UN POLYEDRE BIEN DEMONTE

Lors du dernier Rallye par correspondance, un des problèmes était ainsi posé:

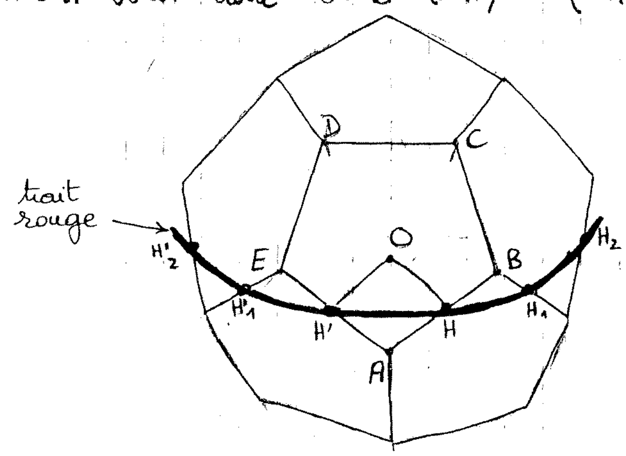
> Un polyèdre régulier a tous ses sommets situés sur la sphère de rayon 1. Ses faces sont douze pentagones réguliers convexes. Dessiner la projection orthogonale de ce polyèdre sur le plan de l'une de ses faces.

Les correcteurs de l'épreuve nous ont transmis la copie de Gilles KERN, élève de seconde au Lycée Marie Curie (Strasbourg) que nous reproduisons ici avec plaisir, en raison de sa qualité.

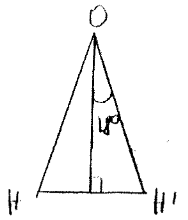
Que Gilles nous pardonne d'avoir légèrement condensé sa copie et laissé de côté la projection du dodécaèdre (avec parties cachées) qu'il avait fort bien réussie.

Je cherche d'abord à connaître le côté d'un des pentagones.

O est le centre de la sphère ~~de~~ diamètre 1. En rouge, j'ai tracé le plan équateur qui passe par O et par les 10 points H. L'angle $\widehat{H'OH}$ vaut donc 36° et $d(EH') = d(H'A) = d(AH) = d(HB)$



• Dans le triangle OHH' $\quad \sin 18° = \dfrac{\frac{HH'}{2}}{OH}$



Je sais que $\dfrac{HH'}{2} = \dfrac{a}{2}\cos 36°$, je remplace :

$\sin 18° = \dfrac{\frac{a}{2}\cos 36°}{OH} \qquad OH \sin 18° = \dfrac{a}{2}\cos 36°$

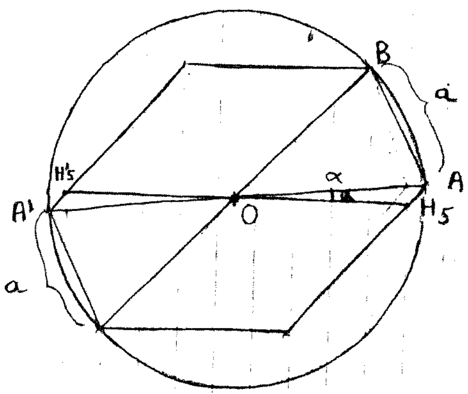
Je sais que $OH^2 = 1 - \dfrac{a^2}{4}$, d'où $OH = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$

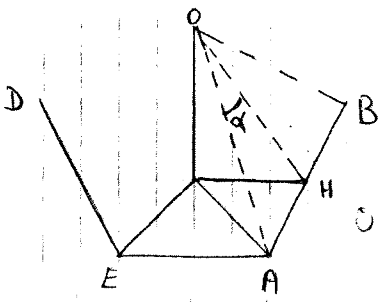
Je remplace :

$\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}\,\sin 18° = \dfrac{a}{2}\cos 36°.\ (\dots)\ a^2 = \dfrac{4\sin^2 18°}{\cos^2 36° + \sin^2 18°}$

$a = \dfrac{2\sin 18°}{\sqrt{\cos^2 36° + \sin^2 18°}} \qquad a \simeq \dfrac{0,618}{\sqrt{0,654+0,095}} \qquad a \simeq 0,7$

Vue de profils du polyèdre : coupe par un plan diamétrale.





