EN SOUVENIR D'UN COLLEGUE DISPARU

G. GLAESER et
E. CHANEY

Le **jeudi 4 octobre** 1582 se produisit un fait prodigieux. On se reveilla le lendemain à la date du **vendredi 15 octobre** 1582 ! Ce n'était pas la semaine des quatre jeudis, mais le calendrier grégorien venait d'être mis en pratique.

Le pape Grégoire avait confié la mise au point de la réforme à un Christoph Schlosser (né à Bamberg en 1537) qui est plus connu sous le nom qu'il portait à la société de Jésus : **Christophorus CLAVIUS.**

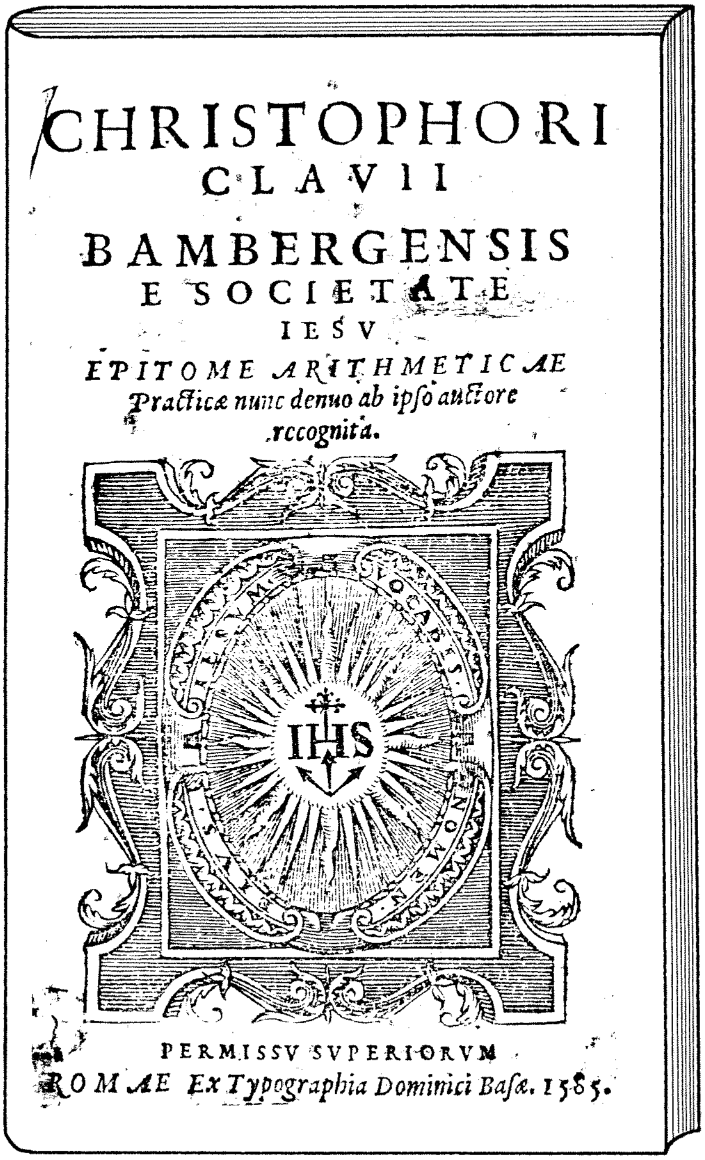
Célèbre professeur de mathématiques, il fut l'auteur des manuels scolaires les plus répandus au XVIIe siècle. On les utilisait dans tous les pays de mission : Chine, Egypte, Amérique Latine, et bien entendu Europe.

Voici quelques reproductions extraites d'un manuel d'arithmétique de Clavius.

Pour ceux qui ne parlent pas jésuite, ou qui n'ont pu étudier Astérix en classe, signalons que :

aureus	signifie	d'or
addemus	"	ajoutons
detrabamus	"	ôtons
aggregatum	"	la somme
dimidium	"	la moitié
terminus	"	terme

Mais que peuvent bien vouloir dire
"Regula trium", "progressiones arithmeticae"... ?


CHRISTOPHORI
CLAVII
BAMBERGENSIS
E SOCIETATE
IESV
EPITOME ARITHMETICAE
Practicæ nunc denuo ab ipso auctore recognita.

IHS

PERMISSV SVPERIORVM
ROMAE *Ex Typographia Dominici Basæ.* 1585.

LA REGLE D'OR

REGVLA TRIVM: QVÆ ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIue regula proportionum dici solet.

Cap. XVII.

HACTENVS iacta sunt à nobis necessaria Arithmetices fundamenta; sequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vsus apparet, non solum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, si in commercijs, conuentisque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac necessariæ. Primo autem loco sese offert regula illa nunquam satis laudata, quæ ob immensam vtilitatem, Aurea dici solet, vel regula proportionum, propterea quòd in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti sunt, quartus autē ignotus quæritur, versetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata est: quòd tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum se habet.

Regula aurea, siue proportionũ, aut regula triũ, cur sic dicta sit.

