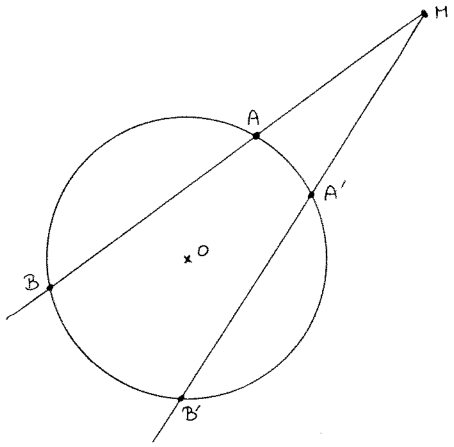
"MAIS ILS ONT PLEIN D'IDEES"

Francis JAMM

Fin mars, j'ai donné dans deux classes de 2e T le problème suivant :



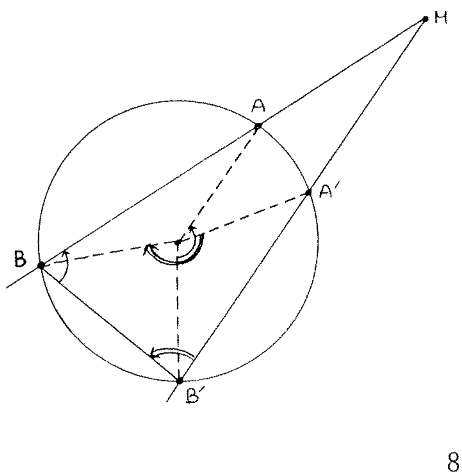
M étant un point extérieur au cercle de centre O, démontrer que :

$$2\,(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}})$$

La question me semblait assez difficile mais somme toute anodine; or, j'étais loin de me douter de la richesse qu'elle recelait. La difficulté principale consiste à remplacer $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}})$ par un angle plus directement utilisable (angle inscrit...), c'est là que j'ai été surpris par la diversité des solutions proposées par les élèves; en effet, presque toutes les méthodes vues en cours ont été utilisées.

(Pour alléger l'écriture, on notera $\widehat{BAC}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$
$\hat{p}$ désignera l'angle plat)

1° <u>La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat</u> .



En considérant le triangle MBB' on remplace $\widehat{AMA'}$ par deux angles inscrits :

$\widehat{AMA'} = \hat{p} - \widehat{B'BA} - \widehat{A'B'B}$ (1)

On utilise le théorème de l'angle inscrit :

$2\,\widehat{B'BA} = \widehat{B'OA}$

$2\,\widehat{A'B'B} = \widehat{AOB}$

Par la relation de Chasles : $2\,\widehat{B'BA} + 2\,\widehat{A'B'B}$

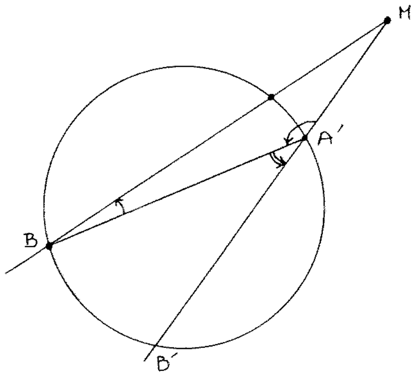
$$= \widehat{B'OA'} + \widehat{A'OA} + \widehat{A'OB'} + \widehat{B'OB}$$

$$= \widehat{A'OA} + \widehat{B'OB}$$

En remplaçant dans (1) $\quad 2\,\widehat{AMA'} = 2\,\hat{p} - \widehat{A'OA} - \widehat{B'OB} = \widehat{AOA'} + \widehat{B'OB}$

- Plusieurs élèves ont suivi cette démarche mais n'ont pas su utiliser la relation de Chasles. Ils ont introduit les triangles isocèles OBB' et OAA' puis se sont servis des égalités angulaires qui en découlent.
Cette méthode est bien plus longue (2 pages) et l'on ne peut que féliciter les élèves qui ont su la mener à son terme.

- Dans le même ordre d'idées certains élèves ont utilisé un autre triangle que MBB'; par exemple, le triangle MBA'. Moyennant un passage au supplémentaire pour $\widehat{MA'B}$, on obtient directement les angles inscrits intéressants.

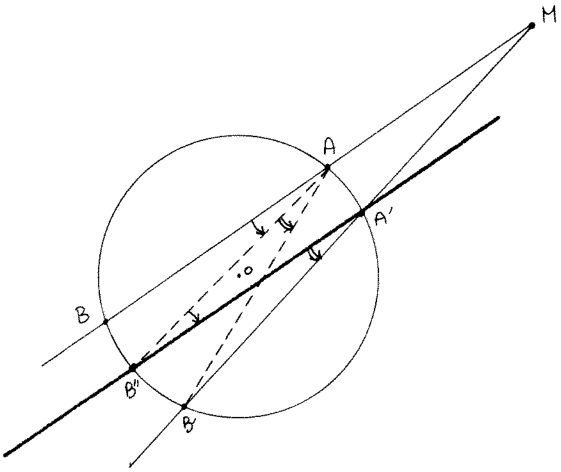


- On a aussi utilisé le triangle MAA', puis par passage au supplémentaire on se ramène à l'utilisation de la relation de Chasles comme en 1°)

- Certains élèves ont recherché quelques unes des nombreuses égalités angulaires qu'il était possible de tirer de la figure (6 à 8) et après des manipulations assez complexes, sont arrivés au résultat.

