sens de ce repli apparent de la comparaison entre tout-partie (c'est-à-dire entiers et pairs) à une comparaison partie-partie (c'est-à-dire pairs et impairs). Cela n'a rien d'analogue à ce qu'on observe avec de plus jeunes enfants dans l'épreuve piagétienne de la quantification de l'inclusion. Car pour ces élèves il reste évident qu'il y a plus d'entiers que de pairs. Lorsqu'ils glissent vers la comparaison entre pairs et impairs, c'est d'abord pour savoir s'il y a exactement deux fois plus d'entiers.

Ce comportement de Philippe s'observe de façon aussi explicite chez Alain. Celui-ci, après avoir spontanément donné la réponse de l'inclusion ("les nombres entiers, c'est les nombres pairs plus les nombres impairs") revient sur cette réponse en remarquant "tout dépend où on finit". Et Alain oscille alors entre deux exigences incompatibles qu'il ne parvient pas à concilier : déterminer si "ça se termine par un nombre pair ou par un nombre impair" et respecter le fait que "ça ne s'arrête pas". Bien que Stéphane lui répète que cela n'a pas d'importance puisque de toutes façons il y aura plus d'entiers, les nombres pairs et impairs étant des entiers, Alain persiste dans son interrogation centrée sur le problème : exactement deux fois plus?

La suite de la discussion avec Philippe d'une part et avec Alain d'autre part révèle que ce glissement vers un problème dérivé cache un obstacle beaucoup plus important.

Comme j'attire l'attention de Thomas sur la différence entre sa réponse à la comparaison entre entiers et carrés d'entiers ("autant") et sa réponse à la comparaison entre entiers et pairs ("deux fois plus d'entiers")

Philippe réagit immédiatement :

Philippe Il y a plus de nombres entiers ... ? Bien oui évidemment.
Bien non ! Ca dépend, les nombres entiers en comptant les impairs dedans.

R Oui, dans les nombres entiers, il y a les pairs et les impairs.
D'accord.

Philippe Oh mince ! Ca, c'est bête, c'est complètement idiot. Il n'y a pas plus de nombres entiers que de nombres pairs, puisque si on prend les nombres pairs et **qu'on a plus le droit de les utiliser**, il ne reste plus que les impairs.

Thomas Bien non ! normalement...

Philippe Bien si ! Si on prend par exemple de 1 à 10, **là on sort les impairs**, allez hop ! On les sort. Toc !

Philippe ici se réfère brusquement à une règle à laquelle jamais auparavant il n'avait été fait allusion d'une façon ou d'une autre : on ne peut pas utiliser deux fois le même objet dans une comparaison. Les nombres pairs étant utilisés dans l'ensemble d'arrivée ne peuvent être présents aussi dans l'ensemble départ. Cela signifie qu'on ne peut détacher l'ensemble des pairs de l'ensemble des entiers pour le mettre en correspondance avec lui, sans, du même coup, réduire l'ensemble des entiers à l'ensemble des impairs. En d'autres termes les nombres sont un peu comme des individus qui ne peuvent jouer en même temps deux rôles différents dans la même situation. Si on peut dichotomiser un ensemble de nombres, on ne peut dédoubler ses éléments pour les opposer comme entiers et pairs, à moins d'admettre de voir l'entier pair "6" (3×2) comme un objet différent de l'entier "6" ($5 + 1$). Or le nombre représenté par l'écriture "6" est pris comme le référent commun auquel sont attribuées les deux propriétés "être entier" et "être pair". Ces élèves ne peuvent évoquer une propriété sans se référer à l'objet auquel elle s'attribue et sans penser aux autres propriétés qu'on lui attribue. Ce dédoublement d'une entité abstraite, triviale et nécessaire dans une démarche mathématique, est justement ce à quoi Philippe résiste et à quoi résistent ceux qui refusent de reconnaître la bijection.

