DANS LE COURRIER DE FERMAT

Fermat entretenait une correspondance suivie avec d'autres mathématiciens de son temps. Il était de règle dans ces lettres de se lancer de courtois défis mathématiques. Parmi les correspondants figuraient Roberval, Digty, Carcavi, Sainte-Croix et bien d'autres.

En septembre 1636, il s'attaque, sans succès, à un problème posé par Sainte-Croix. A cette occasion, il lui retourne le défi en proposant une série de problèmes, par l'intermédiaire du Père Mersenne.
Entre autre (**), il soumet une variante de ce qu'on appelle aujourd'hui "l'équation de Fermat" dans le cas n=4.

(Lettre de Fermat à Mersenne pour Sainte-Croix, septembre 1636.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Quoique j'aie à dire que je ne suis point un Œdipe, mais un Dave, et que j'avoue très volontiers que je ne suis point parvenu à résoudre la question de M. de Sainte-Croix, je vous demanderai la permission de vous adresser, en échange des nombres qu'il a divulgués, la solution de votre problème, et de lui proposer à mon tour quelques questions qu'il ne débrouillera pas, je crois, de si tôt, malgré les promesses qu'il vous fait et la singulière puissance de son esprit.

2. Pour rendre donc l'épreuve plus honorable, ainsi qu'il le dit, en choisissant des problèmes plus difficiles, voici ceux que je propose :

1° Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que son aire soit un carré.

2° Étant donnée la somme de l'hypoténuse d'un triangle rectangle en nombres et du produit des trois côtés, trouver les limites entre lesquelles l'aire se trouve comprise.

Ne vous étonnez pas de l'addition d'une longueur et d'un solide; car dans les problèmes numériques, comme on le sait, toutes les quantités sont homogènes.

3° Trouver deux bicarrés dont la somme soit un bicarré ou deux cubes dont la somme soit un cube.

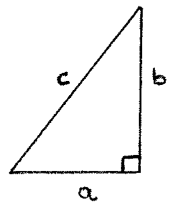
4° Trouver trois carrés formant une progression arithmétique dont la raison soit également un carré.

13. Pour votre proposition des triangles rectangles, elle me semble énoncée dans votre lettre avec quelque peu d'obscurité; je la résoudrai peut-être, si vous me la proposez plus clairement.

Le problème n°1 revient à trouver quatre entiers naturels strictement positifs, a, b, c, p, qui vérifient le système d'équations :

$E_1 \quad : a^2 + b^2 = c^2$

$E_2 \quad : ab = 2p^2$



Supposons que ce système admette une solution $(a,b,c,p) \in \mathbb{N}^4$ avec $abcp \neq 0$.
On peut supposer que pgcd $(a,b,c,p) = 1$.
D'après E_1, il existe x et y, entiers naturels stictement positifs, avec pgcd $(x,y) = 1$, tels que :

$$c = x^2 + y^2, \quad a = x^2 - y^2, \quad b = 2\,x\,y.$$

En vertu de E_2, nous aurons :

$$xy(x^2 - y^2) = p^2$$

Or, comme pgcd$(x,y) = 1$, pgcd $(x, x^2 - y^2)$ = pgcd $(y, x^2 - y^2) = 1$.
Donc x,y et $(x^2 - y^2)$ doivent être, séparément, des carrés parfaits. Autrement dit, il existe u, v et t, entiers strictement positifs, tels que :

$$x = u^2, \qquad y = v^2, \qquad x^2 - y^2 = t^2.$$

Donc, $\quad u^4 - v^4 = t^2.$

Le triplet (u,v,t) est donc solution de l'équation (dans $\mathbb{Z}$)

$$X^4 - Y^4 = Z^2 \qquad (1)$$

avec $\quad uvt \neq 0 \qquad (2)$

Nous allons montrer que cette équation n'a pas de solutions.

UNE DESCENTE INFINIE

La démonstration est basée sur la méthode de la "descente infinie", due à Fermat lui-même.
Supposons qu'il existe des solutions de (1) vérifiant (2); nous pouvons en choisir une (x_1, y_1, z_1) avec $x_1 > 0$, $y_1 \neq 0$, $z_1 \neq 0$. Supposons qu'à partir de cette solution , nous puissions trouver une autre solution (x_2, y_2, z_2) avec $0 < x_2 < x_1$, $y_2 \neq 0$, $z_2 \neq 0$.

