
CANARDS

par Francine DIENER

Le terme de canard était à l'origine le "petit nom" employé dans notre groupe à Oran^(*) pour désigner certaines solutions périodiques de systèmes différentiels du plan dont la forme, avec un peu d'imagination, évoque celle d'un canard. Si de telles dénominations "farfelues" pour des objets usuels sont fréquentes dans une équipe, elles font généralement place, après quelque temps, à des termes plus canoniques (mais moins pittoresques...). Cela n'a pas eu lieu pour les canards, un peu sans doute à cause du casse-tête qu'ils posèrent à leur naissance.

Des raisonnements géométriques simples nous avaient en effet convaincus de la présence de canards dans la famille de systèmes étudiée, pour certaines valeurs d'un paramètre, voisines de 1. Mais toutes les études sur ordinateur ou microordinateur entreprises fournissaient obstinément des tracés de solutions distincts des canards attendus. Cette "chasse au canard" ne prit fin qu'après une étude théorique complémentaire^(**) qui permit, entre autres, de préciser le nombre (très grand) de chiffres significatifs nécessaires pour trouver une valeur à canards (voisine de 1) du paramètre.

Le système étudié ci-dessous n'est pas le système original. Pour cette raison, ses canards n'ont plus la forme évocatrice qui leur valut leur nom. Il est cependant l'un des exemplés les plus simples de système différentiel du plan où l'on peut mettre en évidence des canards et observer à loisir leurs propriétés.

Quelles sont les caractéristiques et le milieu naturel de ces petits animaux ? Il s'agit de solutions spéciales (plus précisément de trajectoires spéciales dans le plan) de systèmes dit lents-rapides parce que leurs solutions présentent alternativement des phases lentes et des phases rapides. De tels systèmes se rencontrent couramment (le remplissage lent et l'évacuation rapide d'une chasse d'eau est, par exemple, de ce

(*) Ce groupe comprend BEBBOUCHI, BENOIT, Van den BERG, CALLOT, DIENER (M. et F.) et SARI (T. et N.)

(**) publiée dans BENOIT, CALLOT, DIENER, DIENER, "Chasse au canard", Collectanea Mathematica XXXI, Fas.3 (1980)

type). Pour rendre compte effectivement de tels comportements, il est utile de disposer de nombres de divers ordres de grandeur. C'est G. REEB^(*) qui a eu l'idée d'utiliser pour cela l'analyse non-standard. Elle fournit en effet la possibilité de distinguer parmi les réels des nombres infiniment petits, limités, infiniment grands, etc... avec toutes les facilités souhaitables de manipulation. Les canards doivent leur existence à ces facilités nouvelles. Et bien que les tout premiers canards aient été des objets tout à fait non standard, on ne sera pas surpris de les voir apparaître à présent dans un système différentiel standard tel que celui que nous étudions ci-dessous. Cette étude prend ici la forme du récit d'une expérience numérique que l'on peut réaliser facilement à l'aide d'un microordinateur^(**). Le résultat est constitué de cinq tracés (Figure 6) qui ont été réduits pour pouvoir être vu simultanément.

1. Présentation du problème

On porte son attention sur l'équation différentielle non linéaire:

$$(1) \quad \ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$$

Plutôt que de considérer les graphes de solutions $x(t)$ de cette équation, on préfère généralement, pour avoir une meilleure vue d'ensemble, étudier les courbes

$(x(t), y(t) = \dot{x}(t))$ solutions du système différentiel associé

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(x+y)^2 \end{cases}$$

L'intérêt se porte alors sur le portrait de phase de l'équation, c'est-à-dire le dessin formé par quelques unes de ses trajectoires représentées dans le plan (x,y) et choisies de telle sorte qu'en examinant ce dessin, il soit possible de déduire le tracé approximatif des autres trajectoires. Généralement, il suffit d'en tracer peu, mais convenablement choi-

(*) G.REEB., Bull. de l'APM; n° **328**.

(**) J'ai utilisé pour ma part un HP 9825 avec table traçante, mis à ma disposition par l'Université d'Oran, puis par le Centre universitaire de Tlemcen.

sies, pour avoir une idée du comportement d'ensemble.