Bien qu'il se soit trouvé dans un contexte de binôme très différent, Alain en est venu à exprimer la même résistance que Philippe . Nous avons déjà indiqué l'oscillation dans laquelle Alain se trouvait pris. Pour le

sortir de cette situation, je lui montre la possibilité d'une production synchrone de deux listes, l'une d'entiers et l'autre de pairs, sans qu'aucune "panne" ne vienne perturber cette production synchrone. Alain revient alors à son idée initiale de l'inclusion des pairs dans les entiers. Comme j'attire à nouveau son attention sur la correspondance terme à terme entre les deux listes, Stéphane intervient alors pour dire qu'on peut répondre "autant". Alain réagit à cette réponse que Stéphane vient d'avancer et dont il paraît convaincu :

"Moi ce qui m'embête le plus, c'est parce que quand on dit, bon, les nombres entiers, eh bien dans les nombres entiers, il y a les nombres pairs... Eh bien donc, il ne devrait pas y avoir de nombres pairs dans les nombres entiers... Eh bien ils y sont, **mais je trouve qu'ils ne devraient pas y être** puisqu'ils sont déjà compris dans les nombres entiers."

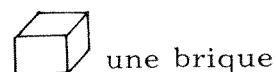
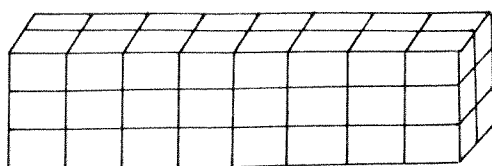
A partir du moment où l'objet "nombre entier" ne se trouve pas dissocié d'une façon ou d'une autre en deux objets distincts, il n'est plus possible d'affirmer la bijection sans enfreindre une règle qui semble aussi fondamentale que le principe de contradiction : un objet ne peut intervenir deux fois dans une comparaison, pas plus qu'on ne peut compter deux fois un même objet dans un dénombrement.

III. REMARQUES SUR L'OBSTACLE DU DEDOUBLEMENT

Ce qui a empêché les élèves de reconnaître la possibilité d'une bijection est leur résistance à dissocier les propriétés "être un entier", "être un carré d'entier", "être un nombre pair" en autant d'objets distincts permettant de constituer autant d'ensembles différents (et, dans le cadre du problème posé, équipotents). Or il ne s'agit pas d'une résistance locale particulière à la comparaison d'un ensemble infini avec l'un de ses sous-ensembles propres.

Cette résistance à dissocier les propriétés inhérentes à un objet a été observée dans d'autres situations, avec d'autres élèves de cinquième. A Bodin a proposé à des binômes d'élèves la tâche suivante :

Combien a-t-il fallu de briques pour construire ce mur ?



Sur la feuille proposée aux élèves les dimensions étaient en nombre de briques : longueur 16, hauteur 6, largeur 4.

Or dans plusieurs binômes l'énumération suivante est apparue : après avoir dénombré 16×6 sur un côté, 3 rangées seulement et non 4 étaient comptées.

A. Bodin cite à titre d'exemple l'échange suivant :

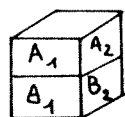
Mur. 96 par 4...

Chr. Ah, non, non, non, c'est faux... parce que là il n'y en a que trois, il y a trois épaisseurs

Mur. Il y en a 4 !

Chr. Regarde la brique comme elle est. Ca c'en est une de brique et et moi je l'ai comptée... **là c'en est une encore, c'est la même ça.**

En comptant les 16×6 rectangles qui font la surface du mur dans sa longueur, Chr. compte des faces de briques. Aussi quand il arrive aux briques de l'angle saillant du mur, briques dont on voit deux faces, Chr. refuse-t-il tout normalement de prendre en compte les briques dont une face a déjà été comptée.



La difficulté ici c'est d'oublier l'objet "cette brique A" et de considérer les deux faces de cette brique A_1 et A_2 comme deux objets distincts ! Il s'agit de dissocier ou de dédoubler l'objet brique en autant de faces visibles selon la longueur, la hauteur et la largeur. La difficulté dans cette tâche n'est pas de voir le produit $h \times l \times \text{larg}$ effectué sans problème mais de désidentifier A_1 et A_2 , B_1 et B_2 comme faces d'une même brique. De même que pour reconnaître la bijection entre les entiers et les pairs il faut oublier les objets "nombre" qui sont à la fois entiers et pairs, de même ici pour faire l'énumération exacte sur la représentation graphique ($16 \times 6 \times 4$ et non pas $16 \times 6 \times 3$) il faut oublier les briques dont on voit à la fois une face sur la longueur et une face sur l'épaisseur. C'est une résistance du même type qui se manifeste dans les deux situations : l'une portant sur la notion de volume et l'autre sur la comparaison entre un ensemble de nombres et l'une de ses parties propres. Citons pour terminer la référence à cette observation, la signification qu'A. Bodin lui accorde : "cet exercice partage nettement les enfants en deux groupes, ceux qui trouvent des difficultés et ceux qui le résolvent en une minute environ sans aucune hésitation" (6).