DISPOSITIS tribus numeris notis, ita vt is, qui quæstionem habet annexã, (Semper enim vnus illorum quæstionem secum affert, ut in exemplis

Numeri in regula triũ quo pacto sint collocandi.

apparebit.) tertio statuatur loco; reliquorũ autem ille, qui de eadem est re, hoc est, qui tertio similis est, (Exempla autem declarabunt, in quo similitudo hæc consistat.) primum occupet locum, mediam denique sedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, similis esse debet: Dispositis, inquã, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter se, productũque numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus, erit quartus, qui quærebatur, satisfacietque quæstioni propositæ: hoc est, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad secundum.

Quo pacto per regulã triumquartus numerus ignotus sit inquirẽdus.

Exemplum.

[*] *QVATVOR aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi possint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæstionem: de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere possint: Huic numero similis est numerus 4. aureorum. Nam sicut 4. aureis emptæ sunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ sunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus sit pretium: at 12. libræ piperis sunt merces. Ita ergo stabit exemplum.*

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20?	fiunt	60.

Multiplicando autem inter se secundum, & tertium numerum, & productũ 240. per primum diui-

diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars est secundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem esse quarti numeri inuenti 60.

Aliud exemplum.

AVREOS 60. expendo 5. mensibus, peto, 132. aureos quot mensibus expendam? Hic etiam cernis, quæstionem fieri de 132. aureis, & huic numero similem esse hunc 60. aur. Sic igitur exemplum stabit.

Aurei.	Menses.	Aurei.		Menses.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem secundum numerum, & tertium inter se, productumq; 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menses, quibus expẽdam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. secundum 5. complectitur duodecies.

Illa demonstratio sequitur...

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

Cap. XXIIII.

Progressio Arithmetica quid.

PROGRESSIO *Arithmetica est series plurium numerorũ se æqualiter superantium, vt hic.*

Progressio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.

Progressio numerorum imparium incipiens ab 1.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. &c.

Progressio numerorum pariũ incipiens à 2.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

Progressio naturalis numerorũ, & numerorũ imparium parium q; quid.

PRIMA enim harum triũ progressionũ dicitur progressio naturalis numerorum, incipitq; ab 1. in qua omnes numeri se ordine superãt vnitate. Secunda vero dicitur progressio numerorũ imparium, incipitq; ab 1. in qua omnes numeri se ordine superant binario. Tertia deniq; appellatur progressio numerorum parium, incipitq; à 2. qui est ...

Proprietas pgressionis Arithmeticæ quotcunque terminorũ, si numerus terminorũ fuerit par.

EX posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est par, aggregatum extremorũ æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium. Vt hic manifestum est.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 15. 19. 23. 27. non autem tres tantũ, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Nunc sequuntur regulæ ad Arithmeticas progressiones spectantes.

REGVLA I.

[**] *SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vnà cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatũ per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.*

Súma cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37.

Ex 4. & 37. fiunt 41. quæ multiplicata p numerũ terminorũ, hoc est, per 12. (Sunt enim 12. numeri in

in ea progressione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. est summa omnium numerorum datæ progressionis. Eademque ratio est de cæteris.

Summa cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

HAEC regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorũ est par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorũ: Si vero numerus terminorum est impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum est impar, semper illud aggregatum est par) per numerum terminorum. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorum progressionis. Vel hoc modo. Quando aggregatum ex primo, & vltimo termino est par, multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, siue is par sit, siue impar. Si vero aggregatum illud est impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc semper par est. Vt in superiori exemplo, quia numerus terminorum est par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo est impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum; efficiuntq; summam omnium numerorum 246. vt prius. In his autẽ duabus progressionibus, in quarum priore numerus terminorum est par, nempe 10. & in posteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vltimo est par, nũ

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.
4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

S 2 *mirum*

PROGRESSIONS GEOMETRIQUES

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

Cap. XXV.

PROGRESSIO Geometrica est series plurium numerorum se in eadem proportione superantium, vt hic apparet. *Progressio Geometrica quid.*

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. &c.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. &c.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536. &c.

PRIMA enim harum progressionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus sit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus sit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atq; vtraque harũ progressionum ab 1. incipit; tertia denique per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1. sed à 3. initium sumit.

CONTINVATVR qualibet progressio Geometrica; si per denominatorem proportionis numerus ille, post quem progressio extendendenda est, multiplicetur. Vt si progressio hæc proportionis triplæ, 4. 12. 36. continuanda sit, multiplicabimus vltimum numerum 36. per 3. de... *Geometrica progressio quo pacto continuetur.*

REGVLA I.

[*] SI in quauis progressione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vnà cũ minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionẽ summæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo, & reliquus numerus per numerum, qui vna vnitate minor sit, quàm denominator, diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, siue maius extremum adijciatur, componetur summa omnium terminorum. Vt in hac progressione. *Summa cuiuscunq; progressionis Geometricæ quo pacto inueniatur.*

3. 12. 48. 192. 768. 3072. 12288. 49152.

Demptis 3. ex 49152. remanẽt 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quã habent numeri datæ progressionis, est 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, siue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemusq; summam totius progressionis 65535. Item hic.