La détermination du portrait de phase d'une équation analogue à (1) est un exercice intéressant (et pas toujours facile) mais ce qui l'est beaucoup plus encore, c'est l'étude de l'évolution d'un tel dessin lorsqu'on perturbe légèrement l'équation différentielle. Pour des raisons qui s'attachent à la théorie des canards, on savait l'équation (1) très sensible aux petites perturbations. C'est précisément cette sensibilité que nous avons voulu tester à l'aide du microordinateur. Plus précisément, l'objectif était d'étudier l'évolution du portrait de phase de (1) sous l'effet d'une perturbation du type suivant :

$$(3) \quad \ddot{x} + (\dot{x}+a)^2 + x = 0$$

où a est un paramètre réel supposé petit. Pour cela nous avons fait tracer sur l'ordinateur quelques trajectoires du système différentiel perturbé

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - a \\ \dot{y} = -(x+y)^2 \end{cases}$$

pour les valeurs suivantes de a

$$a = 0, a = 10^{-8}, a = 10^{-6}, a = 10^{-4} \text{ et } a = 10^{-2}$$

2. Ce que l'on sait (ou croit savoir) avant l'expérience

Avant de "lancer" le microordinateur pour un calcul de ce type, l'expérimentateur a presque toujours une idée du type de résultat qu'il compte obtenir. Le plus souvent il doit par la suite la remettre en cause (c'est ce qui fait l'intérêt de telles expériences). Mais au minimum cette idée permet, au début de l'expérience, d'éliminer des résultats "farfelus" dus, par exemple, à des erreurs de programme.

Que savons-nous au départ des portraits de phase étudiés ?

- Cas $a = 0$: dans le cas du système non perturbé, le portrait de phase n'est pas inconnu (figure 1), car le système peut tout simplement être résolu. Si on l'écrit en effet sous la forme :

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = - (x+y)^2$$

on reconnaît une équation de Bernouilli (ou ici une équation

Fig. 1: portrait de phase de l'équation (1) tiré du livre de Andronov (A.A.) Vitt (A.A.) et Khaikin (S.E) "Theory of oscillators" Pergamon Press, 1966.

Deux trajectoires jouent des rôles particuliers : le point stationnaire 0 et la parabole P d'équation $y^2 = 1/2 - x$. A l'intérieur de P les trajectoires sont toutes fermées et entourent 0. A l'extérieur, elles contournent P et sont parcourues de haut en bas.

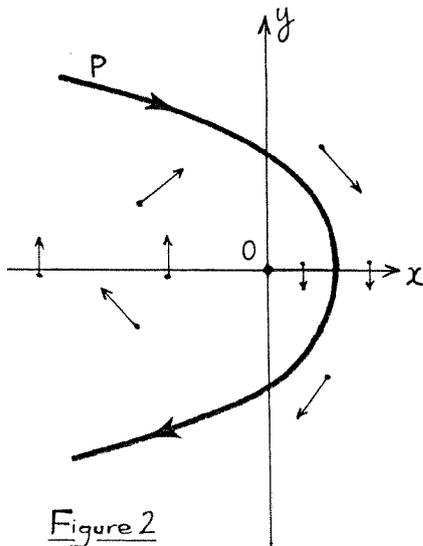
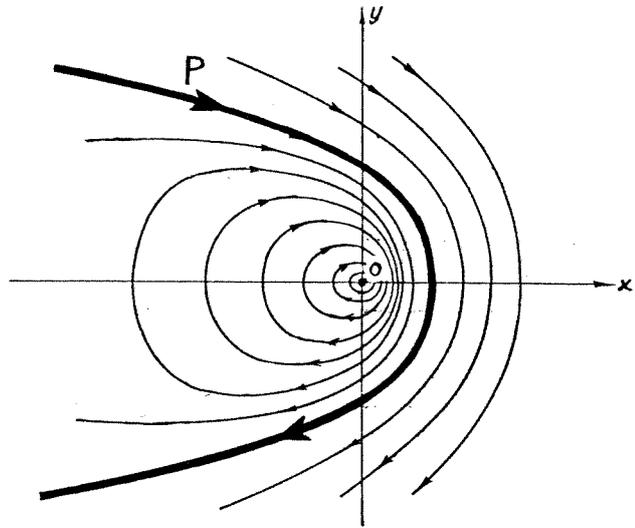


Figure 2

linéaire en y^2) qui s'intègre par les méthodes habituelles. Les trajectoires recherchées ont donc pour équation

$$(5) \quad y^2 = C e^{-2x} + 1/2 - x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Notons cependant que, puisqu'on ne s'intéresse qu'au comportement qualitatif des trajectoires et non à leur position exacte, on peut également déterminer le portrait de phase dans ce cas sans recours à une intégration explicite, grâce à quelques considérations géométriques simples.