- On pourra aussi consulter la solution proposée par le manuel de 3e de l'I.R.E.M. de Strasbourg, p. 69 n°4.

2° Les translations conservent les angles



Par la translation de vecteur MA' on obtient : $(AB) \parallel (A'B'')$

$$AMA' = B''A'B'$$

En utilisant le théorème de l'angle inscrit :

$\widehat{AOA'} = 2\ \widehat{AB''A'}$

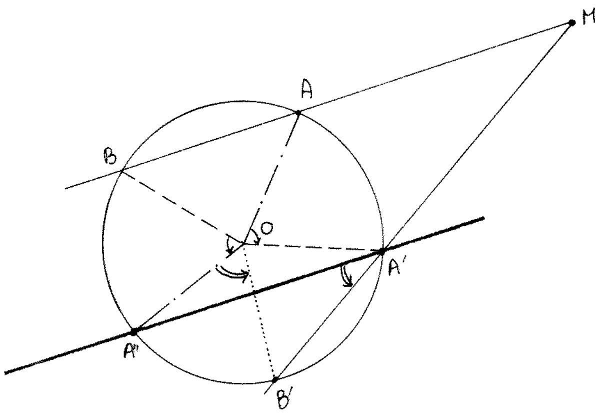
$\widehat{BOB'} = 2\ \widehat{BAB'} = 2(\widehat{BAB''} + \widehat{B''AB'})$

$= 2(\widehat{A'B''A} + \widehat{B''AB'})$ angles alternes-internes

donc: $\widehat{AOA'} + \widehat{BOB'} = 2\ \widehat{B''AB'}$

$= 2\ \widehat{B''A'B'}$ (ils interceptent le même arc)

3°) Les rotations conservent les angles



La rotation de centre O et l'angle $\widehat{A'OB}$ transforme A' en B et A en A''. On a donc $\widehat{AOA'} = \widehat{A''OB}$.

D'où $\widehat{AOA'} + \widehat{BOB'} = \widehat{A''OB'}$

La translation de vecteur AM' transforme la droite (MB) en la droite (A'A'') (*); donc $\widehat{AMA'} = \widehat{A''A'B'}$.

En utilisant le théorème de l'angle inscrit, on obtient :

$2\ \widehat{AMA'} = 2\ \widehat{A''A'B'} = \widehat{A''OB'} = \widehat{AOA'} + \widehat{BOB'}$

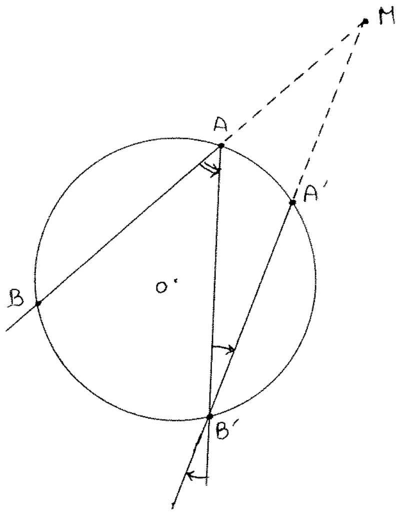
$\widehat{AOA'} = \widehat{A''OB}$ donc $AA' = BA''$ (1)

(*) justification :

(BA) et sa translatée déterminent sur le cercle un trapèze, isocèle pour des raisons de symétrie. L'égalité (1) montre que le 4e sommet de ce trapèze est A''. Cette justification a été escamotée par les élèves.

Les élèves disent qu'ils font "pivoter" l'angle $\widehat{AOA'}$, ce qui montre bien l'aspect dynamique du raisonnement, qui est dans l'esprit des programmes actuels, qui préconisent une géométrie des transformations.

4°) <u>Les symétries centrales conservent les angles</u>

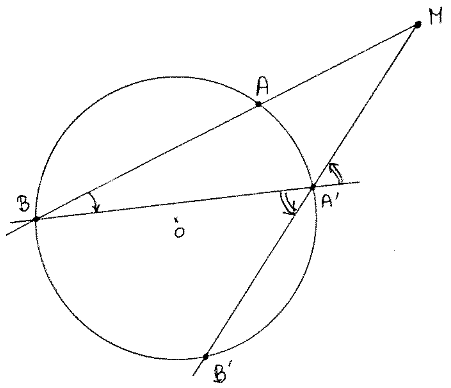


C'est la solution que je trouve la plus élégante :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})}+\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})}=2\widehat{(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'A'})}+\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'})}$$
$$=2\widehat{(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{A'B'})}+\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'})}$$
$$=2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})}$$
$$=2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'})}$$

Cet élève a mis près d'une heure pour aboutir à ce résultat, après plusieurs tentatives infructueuses d'utilisation de la relation de Chasles.

