POLYEDRES REGULIERS ET SEMI-REGULIERS DE L'ESPACE

P . DIBLING

Les solides dont toutes les faces sont égales à un même polygone régulier et dont tous les sommets sont identiques sont appelés des polyèdres réguliers. On appellera par la suite semi-réguliers des polyèdres soumis à des conditions moins restrictives.

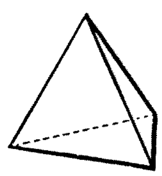
Les polyèdres conduisent à des applications pratiques pour les ingénieurs, à des concepts de structure pour les cristallographes, les chimistes, à des développements esthétiques pour les architectes et les sculpteurs.

On aura successivement :
- les solides de Platon
- les solides d'Archimède
- les prismes et antiprismes de Kepler
- les polyèdres réguliers de Kepler
- les polyèdres réguliers étoilés de Poinsot

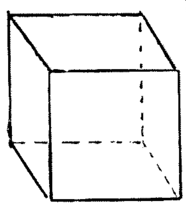
Puisse cet article donner envie à nos collègues de faire construire dans leurs classes ces jolis solides de l'espace !

I.- Les solides de Platon encore nommés les cinq polyèdres réguliers platoniciens

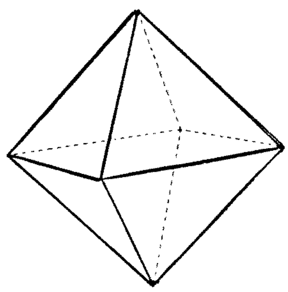
Le tétraèdre



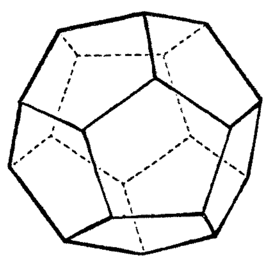
le cube



l'octaèdre



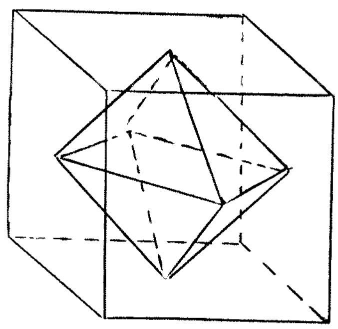
le dodécaèdre



Il est probable qu'aucun homme n'a pu les concevoir d'emblée.
On sait que les Etrusques utilisaient des dés à jouer dodécaédriques durant le premier millénaire avant Jésus-Christ.
Vers cinq cents ans avant Jésus-Christ, les cinq solides étaient manipulés dans l'entourage de Platon qui les a décrits dans un de ses dialogues.
Deux siècles plus tard, Euclide couronnait ses Eléments en discutant la géométrie des cinq polyèdres platoniciens.

Notion de dualité:

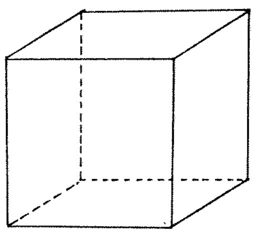
A première vue, les solides de Platon peuvent sembler indépendants les uns des autres; ils ne le sont pas.
On marque un point au centre de chaque face d'un cube. On relie par des segments les six points marqués et l'on obtient un octaèdre.
En procédant de la même façon avec un octaèdre, on obtient un cube.
On dit que le cube et l'octaèdre sont duaux l'un de l'autre. Ainsi le dodécaèdre et l'icosaèdre sont duaux alors que le tétraèdre est son propre dual.