On trace tout d'abord le point 0 et la parabole P d'équation $y^2 = 1/2 - x$ qui correspondent aux deux solutions "évidentes" de l'équation ($x(t) \equiv 0$ et $x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}$)

On note que sur l'axe $y = 0$, les trajectoires présentent une tangente verticale et qu'elles montent ou descendent et sont dirigées vers la droite ou la gauche selon qu'elles sont contenues dans l'une des quatre régions délimitées par la droite $y = 0$ et la parabole P (Figure 2). Enfin, et c'est la remarque la plus importante, on observe que les trajectoires sont symétriques par rapport à l'axe $y = 0$. Le portrait de phase cherché résulte immédiatement de ces quelques remarques.

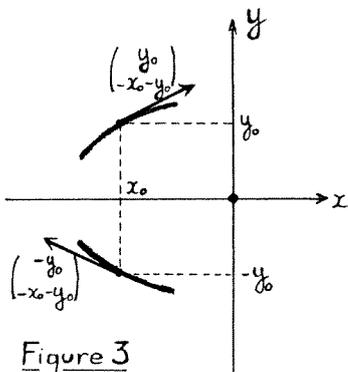


Figure 3

• Cas $a \neq 0$: le cas du système perturbé (4) ne semble pas avoir été étudié jusqu'ici. Notons tout d'abord que l'intégration explicite ne peut se généraliser, pas plus que les consi-

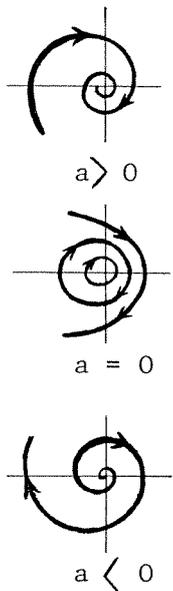


Fig. 4

(*) En vertu des théorèmes classiques de dépendance continue par rapport au paramètre

dérivations de symétrie invoquées ci-dessus. Il n'est donc pas facile de prévoir ce qui va changer dans le dessin lorsque a sera non nul. On peut toutefois s'assurer que le système perturbé possède, comme le système initial, un unique point stationnaire, voisin de 0 pour a petit. Par contre rien n'indique la présence lorsque $a \neq 0$ d'une trajectoire particulière jouant, comme P, le rôle d'une séparatrice. Par ailleurs, on peut prévoir, sans grand risque d'erreur, que les trajectoires fermées vont se transformer en spirales, de pas d'autant plus fins que a est petit. De fait une étude locale des trajectoires au voisinage du point stationnaire, utilisant l'approximation linéaire du système, révèle, pour a voisin de 0 et x et y assez petits, des spirales s'enroulant vers le point stationnaire ou au contraire se déroulant, selon le signe de a . Quant au comportement global, s'il est certain (*) que, pour a suffisamment petit, le déplacement des trajectoires doit rester faible, la difficulté principale vient de ce qu'on ignore à quels ordres de grandeur correspondent les locutions "suffisamment petit" ou faible. Par exemple, est-il raisonnable de penser qu'une variation de a de quelques centièmes ou millièmes entraîne un déplacement des trajectoires de quelques millimètres ou s'agira-t-il plutôt de centimètres?

3. Résultats numériques

On confie à présent le soin à un microordinateur muni d'une table traçante (ou d'un écran) de déterminer quelques trajectoires du système (4) pour diverses valeurs de a . On utilise pour cela un programme élémentaire d'intégration pas à pas, utilisant l'algorithme de Runge-Kutta (voir encadré). On choisit de tracer les trajectoires issues des points des droites $y = +5$ (intégration dans le sens direct ($h > 0$)). $y = -5$ (intégration à reculons ($h < 0$)) et $y = 0$ ($h > 0$ et $h < 0$) d'abscisses respectives -11, -9, -7, -5, -3 et -1. Avec l'ordinateur utilisé, le temps nécessaire pour tracer une trajectoire dans les limites de la figure est de une à deux minutes.