4. 6. 9. $13\frac{1}{2}$. $20\frac{1}{4}$. $30\frac{3}{8}$. $45\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex $45\frac{9}{16}$. relinquuntur $41\frac{9}{16}$. quæ si diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Est enim $1\frac{1}{2}$. denominator proportionis sesquialteræ, quam habent numeri huius progressionis, ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiẽs $83\frac{1}{8}$. cui si addatur vltimus numerus, siue maius extremum $45\frac{9}{16}$. fiet summa

ma totius progressionis $128\frac{11}{16}$. atq; eodem modo summam cuiuscunque progressionis Geometricæ inueniemus.

ITAQVE, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam summã totius progressionis, etiamsi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire possimus, licet non continuetur tota progressio, sequenti regula explicabimus.

IN progressione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium est 1. facillimo negotio summa totius progressionis quotcunque terminorum reperietur, si vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic. *Particularis inuẽtio summæ progressionis proportionis duplæ cuius initium est 1.*

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024. reijciatur 1. habebitur summa totius progressionis 1023. *In progressione proportionis duplę incipiẽte ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, est summa omnium antecedentium numerorum.*

EX quo fit, quemlibet numerum in huiusmodi progressione, abiecta prius vnitate, esse summã omnium numerorum antecedentiũ, cum quilibet numerus sit proxime præcedentis numeri duplus.

REGVLA II.

IN omni progressione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus seipsum multiplicans gignit

Quelques passages méritent d'être traduits, ne serait-ce que pour montrer aux étudiants qui répugnent à l'usage des lettres le pouvoir de concision qu'il qu'il donne :

(*) **La Règle de trois** (exemple)

Quatre pièces d'or permettant d'acheter douze livres de poivre, on demande combien de livres vingt pièces permettraient d'acheter

Pièces d'or	*livres*	*pièces d'or*	*livres*
4	*12*	*20*	*60*

En multipliant entre eux le second et le troisième nombre, on obtient le produit 240. En divisant ce produit par le premier nombre, nous trouvons 60 livres, comme quatrième nombre cherché. On voit alors que, de même que le premier nombre 4 est le tiers du second nombre 12, de même le troisième nombre 20 est le tiers du quatrième nombre obtenu, 60.

(**) **Progressions arithmétiques. Règle 1**

Si, dans une progression arithmétique, nous sont donnés 4 termes situés aux extrémités, nous pouvons connaître la somme de tous les termes de cette façon : ajoutons le premier au dernier terme et multiplions la somme par le nombre de termes. La moitié de ce produit sera la somme de tous les termes.

(évidemment, $a_0 + \dots + a_{n-1} = n(a_0 + a_{n-1})/2$ est plus concis, mais est-ce plus clair ?)

(***) **Progressions géométriques. Règle 1** $\left(a_0 + \dots + a_n = \dfrac{a_n - a_0}{r - 1} + a_n\right)$

Si, dans une progression géométrique nous sont donnés le dénominateur de proportion, le premier et le dernier terme, nous parvenons à connaître la somme de tous les termes, de la façon suivante. Otons le premier terme au dernier et divisons le résultat par le dénominateur diminué d'une unité. Si nous ajoutons alors le dernier terme, l'extrême le plus grand, au quotient, nous obtenons la somme de tous les termes.

Une lecture hative pourrait faire croire, latin de cuisine aidant, que le livre de Clavius est un catalogue de recettes. Ce n'est pas le cas. Les définitions et premiers exemples sont lourdement redondants, mais laissent entrevoir un certain souci formaliste (dans la présentation de la règle de trois, par exemple). D'autre part, si les différentes règles ne sont pas démontrées stricto sensu, l'auteur s'attache à prouver que les résultats annoncés sont acceptables : les règles donnant la somme des termes des progressions arithmétiques et géométriques sont données, mais Clavius s'attache à prouver que les quotients qui y figurent sont bien entiers, en se référant aux propositions arithmétiques d'Euclide.

Le jésuite mathématicien s'est d'ailleurs montré virtuose dans le domaine de la déduction formelle, et son nom se rencontre toujours dans les ouvrages de logique : à la suite de Lukasiewicz les logiciens intitulent "Loi de Clavius" la tautologie suivante :

$$(\bar{a} \Rightarrow a) \Rightarrow a$$

Nommée "consequentia mirabilis" (de la fausseté de a, on peut déduire la véracité de a !) par les contemporains de Clavius, elle était déjà connue des philosophes Mégariques. Clavius la retrouva en analysant la preuve d'un résultat d'Euclide :

si p premier divise n^2, alors p divise n .

Adoptons l'hypothèse h : **p est premier et divise n^2.**

Soit a la proposition : **p divise n.**

Il s'agit de prouver que a est vraie, sous l'hypothèse h.

Or un célèbre lemme d'Euclide dit que :

si p premier divise r.s sans diviser r, alors p divise s.

En prenant r = s = n, ce lemme assure que :

si p premier divise n^2 sans diviser n, alors p divise n.

Ce qui peut s'écrire encore, sous l'hypothèse h :

si p ne divise pas n, alors p divise n

On reconnaît la proposition : $(\bar{a} \Rightarrow a)$.

Merveille, la loi de Clavius assure alors que **a est vraie** !