- Utilisant un peu le même genre de manipulations, on peut signaler la solution proposée par les auteurs du manuel.



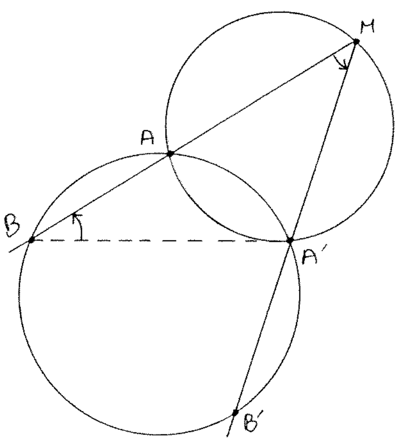
$$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'})}=\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA})}+\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA'})}+\widehat{(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{B'A'})}+\widehat{(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{MA'})}$$
$$=\hat{p}+\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA'})}+\widehat{(\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'B'})}+\hat{p}$$

donc : $2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'})}=\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})}+\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{CB'})}$

A chacun de l'apprécier comparativement aux solutions proposées par les élèves.

5°) <u>Une tentative malheureuse</u>

Puisque A'MA n'est pas un angle inscrit, un élève a tout simplement considéré le cercle circonscrit à AMA'

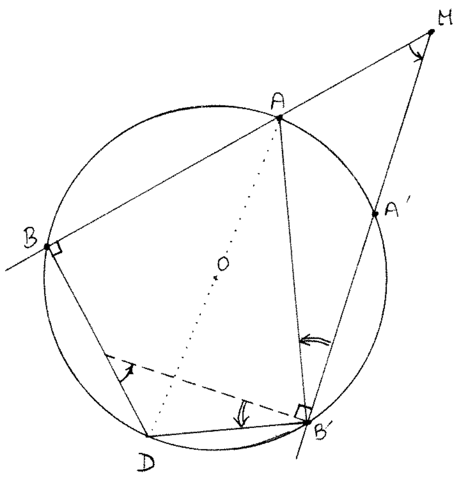


" $\widehat{AMA'}$ et $\widehat{A'BA}$ interceptent la corde AA' donc $\widehat{AMA'}=\hat{p}-\widehat{A'BA}$ puis en raisonnant de même avec le triangle ABA', on arrive au résultat".

L'élève utilise ici le théorème de l'angle inscrit pour deux cercles différents, ce qui est une erreur classique; mais il existe peut-être une solution reprenant l'idée des cercles circonscrits aux triangles.

6)° Pour conclure

Si l'on veut essayer d'être exhaustif, on peut imaginer une solution faisant intervenir le fait que deux angles ayant leurs côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires. La solution est un peu longue mais elle passe en revue de nombreux résultats.



$$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(BM)\\(B'C)\perp(B'M)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DCB'}=\widehat{AMA'}$$

Dans le triangle CDB', on a:
$\widehat{DCB'}=\hat{p}-\widehat{B'DB}-\widehat{CE'D}$ (1)
$\widehat{CB'D}=\widehat{A'B'A}$.
En effet, D,O,A sont alignés car BAD est un triangle rectangle donc DA est un diamètre. Mais alors $\widehat{AB'D}$ est un angle droit et la rotation de centre B' et d'angle de mesure $-\pi/2$ transforme $\widehat{A'B'A}$ en $\widehat{CB'D}$

En revenant à (1)
$$2\,\widehat{AMA'} = 2\,\widehat{DCB'} = 2\,\hat{p} + 2\,\widehat{BDB'} + 2\,\widehat{AB'A'}$$
$$= BOB' + AOA'$$

On adaptera la solution pour le cas où les perpendiculaires à (BM) et (B'M) se recoupent en dehors du cercle.

Pour la petite histoire, je précise que ce problème a été donné dans une classe A (bonne) et une classe B (moyenne). Rapidement, les élèves de la classe A sont venus me dire *"Monsieur, on ne sait pas comment aborder ce problème"*. Je leur ai alors suggéré de considérer le triangle BMB'. Les élèves de la classe B on attendu le dernier moment pour s'occuper du problème et n'ont plus pu me demander de renseignements. C'est dans leurs copies que j'ai trouvé les solutions les plus originales. Ceci étant, quelques esprits indépendants de la classe A n'ont pas utilisé mon indication et ont cherché leur propre méthode. Il va de soi que l'année prochaine je ne donnerai plus aucun renseignement ! Peut-être verrai-je de nouvelles solutions ?
En tout cas, je pense que cela vaut la peine de passer du temps sur ce problème; car venant en fin d'apprentissage, il permet d'utiliser l'ensemble des résultats vus en cours, et de montrer aux élèves qu'il peut exister pour un problème une grande diversité de solutions d'inégale valeur.