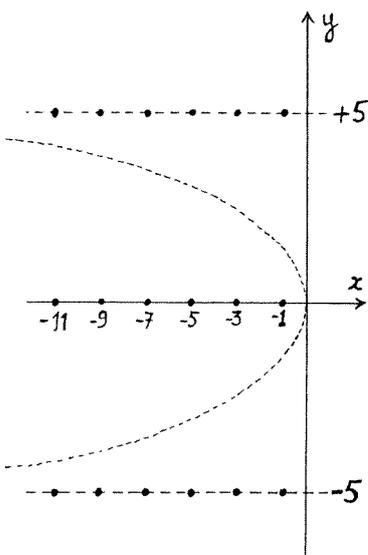


Figure 5

ALGORITHME

DE

RUNGE-KUTTA

Il existe de nombreux algorithmes permettant de déterminer pas à pas une solution approchée d'une équation différentielle. L'un des meilleurs et des plus courants est dû à Runge et Kutta. Dans le cas d'une équation différentielle du 2e ordre du type $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, on procède de la façon suivante: on choisit un pas $\Delta t = h$ (par exemple $h = 0,01$) et une condition initiale $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$. Et on calcule successivement $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ de la manière suivante :

On pose :

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h f(x_i + hy_i/2 + hk_1/8, y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = h f(x_i + hy_i/2 + hk_1/8, y_i + k_2/2)$$
$$k_4 = h f(x_i + hy_i + hk_3/2, y_i + k_3)$$

puis :

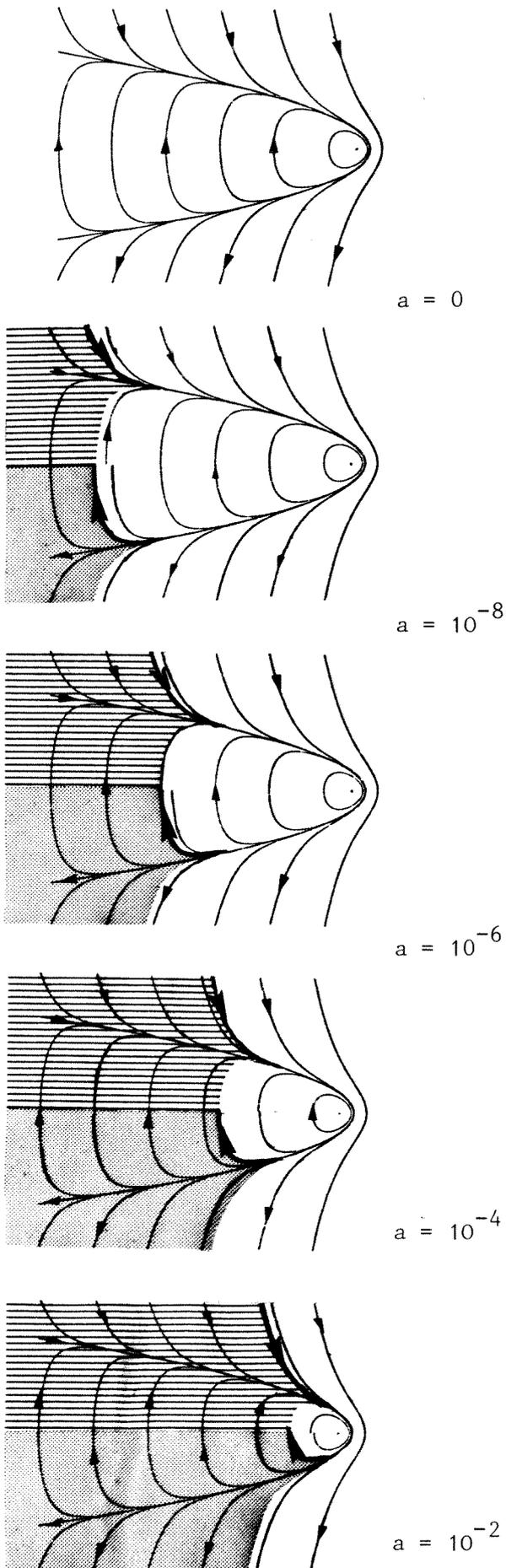
$$x_{i+1} = x_i + h(y_i + (k_1 + k_2 + k_3) / 6)$$
$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$$

La figure 6 montre les cinq tracés obtenus . Les valeurs de a choisies sont toutes positives ou nulles car les tracés correspondant à des valeurs négatives s'en déduisent facilement par symétrie par rapport à l'axe $y = 0$ et inversion du sens de parcours. Qu'observe-t-on sur ces tracés ?