$OA = 1$

$A.H = \dfrac{a}{2} \simeq 0,35$

$OH = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$

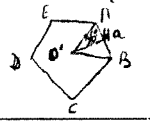
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0,35}{0,936} \simeq 0,376 \simeq 0,936$ ..

$\alpha \simeq 20,5°$.

Projection du polyèdre sur le plan équateur passant par O et les 10 points H, cette projection équivaut à la projection sur l'une des faces. En projetant sur le plan équateur, je ne projette que la partie visible du polyèdre :

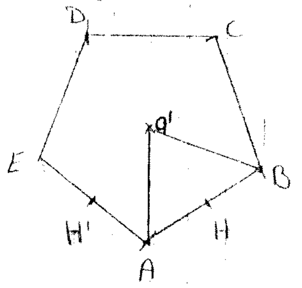
Projection de OA : $OA\cos\alpha = 1\cos\alpha = 0,936$. En fait, OH est le projeté de OA.

Le rayon de mon cercle sera donc de 0,936. Le côté du pentagone sera 0,7.



$\sin 36° = \dfrac{\frac{a}{2}}{O'A} \qquad \sin 36° = \dfrac{0,35}{O'A} \qquad O'A = \dfrac{0,35}{\sin 36°} \simeq 0,59$

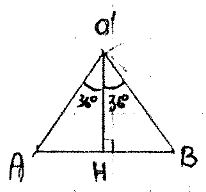
Je considère aussi le pentagone ABCDE. O' est le centre de ce pentagone. L'angle $\widehat{H'O'H}$ vaut donc 72°.



J'appelerai : AB : a

O'A : r

O'H : a'

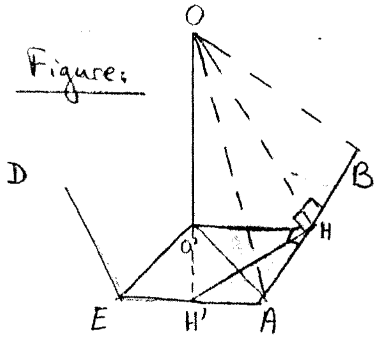


Dans le triangle O'AB

$tg\ 36° = \dfrac{AH}{O'H} = \dfrac{a}{2a'}$ d'où $a' = \dfrac{a}{2\,tg\ 36°}$

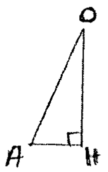
$\sin 36° = \dfrac{AH}{O'A} = \dfrac{a}{2r}$ d'où $r = \dfrac{a}{2 \sin 36°}$

Figure :



Le triangle OAB est isocèle : OB = OA.
Donc ~~O~~, comme H est le milieu de AB, l'angle $\widehat{OHA}$ est droit.

- Dans le triangle OHA, d'après le théorème de Pythagore,

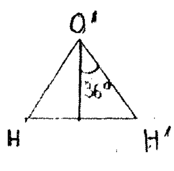


$OH^2 + HA^2 = OA^2$

$OH^2 = OA^2 - HA^2$ OA est le rayon de la sphère

$OH^2 = 1 - \dfrac{a^2}{4}$ et vaut donc 1.

- Dans le triangle O'HH' $\dfrac{HH'}{2} = O'H \sin 36°$



$\sin 36° = \dfrac{\frac{HH'}{2}}{O'H}$ $\dfrac{HH'}{2} = a' \sin 36°$

Je sais que $a' = \dfrac{a}{2\,tg\ 36°}$, je remplace :

$\dfrac{HH'}{2} = \dfrac{a \sin 36°}{2\,tg\ 36°}$ $\dfrac{HH'}{2} = \dfrac{a}{2} \cos 36°$