Cette résistance à dissocier les propriétés ou les caractéristiques d'un objet pour les traiter comme des objets nouveaux et distincts doit être rapprochée d'un autre type de réticence qui se manifeste à l'égard

d'une pratique triviale en mathématique : celle qui consiste à reconnaître le même objet sous deux dénominations ou deux représentations différentes.

Nous ne songeons pas ici à ces réactions qui peuvent facilement être observées en cinquième : refus de substituer par exemple $\frac{1}{3}$ à $\frac{3}{9}$ parce que le deuxième rapport est trois fois plus grand. Cela peut être facilement rectifiable. Nous pensons à des démarches plus explicites pour lesquelles l'entraînement ne peut créer aucun automatisme support. En voici deux exemples.

1) L'exercice suivant avait été proposé dans une classe de seconde technique.

Soient A, B, C, 3 points quelconques du plan. Soit M un point du plan.

Construire $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$

$$M'' = t_{\overrightarrow{BC}}(M')$$

$$P = t_{\overrightarrow{AC}}(M).$$

Que remarquez-vous ?

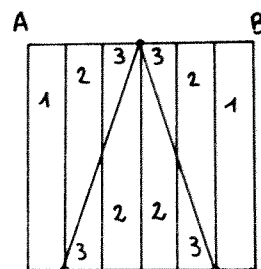
Une élève obtient d'abord M'' , puis elle construit P. Constatant que ce point vient se confondre avec M'' , elle dit : "Zut !", s'arrête puis prend sa gomme pour effacer. Je lui demande pourquoi elle pense s'être trompée. Elle me répond : "parce qu'un point ne peut avoir deux dénominations". Et dans le dialogue qui s'engage, il apparaît que c'est la possibilité de pouvoir écrire $P = M''$, et donc de remarquer la transitivité de la composition de deux transformations qu'elle ne comprend pas et qu'elle refuse.

2) Le problème suivant avait été proposé à des élèves de cinquième.

Faire une partition du carré en trois parties égales, en partant du milieu de côté AB.

Un élève arrive à la solution suivante.

Il explique alors à son professeur pourquoi cette solution marche : il montre du doigt les morceaux superposables. Rien n'est alors encore inscrit sur son dessin. Comme le professeur lui demande s'il peut expliquer sa solution sans montrer du doigt et



sans se contenter de dire "ça c'est pareil que ça", il note alors avec le même signe, 1, 2 ou 3 les morceaux qui sont pareils ou superposables et

il s'arrête ne sachant plus quoi faire. Les morceaux d'aire égale étant d'emblée confondus dans la même dénomination, il ne peut plus exprimer le "ça pareil que ça" dans une égalité indépendante du geste qui montre. L'introduction de dénominations différentes lui était inconcevable pour des morceaux qu'il savait "pareils".

Admettre ou donner, au moins provisoirement, deux dénominations distinctes à un objet qu' éventuellement deux procédures distinctes permettent de produire peut apparaître incompréhensible ou inutilement arbitraire quand on sait qu'il s'agit du même objet. Tout se passe pour une partie des élèves comme si cette multiplication arbitraire n'avait pour effet que de rendre labiles les objets dont on parle et ceux que la pensée peut saisir. Là commence la **transparence obscure** des démonstrations ou des explications estimées les plus simples ou les plus élémentaires du point de vue mathématique.