(voir pages suivantes)

1) le fait remarquable est l'apparition, lorsque $a \neq 0$, de deux zones dépendant de a . Une zone située à droite où le comportement des trajectoires ne varie quasiment pas avec a : on peut même vérifier que les trajectoires de cette zone, pour $a < 0,01$, se superposent parfaitement (sauf celles qui sont trop proches de la frontière avec la deuxième zone). La zone située à gauche (ombrée ou hachurée) est constituée de deux entonnoirs (Figure 6). Ils forment un rideau qui se referme progressivement jusqu'à recouvrir toute la parabole.

Figure 6



Les cinq tracés. Sur le premier tracé on voit que la réalité est bien plus caricaturale que la figure 1. Il apparaît que les courbes d'équations (5) sont si proches les unes des autres lorsqu'elles longent la parabole P qu'elles semblent confondues (mais ne le sont évidemment pas). Malgré cela, il est facile de suivre le tracé de chaque trajectoire car on sait qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe horizontal. Les trajectoires sont des canards parce qu'elles longent tout d'abord la partie supérieure de P qui est attractive puis la partie inférieure qui est répulsive. On peut aussi évaluer sur ce tracé et les suivants la fonction, dite entrée-sortie (figure 8), en mesurant l'ordonnée du point où une trajectoire vient se confondre avec P et en lui associant celle du point où elle s'en écarte à nouveau. Pour $a = 0$, cette fonction est tout simplement une symétrie.

Sur les tracés suivants apparaissent les entonnoirs (figure 7). Le premier (hachuré) est constitué des trajectoires, venant se confondre avec P en des points d'ordonnée supérieure à une ordonnée critique \bar{y} et qui s'en séparent toutes à peu près au même point d'ordonnée $-\bar{y}$; le second (ombré) est constitué des trajectoires venant se confondre avec P à proximité du point d'ordonnée \bar{y} pour la quitter en l'un des points d'ordonnée inférieure à $-\bar{y}$. En dehors de ces deux entonnoirs le portrait de phase est quasi inchangé par rapport au cas $a = 0$. Ces deux entonnoirs constituent le rideau qui vient progressivement, lorsque a augmente, recouvrir toute la parabole. Ce mouvement de rideau se traduit, au niveau de la fonction entrée-sortie, par l'apparition d'un palier qui, en s'agrandissant, transforme progressivement cette fonction en une fonction constante.

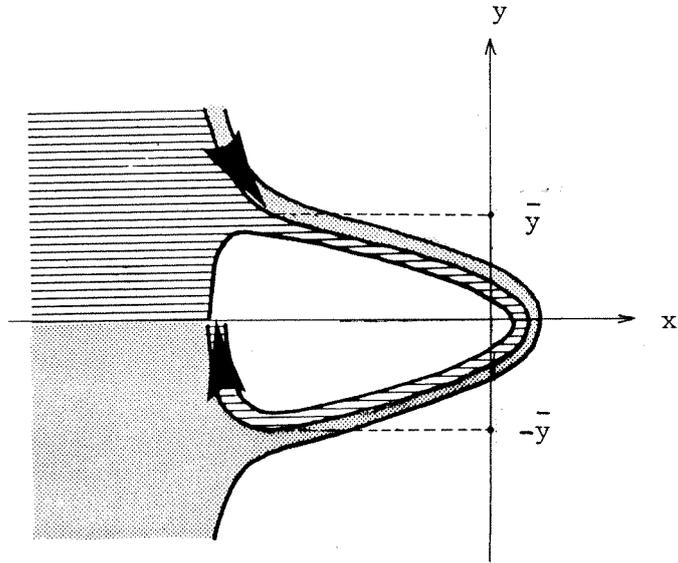


Fig 7 : Les deux entonniers et leur goulot (hachuré et ombré). Les trajectoires n'appartenant pas à ces entonniers sont quasi inchangées par rapport au cas $a = 0$ (presque symétriques par rapport à l'axe horizontal).