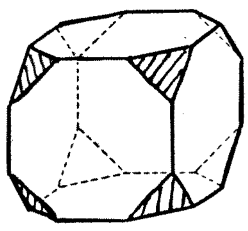


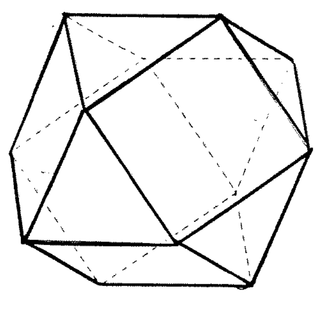
II.- Les solides d'Archimède

A. Observons la chaîne des solides suivants et commentons-la :

le cube ⟶ le cube tronqué ⟶ le cuboctaèdre

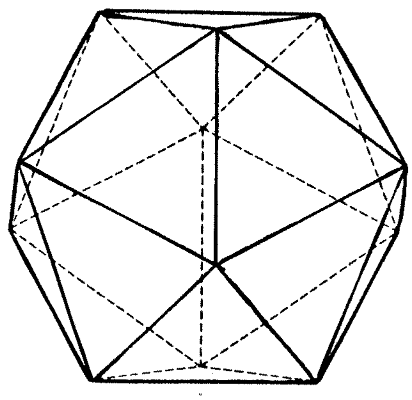


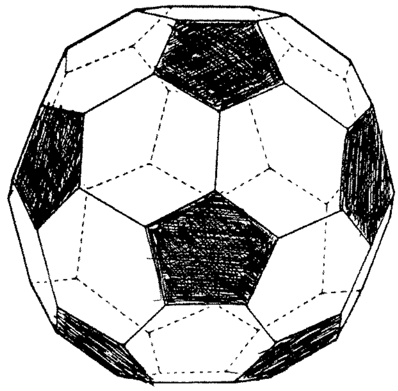




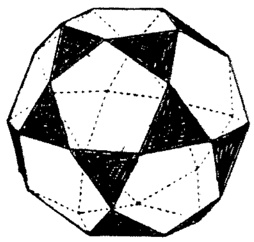
B. D'autres solides semi-réguliers sont obtenus par troncature de l'icosaèdre

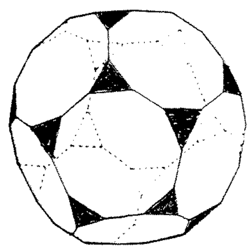
l'icosaèdre 3^5 ⟶ l'icosaèdre tronqué 5.6^2 ⟶



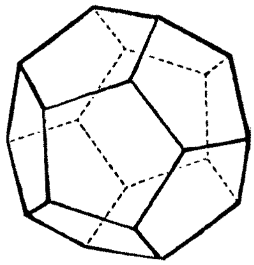


⟶ l'icosidodécaèdre $(3.5)^2$ ⟶ le dodécaèdre tronqué 3.10^2 ⟶



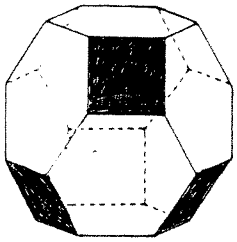


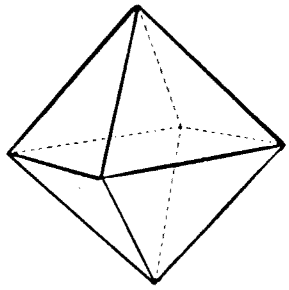
⟶ le dodécaèdre 5^3



L'icosidodécaèdre qui occupe le milieu de cette chaîne possède les vingt faces triangulaires de l'icosaèdre et les douze faces pentagonales du dodécaèdre, d'où son nom !

→ l'octaèdre tronqué → l'octaèdre





Commentaire :

Quand on coupe les coins d'un cube, on remplace chaque sommet par un triangle équilatéral. On peut couper de telle façon que les faces cassées du cube deviennent des octogones : on obtient le cube tronqué.
En coupant davantage, il arrive un moment où les triangles équilatéraux se touchent en leur sommet; on obtient le cuboctaèdre.
Si on continue au-delà, les triangles deviennent des hexagones; on obtient l'octaèdre tronqué car lorsque les reliquats des faces carrées d'origine disparaissent, il reste un octaèdre.

L'octaèdre tronqué ou cube de Kelvin réalise, comme le cube, un pavage de l'espace, d'où son intérêt en cristallographie.
Le cuboctaèdre possède les six faces carrées du cube et les huit faces triangulaires de l'octaèdre, d'où son nom !
Les trois solides du milieu de la chaîne sont des polyèdres semi-réguliers car leurs faces comptent deux types de polygones réguliers et leurs sommets sont tous identiques.