Ce que nous avons appelé la difficulté du dédoublement de l'objet ne peut donc être restreint à la difficulté particulière d'une notion ou d'un concept. C'est à chaque pas nouveau de l'apprentissage que certains élèves se retrouvent désorientés par cette exigence sans repères : séparer des propriétés ou des caractéristiques jusque là fortement associées à un même objet, ou attribuer des dénominations et des représentations différentes à un objet que l'on pense être le même. Pour certains élèves cela semble se faire sans difficultés, pour d'autres cela crée une opacité dans ce qui est exprimé. On peut se demander si l'accès à cette possibilité de dédoublement n'éclaire pas nombre d'obstacles et de piétinements dans l'apprentissage des mathématiques à partir de la cinquième, leur accumulation constituant rapidement un seuil de blocage. On peut se demander aussi s'il n'y a pas là un aspect spécifique de la pensée formelle dont les épreuves piagétienne ne peuvent détecter la présence ou l'insuffisant développement.

RETOUR AU PROBLEME DE L'INFINI

Il n'est peut-être pas inutile de revenir en arrière sur le problème initial posé aux élèves pour faire le point sur ce qui a été observé concernant la notion de l'infini.

Pour tous les élèves est infini "ce qui ne s'arrête pas". Cette détermination suffit pour saisir et justifier l'infini potentiel non seulement de la suite des entiers mais de la suite des carrés d'entiers. Cette détermination négative permet aussi d'accéder à la notion d'infini actuel. En effet ce qui ne s'arrête pas est inépuisable : on peut toujours en prendre, il y en aura toujours "plein, plein, plein" selon l'expression de Philippe. Cette idée d'inépuisabilité permet aussi de neutraliser la signification de diminution habituellement associée à celle de retranchement. Avec une feuille supplémentaire présentée après le questionnaire (et l'année suivante avant le questionnaire), nous avons pu vérifier que pour tous les élèves de cinquième l'opération $\infty - n = \infty$ était évidente (n étant une quantité aussi grande qu'on veut). Mais cette idée d'inépuisabilité n'est plus opérante quand elle porte sur le partage indéfini d'un segment et non plus sur une suite illimitée d'entiers. Le continu offre un autre genre de difficultés.

Quand les élèves de cinquième reconnaissent la bijection entre un ensemble infini et l'un de ses sous-ensembles propres, l'évidence de la bijection se révèle plus forte que celle de l'inclusion, de sorte qu'ils ne prennent pas pleinement conscience du caractère paradoxal de la situation. L'idée, ou "l'axiome", que le tout est plus grand que la partie apparaît ici moins première et moins naturelle qu'on pourrait le croire (7). La difficulté particulière de la comparaison entre entiers et pairs tient à l'arithmétisation rudimentaire que la signification du terme "pair" entraîne de façon réflexe. Un des obstacles à la reconnaissance de la bijection est ailleurs.

Les résultats de notre premier travail ont montré une évolution de la cinquième à la troisième concernant la proportion d'élèves qui reconnaissent la bijection : de $1/2$ à $3/4$ ou de $1/4$ à $2/3$ selon le critère adopté (la question entier - carrés d'entiers ou son extension à la question entier - cubes d'entiers). Comment expliquer cette évolution apparente ? Faut-il admettre que la proportion des élèves qui résistent au dédoublement a diminué ou faut-il

admettre qu'un plus grand entraînement a permis à plus d'élèves de voir spontanément la suite des carrés d'entiers comme une suite de produits ? Dans cette seconde hypothèse, celle vers laquelle nous inclinons, il n'y aurait qu'un contournement local de l'obstacle du dédoublement. S'il y a une évolution de la cinquième à la troisième, elle serait moins à chercher dans l'atténuation de l'obstacle du dédoublement que dans une prise de conscience plus nette de la contradiction où conduit la comparaison entre entiers et carrés d'entiers. Or, si nous ne nous trompons pas, la démarche et le raisonnement mathématiques n'exigent pas seulement une sensibilité vive aux contradictions possibles mais une certaine aptitude à dissocier des significations habituellement attribuées à un même objet, et à reconnaître l'identité d'un même objet dans des dénominations et des expressions différentes.