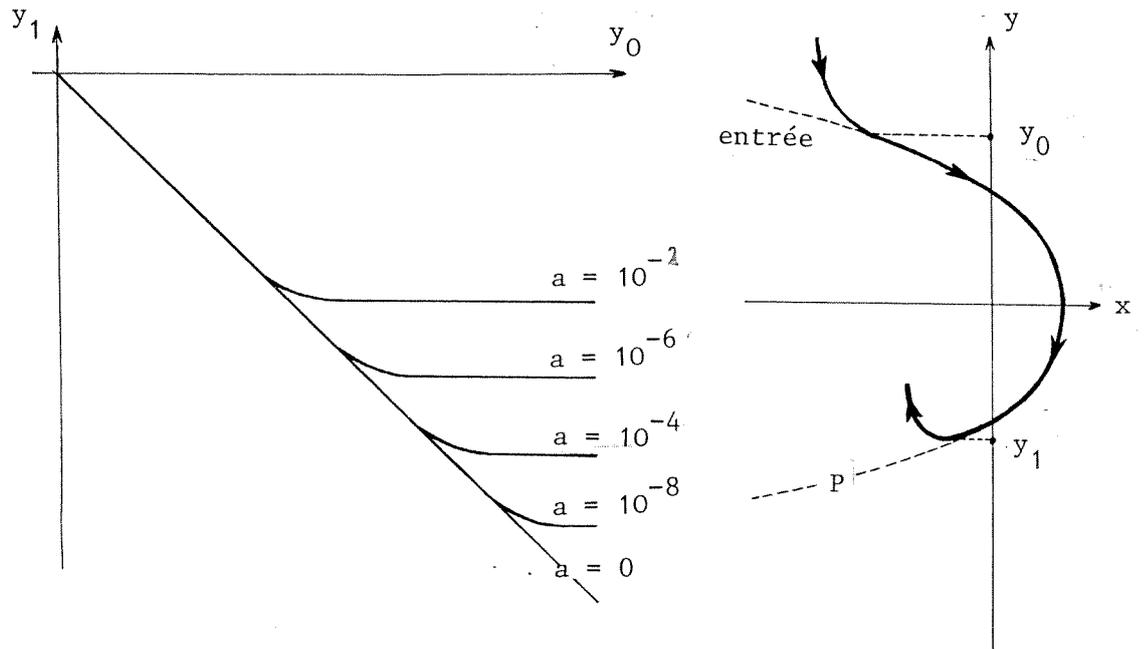


Fig 8 : La fonction entrée-sortie

2) Un autre fait remarquable est la très grande brutalité du phénomène: entre $a = 0$ et $a = 10^{-8}$ par exemple, le comportement des trajectoires issues de points situés dans les entonniers varie du tout au tout (plusieurs centimètres sur les portions de trajectoires tracées). De même il suffit d'une variation de 0 à 0,01 de a pour que le rideau se referme de l'infini jusqu'à proximité du sommet de la parabole. Lorsque le rideau est complètement fermé, il n'existe plus de canards, c'est-à-dire de trajectoires qui suivent d'abord la partie attractive de P puis sa partie répulsive: on dit que les canards ont la vie brève.

3) Le comportement caricatural des trajectoires, qui semblent se confondre passagèrement les unes avec les autres, peut surprendre au premier abord. Il provient en fait de l'extrême croissance de la fonction exponentielle, toujours difficilement concevable (on s'en convainc par exemple en réexaminant attentivement l'équation des trajectoires (5) dans le cas où $a = 0$). Un tel comportement pourrait cependant jeter un doute sur la validité des résultats numériques obtenus. En effet dans une région où un grand nombre de trajectoires passent très proches les unes des autres, une erreur numérique, même petite, pourrait avoir des conséquences graves. Cependant la fidélité du tracé pour $a = 0$ permet de se rassurer au moins dans ce cas; en particulier le tracé des trajectoires situées dans la parabole et qui sont fermées est effectivement celui d'une courbe fermée. De plus, nous verrons au paragraphe suivant que les résultats théoriques viennent également confirmer les tracés obtenus pour $a \neq 0$. Ceci n'est pas surprenant car la précision des calculs (10^{-12} pour l'ordinateur utilisé) est bien supérieure à celle du trait de crayon feutre.

4. Intervention de l'analyse non standard⁽¹⁾

L'un des intérêts de l'étude numérique présentée ici vient de ce que les phénomènes observés peuvent être expliqués par une étude non standard de l'équation étudiée (en fait, dans le cas présent, l'étude non standard avait précédé

(1) L'étude non standard évoquée ici est tirée de "les canards de l'équation : $\ddot{y} + (\dot{y}+a)^2 + y = 0$ ".
F.DIENER, Publ. IRMA (1980)

l'expérience dont l'objectif fut, en réalité, de tester les résultats obtenus).

