SUR LES TRIANGLES DIOPHANTIENS

Deux problèmes de triangles diophantiens (c'est-à-dire à côtés entiers) sont classiques.

1. Trouver tous les triangles rectangles diophantiens . Rappelons la solution :

   Les mesures des côtés sont :
   $a = k(n^2 + m^2)$, $b = k(n^2 - m^2)$, $c = 2knm$

   où n et m sont des entiers arbitraires premiers entre eux, dont l'un est pair $(n > m)$ et k un facteur entier quelconque.[1]

2. Quel est le nombre u_n de triangles diophantiens de périmètre n ? Dans [2], on donne la solution sous la forme curieuse :

   $$u_n = \left\| \frac{n^2}{12} \right\| - \left[\frac{n}{4}\right] \cdot \left[\frac{n+2}{4}\right]$$

   où figurent à la fois les notations $[-\ -]$ de partie entière et $\|-\ -\|$ d'entier le plus proche. Dans [3], on trouve le résultat élégant :

   $$u_n = \begin{cases} \left\| \dfrac{n^2}{48} \right\| & \text{si n est pair} \\[2ex] \left\| \dfrac{n^2 + 6n}{48} \right\| & \text{sinon .} \end{cases}$$

Mais pour arriver à cette formule condensée, Yaglom examine l'un après l'autre 12 cas, suivant les classes résiduelles de n modulo 12.

On va établir ce résultat simplement et automatiquement par notre "méthode des polyèdres" [4]. Il est vrai qu'on s'appuiera implicitement sur trois théorèmes de [4], que le lecteur ignore sans doute; mais cela ne l'empêchera guère de comprendre le principe de la méthode.
On se servira de la notation de nombre périodique $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Ce crochet, fonction de n, est égal à celui des a_i dont le rang i=n, modulo k.
Par exemple $[a,b]$ vaut a si n est impair, b s'il est pair.

Résolution du problème 2. Soient par ordre de grandeur x,y,z les mesures entières des côtés du triangle. Alors,

$$x + y + z = n , \qquad 0 < x \leqslant y \leqslant z < x + y.$$

Donc u_n compte les solutions entières du système à deux inconnues

$$(1) \qquad 0 < x \leqslant y \quad , \; 2x + 2y > n \quad , \qquad 2y + x \leqslant n.$$

Son domaine polygonal D_n dans le plan des x,y est le triangle semi-ouvert $(0,\frac{n}{2})$ $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4})$, obtenu en supprimant du triangle fermé le côté fermé $(0,\frac{n}{2})$ $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4})$.

L'aire de D_n étant $\frac{n^2}{48}$ et les dénominateurs de ses sommets 2,3,4, on sait [4] que u_n est de la forme :

$$48\, u_n = n^2 + [a,b]n + [a',b',c'] + [a'',b'',c'',0].$$

Si s et c désignent le nombre de sommets et de côtés du triangle supprimés par les inéquations strictes de (1), on sait aussi [4] que

$$u_o = 1 - s + c = 1 - 2 + 1 = 0$$

Par suite, $c' = 0$ et

$$(2) \qquad 48\, u_n = n^2 + [a,b]n + [a',b',0] + [a'',b'',c'',0].$$

Soit v_n le nombre de points entiers du "domaine réciproque" de D_n, obtenu en échangeant dans (1) les signes $>$ et $\geqslant$. D'après notre loi de réciprocité [4] $v(n) = u(-n)$, de sorte que :

$$(3) \qquad 48\, v_n = n^2 - [a,b]n + [b',a',0] + [c'',b'',a'',0].$$

Dans le triangle $(0,\frac{n}{2})$ $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4})$, on constate pour n de 1 à 4 que

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \qquad u_1 = u_2 = 0 \quad , \qquad u_3 = 1 .$$

Pour déterminer les 7 inconnues a,b,a',b',a'',b'',c'', on obtient donc 7 équations linéaires simples en écrivant (2) pour n de 1 à 3 et (3) pour n de 1 à 4.
La première de ces équations est par exemple

$$0 = 1 + a + a' + a''.$$

On trouve ainsi sans peine le "polynôme arithmétique".

$$(4) \qquad u_n = \frac{n^2 + [6,0]n - [16,16,0] + [9,12,21,0]}{48} .$$

Si dans [4] on néglige les deux derniers nombres périodiques, l'erreur commise sur u_n est toujours inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, de sorte que :

$$u_n = \left\| \frac{n^2 + [6,0]n}{48} \right\| .$$

Remarques

1) Comme tout polynôme arithmétique de la forme $n^2 + [a,b]n + [a',b',c'] + [a'',b'',c'',d'']$ u_n vérifie la relation de récurrence linéaire (4).

$$u_n - u_{n-2} - u_{n-3} - u_{n-4} + u_{n-5} + u_{n-6} + u_{n-7} - u_{n-9} = 0 .$$

Voici les premières valeurs de u_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3 .

2) La méthode des polyèdres donne de même [4] le nombre de quadrilatères convexes inscriptibles diophantiens de périmètre n :

$$q_n = n \left\| \frac{n^2 - [0,3]n + [-7,20]}{96} \right\| .$$

NOTE HISTORIQUE

On sait bien que PYTHAGORE connaissait le triangle rectangle (3,4,5). Dans notre ère, DIOPHANTE (4e siècle) trouve les triangles à côtés entiers ($n^2 + m^2$, $n^2 - m^2$, 2 nm). BRAHMAGUPTA (6e siècle) signale le quadrilatère (25,52,60,39) à diagonales perpendiculaires 56 et 63. PRAETORIUS (16e siècle) montre que pour le quadrilatère inscriptible (116,105,87,106) les diagonales, l'aire et le diamètre du cercle circonscrits sont entiers (respectivement 143 et 144, 10296, 145).

Références :

[1] E.EHRHART, Sur les triples pythagoréens, Les Humanités scientifiques, 1968.

[2] G.E. ANDREWS, Triangles with integer sides, Amer. Math. Monthly, 86, 1979.

[3] A.M. et I.M. YAGLOM, Challenging problems, Vol.1, problème 30. Traduit du russe, Holden-Day, 1964.

[4] E. EHRHART, Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhäuser, Bâle, 1977.

E. EHRHART.