Un polyèdre régulier (ou semi-régulier) se caractérise par une notation n^p (ou $n^p.n'^{p'}$...) où n désigne le nombre de côtés d'une face et p le nombre de faces de ce type qui se rejoignent en un sommet.

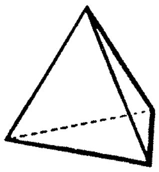
Ainsi le cube	est caractérisé		par	4^3
le cube tronqué	"	"	"	3.8^2
le cuboctaèdre	"	"	"	$(3.4)^2$
l'octaèdre tronqué	"	"	"	4.6^2
l'octaèdre	"	"	"	3^4

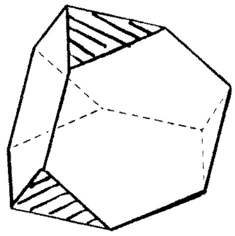
C. La troncature du tétraèdre fournit le tétraèdre tronqué 3.6^2 comportant quatre faces triangulaires et quatre faces hexagonales.

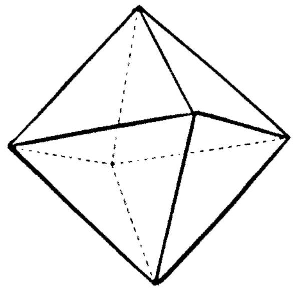
En poursuivant la troncature jusqu'à ce les sommets du triangle se rejoignent, on obtient un octaèdre.

La chaîne obtenue est donc :

tétraèdre ⟶ tétraèdre tronqué ⟶ octaèdre



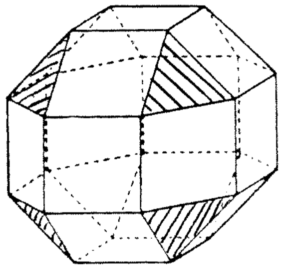




D. Il existe d'autres solides semi-réguliers; énumérons-les :

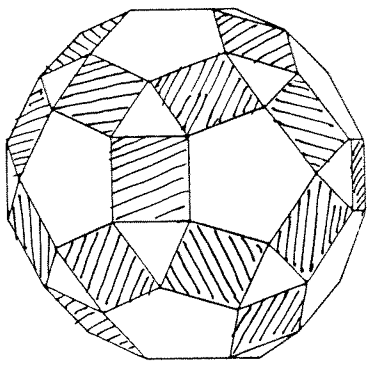
1. En remplaçant les sommets du cuboctaèdre par des carrés, on produit le petit rhombicuboctaèdre que l'on trouvera au Mont Saint-Odile sous forme de cadran solaire très original permettant de lire l'heure dans de grandes villes des différents continents .

Le petit rhombicuboctaèdre 3.4^3



2. En remplaçant les sommets de l'icosidodécaèdre par des carrés, on obtient le <u>petit rhombicosidodécaèdre</u> qui compte <u>20 triangles</u> équilatéraux, 30 carrés et 12 pentagones

<u>le petit rhombicosidodécaèdre 3.4.5.4.</u>

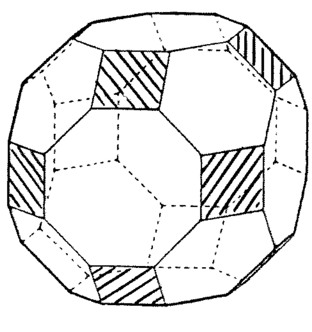


3. Voici deux très jolis solides semi-réguliers

<u>le grand rhombicuboctaèdre</u>

4.6.8.

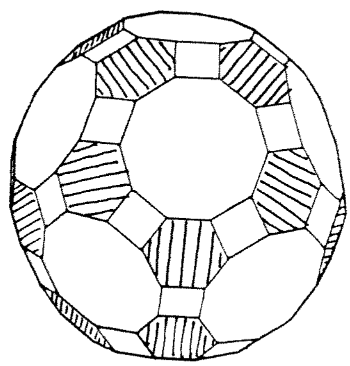
composé de 12 carrés, 8 hexagones, 6 octogones