A priori, on ne voit pas très bien où peut intervenir l'analyse non standard dans ce problème. Le petit raisonnement suivant y conduit naturellement : tout d'abord, notons que les phénomènes observés apparaissent pour des valeurs très petites de a . Il est donc naturel de s'intéresser aussi à des valeurs infiniment petites non nulles. Mais dans ce cas, quelque soit la valeur infiniment petite choisie, la modification du tracé, par rapport au cas $a = 0$ est imperceptible. En effet, on sait ⁽¹⁾ que lorsque deux systèmes différentiels (presque standard) sont infiniment voisins, leurs trajectoires respectives, issues du même point, restent infiniment voisines (dans toute partie limitée du plan, c'est-à-dire, pourvu qu'elles n'atteignent pas des points de coordonnées infiniment grandes). Deux dessins correspondant respectivement à $a = 0$ et a infiniment petit seront donc quasi identiques dans la partie visible du plan. Par contre, rien n'exclut qu'ils diffèrent nettement en des points de coordonnées infiniment grandes. Compte tenu de la disposition de la parabole, il est probable que, s'il existe des comportements intéressants lorsque a est infiniment petit, ils se produisent en des points d'abscisse grande et négative. Or l'étude numérique montre que, pour a petit, c'est précisément dans cette région que des phénomènes apparaissent. Ceci conduit à l'idée d'aller examiner de plus près ce qui se passe en de tels points infiniment éloignés. Pour cela, on utilise un macroscope ⁽²⁾ : on se donne un réel infiniment petit positif ε et on considère le changement d'échelle

$$X = \varepsilon x$$

Il permet de voir à distance non infiniment grande des points dont l'abscisse était de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. De plus, pour ne pas changer la forme de la parabole P , on pose

$$Y = \sqrt{\varepsilon} y$$

On est ainsi amené à étudier un système différentiel non standard

(1) C'est un résultat facile à admettre car il est très naturel. Il est connu sous le nom de Lemme de l'ombre courte (voir la thèse de l'auteur, Strasbourg, 1981)

(2) voir "Etude qualitative de systèmes différentiels: une approche basée sur l'Analyse Non Standard". A.TROESCH, Thèse, Strasbourg, 1981.

(puisque ε est infiniment petit), image de (4) par le microscope :

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{X} = Y - A \\ \dot{Y} = -\frac{1}{\varepsilon} (Y^2 + X) \end{cases}, \text{ avec } A = \sqrt{\varepsilon} . a$$

Le portrait de phase d'un tel système a un aspect très caricatural : les trajectoires sont en effet constituées exclusivement de portions quasi verticales et de portions longeant d'infiniment près la parabole \square d'équation $X = Y^2$. En particulier l'image de P à cette échelle (qui a pour équation $X = Y^2 + \varepsilon/2$) est une parabole infiniment proche de \square . C'est cet aspect caricatural (tenant au fait que ε est infiniment petit) qui rend possible une étude exhaustive de ces portraits de phases, pour toutes les valeurs limitées de A. Pour cela, les comportements étant évidents aux points non infiniment proches de \square , il suffit d'utiliser un microscope convenable (on pose $Z = \left[\frac{Y^2 + X}{\varepsilon} - 1/2 \right]^{1/\varepsilon}$) pour "démêler" la situation à proximité de \square . L'examen des trajectoires à travers ce microscope permet de déduire facilement leurs comportements selon les valeurs de A (figure 9). Sur ces dessins, on retrouve les deux entonnoirs formant rideaux et le mouvement de fermeture de ce rideau lorsque A croît. On peut, plus précisément, calculer l'ordonnée critique \bar{y} en fonction de A par la formule suivante

$$A = \exp(2\bar{y}^2 / \varepsilon)$$

Il est intéressant de noter que cette formule fournit, pour $\varepsilon = 1$, une excellente approximation de la valeur expérimentale de \bar{y} tirée des tracés numériques (figure 6).

Figure 9 : évolution du portrait de phase du système (6) lorsque A croit. Les "goulots" d'entonnoirs qui se longent d'infiniment près ont été représentés distincts pour plus de clarté.