- (1) En marge d'un texte de Galilée sur l'infini - Publications de l'IREM, 1980 (en collaboration avec un groupe de professeurs)
- (2) Les effectifs étaient 77 élèves en 3e, 105 en 4e, 62 en 5e.
- (3) Du point de vue mathématique, l'ensemble $\mathbb{C}P$ des carrés parfaits est équipotent à \mathbb{N} et $\mathbb{C}P$ est une partie stricte de \mathbb{N} . Les difficultés s'introduisent lorsqu'on utilise les mots "autant", "plus" et "moins". Les mathématiciens tolèrent que l'on dise : "deux ensembles équipotents ont autant d'éléments", mais ils refusent l'ancien traditionnel "«e tout est plus grand que la partie "stricte", ou encore "il y a moins d'éléments dans la partie que dans le tout". Depuis Lejeune-Dirichlet ils adoptent la **définition** suivante : "un ensemble est infini lorsqu'il est équipotent à l'une au moins de ses parties strictes". Ainsi tout est correct dans l'argumentation de Galilée selon l'axiomatique des ensembles, à l'exception de l'implication : inclusion stricte \Rightarrow moins d'éléments. En rejetant cette implication la contradiction disparaît.
- (4) E. Fischbein "The intuition of infinity" - Educational Studies in Mathematics 10 (1979) 3-40
- (5) Voici la liste des binômes selon l'ordre chronologique de passation mai-juin 1981 :
- Philippe et Thomas
Pascale et Carole
Stéphane et Alain
Sarah et Irène
Myriam et Claire
Michel et Adbel
Alexandre et Thierry
Nadia et Adi
- juin 1982
- Caroline et Angélique
Maria et Nathalie
- Nous n'avons retenu que deux entretiens parmi ceux passés en 1982 à titre de confirmation.
- (6) A. Bodin "Mise au point d'un questionnaire - Observation" IREM de Besançon, p. 25
- (7) Voir plus haut, note 3.

Feuille 1

①. Pour vous, que signifie "infini" ? Y-a-t-il des choses qui pour vous sont "infinies" ?

②. Dans la liste des 70 premiers nombres entiers, entourez ceux qui sont des carrés d'entiers (c'est-à-dire un entier mis au carré)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

③. Combien, dans cette liste y-a-t-il de carrés d'entiers ?

④. Si on avait prolongé cette liste jusqu'à:

100	10.000	100.000.000
-----	--------	-------------

Combien auriez vous entouré de carré d'entiers ?

. Si on considère tous les nombres entiers,
 - Leur quantité est très, très grande, mais finie OUI NON Je ne sais pas
 - infinie
 Dites pourquoi .

. Si on considère tous les carrés d'entiers,
 - Leur quantité est très très grande mais finie OUI NON Je ne sais pas
 - infinie
Parmi tous les nombres entiers, sans limite,

il y a :
 - plus de nombres entiers que de carrés d'entiers OUI NON Je ne sais pas
 - autant de nombres entiers que de carrés d'entiers

Feuille 2

I Imagine une machine qui affiche les nombres entiers sans jamais s'arrêter.
Imagine une autre machine qui affiche les carrés d'entiers sans jamais s'arrêter.

Première machine : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...
Deuxième machine : 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 ...

- Y-a-t-il des nombres très très grands pour lesquels la deuxième machine ne pourra trouver le carré ?

- Pourquoi ?

- Chaque entier a-t-il son carré ?

II Si on compare l'ensemble de tous les entiers $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
avec l'ensemble de tous les carrés d'entier $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$

- L'ensemble des nombres entiers a plus d'éléments que l'ensemble des carrés d'entier

VRAI	FAUX	Je ne sais pas
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Pourquoi ?

- L'ensemble des nombres entiers a autant d'éléments que l'ensemble des carrés d'entiers

VRAI	FAUX	Je ne sais pas
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Pourquoi ?

III Si on compare l'ensemble de tous les entiers $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
avec l'ensemble des nombres pairs $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

- L'ensemble des nombres entiers a plus d'éléments que l'ensemble des nombres pairs

VRAI	FAUX	Je ne sais pas
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Pourquoi ?

- L'ensemble des nombres entiers a autant d'éléments que l'ensemble des nombres pairs ?

VRAI	FAUX	Je ne sais pas
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Pourquoi ?