<u>le grand rhombicosidodécaèdre</u>

4.6.10

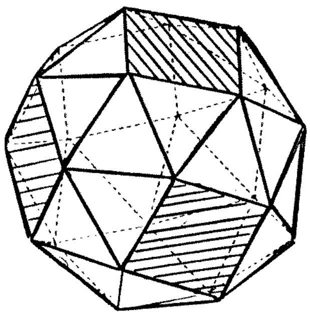
composé de 30 carrés, 20 hexagones, 12 décagones



4. Enfin les deux derniers :

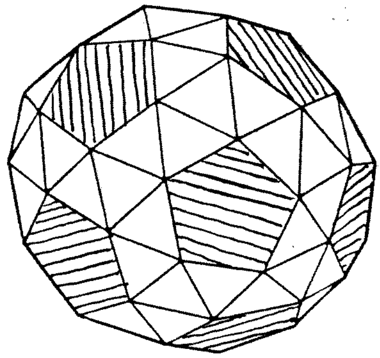
Le snub-cube $3^4.4$

comporte 6 carrés et 32 triangles



le snub-dodécaèdre $3^4.5$

comporte 30 carrés, 20 hexagones, 12 décagones



Chacun de ces deux derniers solides existe sous forme gauche et sous forme dextre, cela dépend de la façon dont s'inclide le cube pour le snub-cube l'hexagone pour le snub dodécaèdre.

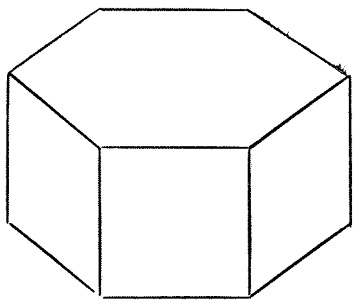
Ces quinze solides semi-réguliers s'appellent les solides d'Archimède : dès le début de l'ère chrétienne, à Alexandrie, les mathématiciens Héron et Pappus s'intéressaient à ceux-ci.
Les duaux des solides d'Archimède fournissent de nouveaux solides mais qui ne sont pas semi-réguliers.

III.- Prismes et antiprismes semi-réguliers de Kepler

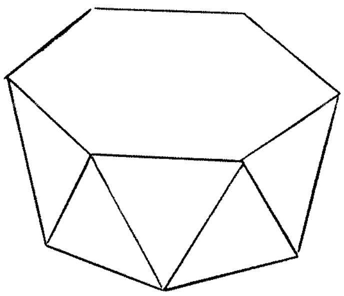
KEPLER (astronome allemand 1571-1630) passionné de géométrie montra que toute une classe de solides avait beaucoup de points communs avec les solides de Platon.

1) Tout prisme dont les faces latérales sont les carrés et terminé en haut et en bas par un polygone régulier répond à la définition d'un solide semi-régulier.

En effet ses faces sont des polygones de deux sortes et ses sommets sont identiques.



2) Un antiprisme diffère uniquement du prisme par le fait que ses faces latérales sont des triangles équilatéraux; c'est donc aussi un solide semi-régulier



Ainsi depuis l'Antiquité, Kepler élargissait le domaine des solides semi-réguliers. Comme le nombre de polygones réguliers formant les bases est illimité, il y a une infinité de prismes et antiprismes.
Là aussi, on peut construire les duaux, mais on n'obtient pas de solides semi-réguliers.

IV.- Polyèdres réguliers étoilés de Kepler

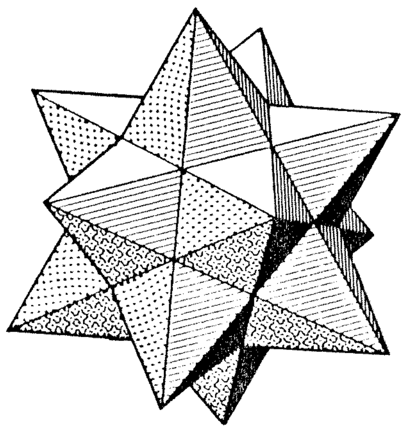
A. Kepler découvre que douze pentagrammes (pentagone régulier étoilé) peuvent se juxtaposer par paire le long de leurs côtés.
L'originalité de Kepler est d'avoir abandonné la notion grecque de convexité.