Nous pourrons, si les mêmes hypothèses se renouvellent, trouver, quel que soit n, une suite de solutions (x_n, y_n, z_n) avec

$$0 < x_n < \quad \dots \quad < x_2 < x_1$$

ce qui est impossible. En d'autres termes, plus actuels, s'il existe une solution avec $x > 0$, il en existe une où <u>x est > 0 et minimal</u> .

Admettons que (1) ait des solutions vérifiant (2) et choisissons parmi ces solutions (x,y,z) où $x > 0$, $y > 0$, $Z > 0$ et telle que si (x', y', z') est aussi une solution de la forme (2) avec $x' > 0$, alors $x' \geqslant x$.
Le choix de (x,y,z) entraîne que x,y et z n'ont pas de facteurs communs autre que 1

Il en sera de même pour (x^2, y^2, z).

Or, (x^2,y^2,z) est une solution de l'équation

$$X^2 = Y^2 + Z^2 \qquad (3)$$

dont on connait toutes les solutions. (*)

Il existe r et q , entiers > 0 premiers entre eux, tels que l'un des deux cas suivants ait lieu:

$$(E) \begin{cases} x^2 = r^2 + q^2 \\ y^2 = r^2 - q^2 \\ z = 2rq \end{cases} \qquad\qquad (E') \begin{cases} x^2 = r^2 + q^2 \\ y^2 = 2rq \\ z = r^2 - q^2 \end{cases}$$

Regardons chacun des cas.

- Dans le cas (E), nous aurons :

  $$r^4 - q^4 = (xy)^2$$

  c'est-à-dire que le triplet (r,q,xy) est aussi solution de (1) vérifiant (2).
  Or, $x^2 = r^2 + q^2 > r^2$. Donc $r < x$, ce qui contredit le choix de x.

•• Si on est dans le cas (E'), on voit (compte tenu du fait que x,r et q n'ont pas de facteurs communs) qu'il existe m et n, entiers naturels strictement positifs, premiers entre eux, tels que :

$$x = m^2 + n^2$$
$$r = m^2 - n^2$$
$$q = 2mn$$

Nous aurons donc $y^2 = 4mn\,(m^2 - n^2)$. Ainsi m,n et $(m^2 - n^2)$ doivent être des carrés parfaits:

il existe k, w et ν , entiers strictement positifs, tels que :

$$m = k^2, \qquad n = w^2, \qquad m^2 - n^2 = \nu^2$$

d'où $\quad k^4 - w^4 = \nu^2$

Le triplet (k,w,ν) est donc aussi une solution de (1) vérifiant (2).

Or, $k \leq k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = x$

ce qui contredit à nouveau le choix de x !

Tout ceci montre que (1) n'a pas de solutions vérifiant (2).

Donc, l'hypothèse initiale selon laquelle le système d'équations E_1, E_2 admet une solution $(a,b,c,p) \in \mathbb{N}^4$, avec $abcp \neq 0$ est fausse. Autrement dit, le problème proposé par Fermat à Sainte-Croix n'a pas de solution.

Luis RADFORD.

Note:

(*) Rappelons que l'équation de Fermat dans le cas n=2 a des solutions non triviales: si x,y,z sont des entiers > 0 tels que $x^2+y^2 = z^2$, il existe un entier d et des entiers u et v tels que (à une permutation près), on ait :

$x = d(u^2 - v^2)$; $\qquad y = 2duv$; $\qquad z = d(u^2 + v^2)$.

Pour $n \geqslant 4$, on conjecture que l'équation n'a pas de solutions non triviales, ce que l'on démontre ici dans le cas n=4. Si l'anneau des racines nième de l'unité est principal (c'est le cas pour n=3), il n'est pas très difficile de vérifier la conjecture. Malheureusement, il n'existe qu'un nombre fini de n premiers pour lesquels on a cette "bonne" propriété.

(**) Rien n'empêche les lecteurs de L'OUVERT de se mettre dans le peau du Père Mersenne ou de M. de Sainte-Croix, et de nous envoyer leurs solutions commentées des problèmes 2,3 et 4 !

L'OUVERT.