Le nouveau solide satisfait bien les critères des polyèdres réguliers.

1) Les faces sont des des pentagrammes dont les parties centrales nous sont cachées par les pyramides formées de cinq pointes de pentagrammes.
2) Les sommets sont identiques : ce sont les sommets des pyramides.

Une méthode de construction consiste à faire reposer douze pyramides à cinq faces sur un dodécaèdre régulier. Les faces des pyramides sont des trianges isocèles du type (36°, 72°, 72°).

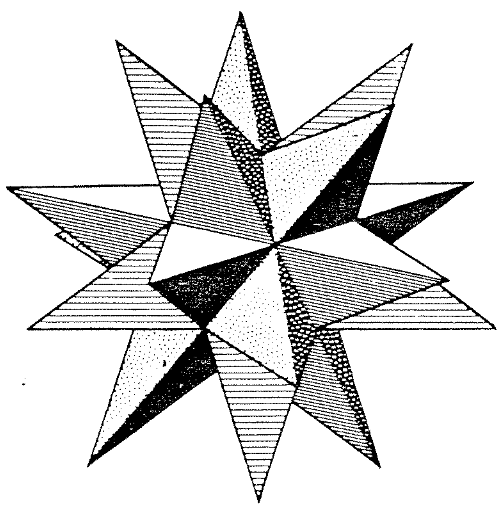
Le polyèdre s'appelle le petit dodécaèdre étoilé $(\frac{5}{2})^5$



B. Kepler observa que les même douze pentagrammes peuvent être assemblés différemment. Le polyèdre obtenu a douze faces en forme de pentagrammes au centre desquelles s'élève une saillie formée de cinq pyramides triangulaires (1).

Une méthode de construction consiste à produire vingt pyramides triangulaires avec les mêmes triangles isocèles (36°, 72°, 72°), puis des assembler en tenant compte de la remarque (1) ci-dessus.

Ce polyèdre s'appelle le grand dodécaèdre étoilé $(\frac{5}{2})^3$

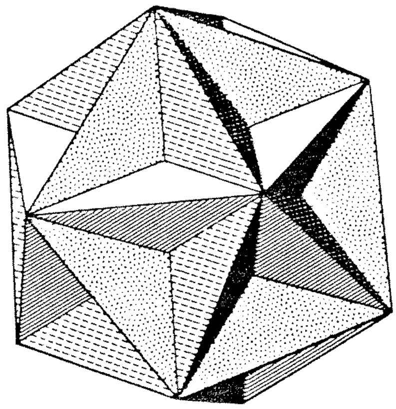


V.- Les polyèdres réguliers de Poinsot (mathématicien français 1777-1859)

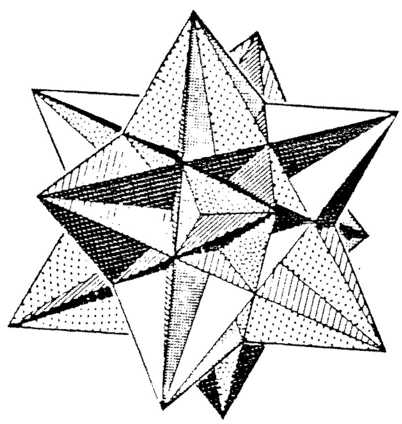
Deux siècles s'écoulent après la découverte de Kepler avant que Poinsot ne trouve deux autres solides réguliers.

Le premier appelé le grand dodécaèdre étoilé $5^{\frac{5}{2}}$ est composé de douze pentagones (non étoilés) se coupant mutuellement et où chaque face pentagonale supporte une étoile à cinq branches en relief .

Méthode de construction: les parties visibles sont des triangles isocèles tous identiques d'angle au sommet 108°. Il faut soixante triangles. Il est facile de construire un patron pour les étoiles à cinq branches.



Le second solide trouvé par Poinsot est encore plus surprenant. Il est constitué de vingt triangles équilatéraux se coupant mutuellement. Les faces triangulaires se réunissent selon trente arêtes en souze sommets. Ce solide s'appelle le grand icosaèdre étoilé 3^5.



Méthode de construction : il faut soixante pièces du type :